Занятие 26. Сопряжённые и изометрические отображения

1. Пусть L_1 и L_2 – пространства со скалярным произведением (не обязательно конечномерные).

а) Доказать, что Im $(f \circ f^*) \perp$ Ker (f) для любого отображения f.

б) Верно ли, что Im $(f \circ f^*)$ = Ker $(f)^{\perp}$? Ответ надо обосновать.

в) Доказать, что Im $(f) \perp$ Ker (f^*) для любого преобразования f.

г) Верно ли, что Im (f) = Ker $(f^*)^{\perp}$? Ответ надо обосновать.

2. Ниже приведены матрицы отображений f в некоторых ортонормированных базисах конечномерные пространств L_1 и L_2 со скалярным произведением. Определите, какие из них являются изометрическими.

1) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4i & 6-2i & 4-3i \\ 4+3i & 2-6i & 4i \\ 6+2i & i & -2-6i \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & i \\ i & i & 1 \end{pmatrix}$.

3. В некотором ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства линейное преобразование имеет следующую матрицу:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta & -1 \\ -1 & \gamma & -1 & 1 \\ \delta & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти значения α, β, γ и δ, при которых данное преобразование является изометрическим.

4. В некотором ортонормированном базисе трёхмерного унитарного пространства линейное преобразование имеет следующую матрицу:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1-i \\ i & 1 & \beta \\ \gamma & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти значения α, β и γ, при которых данное преобразование является изометрическим.