

**Вопросы ко 2-му экзамену по курсу «Алгебра и геометрия»
летняя сессия 2024 г.**

1. Ослабленный закон сокращения для матриц. Определитель произведения матриц.
2. Присоединенная матрица. Значение многочлена от квадратной матрицы. Характеристический многочлен матрицы. Теорема Гамильтона-Кэли.
3. Матричная запись системы линейных уравнений. Матричные уравнения вида $AX=B$ и $XA=B$.
4. Обратная матрица: определение, критерий обратимости, формула для вычисления, свойства, применение к решению систем линейных уравнений и матричных уравнений, нахождение с помощью элементарных преобразований.
5. Ранг матрицы по строкам, по столбцам и по минорам. Теорема о ранге матрицы.
6. Ранг произведения матриц. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Векторная запись общего решения произвольной системы линейных уравнений.
8. Линейный оператор. Теорема существования и единственности. Матрица линейного оператора. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора и матрицы оператора при замене базиса.
9. Образ и ядро линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте. Алгоритмы нахождения базисов образа и ядра.
10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Теоремы о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению и к разным собственным значениям. Собственные значения и корни характеристического уравнения оператора. Линейные операторы, приводимые к диагональному виду.
11. Цепочки ядер и образов степеней линейного оператора. Разложение Фитинга.
12. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении. Теорема о приведении матрицы оператора к жордановой нормальной форме.
13. Алгоритм приведения матрицы оператора к жордановой нормальной форме.
14. Нормальный оператор. Теорема о строении нормального оператора в унитарном пространстве.
15. Теорема о строении нормального оператора в евклидовом пространстве.
16. Отображение, сопряженное к данному. Теорема о существовании, единственности и линейности сопряженного отображения.
17. Самосопряженный оператор. Эрмитовость матрицы самосопряженного оператора. Свойства корней характеристического уравнения и собственных векторов самосопряженного оператора.
18. Свойства корневых подпространств относительно самосопряженного оператора. Основная теорема о самосопряженном операторе. Свойства матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому.
19. Изометрические операторы. Теорема о строении унитарного оператора (т.е. изометрического оператора в унитарном пространстве).
20. Теорема о строении ортогонального оператора (т.е. изометрического оператора в евклидовом пространстве).
21. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом приведение к главным осям.
22. Закон инерции квадратичных форм.
23. Положительно определенные квадратичные формы.
24. Классификация квадрик на плоскости.
25. Классификация квадрик в пространстве.