§ 8. Определители

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

8.1. Определение определителя. Определители малых порядков

Напомним, что если $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначается число инверсий в этой перестановке. Множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначается через S_n.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем F. *Определителем* (или *детерминантом*) матрицы A называется скаляр, который обозначается через $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле

$$|A| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \qquad (1)$$

Таким образом, определитель матрицы A равен алгебраической сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n элементов матрицы, по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Слагаемое $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ в правой части равенства (1) берется со знаком плюс, если перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четна, и со знаком минус, если эта перестановка нечетна. Из следствия 3.2 вытекает, что если $n \geqslant 2$, то половина слагаемых берется со знаком плюс, а половина — со знаком минус.

Для удобства изложения договоримся называть элементами, строками, столбцами и порядком определителя квадратной матрицы A, соответственно, элементы, строки, столбцы и порядок этой матрицы. Посмотрим, к чему приводит определение, данное на предыдущем слайде, при $n = 1, 2, 3$.

Определители 1-го порядка. Пусть $A = (a_{11})$ — квадратная матрица 1-го порядка. На множестве $\{1\}$ существует только одна перестановка, а именно — тривиальная перестановка (1). Число инверсий в этой перестановке равно 0, следовательно она четна. В силу формулы (1) имеем: $|A| = a_{11}$. Иными словами,

- *определитель 1-го порядка равен единственному элементу соответствующей матрицы.*

Определение

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ образуют ее *побочную диагональ*.

В следующей матрице побочная диагональ выделена красным цветом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & \color{red}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \color{red}{a_{2\,n-1}} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1\,1} & \color{red}{a_{n-1\,2}} & \ldots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ \color{red}{a_{n1}} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определители 2-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 2-го порядка. На множестве $\{1, 2\}$ существует ровно две перестановки: $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Первая из них четна (число инверсий равно 0), вторая нечетна (число инверсий равно 1). Следовательно, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Таким образом,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали соответствующей матрицы минус произведение элементов на ее побочной диагонали.*

Определители 3-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 3-го порядка. На множестве $\{1, 2, 3\}$ существует $3! = 6$ перестановок:

$(1, 2, 3)$ — 0 инверсий, перестановка четна,

$(1, 3, 2)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна,

$(2, 1, 3)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна,

$(2, 3, 1)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 1, 2)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 2, 1)$ — 3 инверсии, перестановка нечетна.

Следовательно,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. На следующем слайде мы укажем правило, позволяющее ее запомнить. Чтобы его сформулировать, заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На рис. 1 изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка. Элементы матрицы изображены точками.

Линии соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом красным цветом соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а синим — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

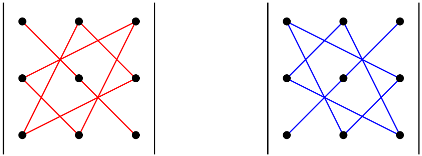

Рис. 1. Правило треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

Правило треугольников

При вычислении определителя 3-го порядка со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ соответствующей матрицы, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

8.3. Свойства определителей

Перейдем к изложению свойств определителей.

Предложение 8.2 (1-е свойство определителей)

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство будет добавлено позже.

Принцип равноправия строк и столбцов

Из 1-го свойства определителей вытекает следующий неформальный

Принцип равноправия строк и столбцов

Любое свойство определителей, формулируемое в терминах строк матрицы, останется справедливым, если слово «строка» заменить словом «столбец».

!! С учетом этого принципа, *все последующие свойства определителей формулируются только для строк, но использоваться будут как для строк, так и для столбцов.*

Во всех последующих свойствах определителей $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица произвольного порядка n над полем F. Некоторые свойства определителей (5-е и те, в доказательствах которых оно прямо или косвенно используется) неверны для матриц над полем характеристики 2. Во избежание недоразумений, *всюду далее в данном курсе лекций, за исключением тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, при рассмотрении определителей предполагается, что речь идет о матрицах над полем, характеристика которого отлична от* 2.

Предложение 8.3 (2-е свойство определителей)

Если все элементы некоторой строки матрицы A умножить на один и тот же скаляр, то ее определитель умножится на тот же самый скаляр.

Доказательство. Предположим, что мы умножаем k-ю строку матрицы на скаляр t. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда

$$|A'| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} (t a_{ki_k}) a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= t \cdot \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = t|A|,$$

что и требовалось доказать.

Поскольку умножение матрицы на скаляр равносильно умножению каждой строки матрицы на этот скаляр, из 2-го свойства определителей вытекает

Следствие 8.2

Если A — квадратная матрица порядка n, а t — произвольный скаляр, то $|tA| = t^n \cdot |A|$. □

Применяя 2-е свойство определителей в случае, когда строка умножается на 0, немедленно получаем

Предложение 8.4 (3-е свойство определителей)

Если матрица A содержит нулевую строку, то ее определитель равен 0. □

Предложение 8.5 (4-е свойство определителей)

Если две строки матрицы A поменять местами, то ее определитель умножится на -1.

Доказательство. Предположим, что мы поменяли местами k-ю и m-ю строки матрицы A, причем $k < m$. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда при переходе от $|A|$ к $|A'|$ всякое слагаемое вида

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a_{ki_k} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{m-1\, i_{m-1}} a_{mi_m} a_{m+1\, i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

заменится на равное ему по модулю слагаемое

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a_{mi_m} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{m-1\, i_{m-1}} a_{ki_k} a_{m+1\, i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

(оба раза мы указали слагаемые без знаков). Перестановка

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_m, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_k, i_{m+1}, \ldots, i_n)$$

получается из перестановки

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n)$$

транспозицией символов i_k и i_m. В силу леммы 3.2 эти транспозиции имеют разную четность. Следовательно, указанные выше слагаемые входят в выражения для $|A|$ и $|A'|$ с разными знаками, и потому $|A'| = -|A|$. $\square$

Предложение 8.6 (5-е свойство определителей)

Если матрица A содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. Положим $d = |A|$. После перестановки двух равных строк местами определитель умножится на -1 (в силу предыдущего свойства), но не изменится (что очевидно). Следовательно, $d = -d$, т. е. $2d = 0$. В силу замечания 4.3а) это означает, что $\operatorname{char} F = 2$. Но это противоречит нашей договоренности о характеристике поля F. $\square$

Из 2-го и 5-го свойств определителей вытекает

Следствие 8.3

Если матрица A содержит две пропорциональные строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. Предположим, что в матрице A i-я строка равна j-й строке, умноженной на t. Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее i-й строки на j-ю. Используя сначала 2-е, а затем 5-е свойство определителей, имеем $|A| = t|A'| = t \cdot 0 = 0$. $\square$

Предложение 8.7 (6-е свойство определителей)

Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых элементы этой строки равны первым слагаемым, а во второй — вторым слагаемым, а все остальные строки в обеих матрицах — те же, что и в исходной матрице.

Доказательство. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1} + a''_{k1} & a'_{k2} + a''_{k2} & \dots & a'_{kn} + a''_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \dots & a'_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{k1} & a''_{k2} & \dots & a''_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Требуется доказать, что $|A| = |B| + |C|$.

Действительно,

$$|A| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1}\cdots a_{k-1\,i_{k-1}}(a'_{ki_k}+a''_{ki_k})a_{k+1\,i_{k+1}}\cdots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1}\cdots a_{k-1\,i_{k-1}}a'_{ki_k}a_{k+1\,i_{k+1}}\cdots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1}\cdots a_{k-1\,i_{k-1}}a''_{ki_k}a_{k+1\,i_{k+1}}\cdots a_{ni_n} =$$

$$= |B| + |C|.$$

Свойство доказано. $\square$

Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на скаляр

Предложение 8.8 (7-е свойство определителей)

Если к некоторой строке матрицы A прибавить другую ее строку, умноженную на некоторый скаляр, то определитель матрицы не изменится.

Доказательство. Обозначим через A' матрицу, полученную прибавлением к k-й строке матрицы A ее m-й строки, умноженной на скаляр t. Используя 6-е свойство определителей и следствие 8.3, имеем

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+ta_{m1} & a_{k2}+ta_{m2} & \dots & a_{kn}+ta_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{m1} & ta_{m2} & \dots & ta_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|.$$

Свойство доказано.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы A i-й строки и j-го столбца, называется *минором элемента* a_{ij} и обозначается через M_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется скаляр $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Предложение 8.9 (8-е свойство определителей: разложение определителя по строке)

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Иными словами, если $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}. \tag{2}$$

Эта формула называется *разложением определителя по k-й строке*. В силу принципа равноправия строк и столбцов имеет место также следующая формула *разложения определителя по k-му столбцу*:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Разложение определителя по строке: комментарий

Формула разложения определителя по строке подсказывает один из способов вычисления определителя. В самом деле, эта формула сводит вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n-1$ (поскольку алгебраические дополнения к элементам матрицы с точностью до знака совпадают с определителями порядка $n-1$). Каждый из этих определителей $(n-1)$-го порядка можно разложить по какой-то строке и свести его вычисление к вычислению $(n-1)$-го определителя порядка $n-2$. Продолжая этот процесс, можно в конечном счете свести вычисление исходного определителя к вычислению большого числа определителей сколь угодно малого (вплоть до второго) порядка. Правда, число этих определителей может быть очень велико (легко понять, что в общем случае возникает $(n-1)!$ определителей 2-го порядка). Используя другие свойства определителей, можно добиться того, что почти все из этих определителей будут умножаться на 0, и потому вычислять их не надо. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Разложение определителя по строке: доказательство (1)

Доказательство 8-го свойства определителей будет добавлено позже.

Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки

Предложение 8.10 (9-е свойство определителей)

Сумма произведений элементов некоторой строки квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Доказательство будет добавлено позже.

Определитель треугольной матрицы

Предложение 8.11

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали.

Доказательство. Предположим, что матрица $A = (a_{ij})$ верхнетреугольна. Обозначим порядок матрицы через n и будем доказывать предложение индукцией по n.

База индукции очевидна: если $n = 1$, то, как мы видели выше, $|A| = a_{11}$.

Шаг индукции. Пусть теперь $n > 1$. Разложив определитель A по первому столбцу и воспользовавшись предположением индукции, имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

В случае нижнетреугольной матрицы доказательство аналогично, надо только воспользоваться разложением определителя по первой строке. $\square$

Определитель единичной матрицы

Из предложения 8.11 немедленно вытекает

Следствие 8.4

Определитель единичной матрицы равен 1. □

Предложение 8.11 в сочетании со свойствами определителей подсказывает один из способов вычисления определителя. Пусть дана квадратная матрица A. С помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. При этом нулевые строки, если они будут появляться, вычеркивать не будем, а будем «накапливать» в нижней части матрицы. В результате получим ступенчатую квадратную матрицу A'. В силу замечания 7.4 матрица A' верхнетреугольна. Ее определитель легко подсчитать (см. предложение 8.11). При переходе от A к A' определитель матрицы мог меняться в двух случаях: во-первых, если какие-то две строки менялись местами, то определитель умножался на -1 (по 4-му свойству определителей), и во-вторых, если какая-то строка умножалась на некоторый ненулевой скаляр, то определитель умножался на тот же скаляр (по 2-му свойству определителей)[1]. Таким образом, $|A'| = k \cdot |A|$ для некоторого скаляра $k \neq 0$, значение которого можно вычислить, проследив за тем, как матрица A приводилась к ступенчатому виду. Разделив $|A'|$ на k, мы получим $|A|$.

[1]Более точно: если к i-й строке, умноженной на s, прибавлялась j-я строка, умноженная на t, то определитель умножался на s.