Задачи по монадической логике второго порядка

Обозначения и соглашения. Рассматриваются слова над конечным алфавитом Σ. Формулы интерпретируются на начальных отрезках натурального ряда. Предметные переменные обозначаются маленькими буквами из конца латинского алфавита, монадические переменные – заглавными буквами. Предметные переменные интерпретируются как номера позиций, монадические – как множества (номеров) позиций. В формулах может использоваться бинарный предикат $x \in Y$, который интерпретируется так: позиция x принадлежит множеству позиций Y. Кроме того, используются бинарные предикаты равенства $x = y$, порядка $x < y$ и следования $y = x{+}1$, которые интерпретируются естественным образом, и унарные предикаты $Q_a(x)$ для каждой буквы $a \in \Sigma$, которые интерпретируются так: $Q_a(x)$ истинен на каком-то слове $w \in \Sigma^*$, если и только если в w позиция x занята буквой a. Соответствующую логику для краткости обозначаем через MSO($<$).

1. Какой язык задает формула $\forall x \Big(\neg\big(\exists y (y < x)\big) \to Q_a(x)\Big)$?

2. Какой язык задает формула $\exists x\, Q_a(x)$?

3. Какой язык задает формула $\exists x \exists y \Big((y = x{+}1) \,\&\, Q_a(x) \,\&\, Q_b(y)\Big)$?

4. Придумать формулу, задающую язык $\Sigma^* b$.

5. Придумать формулу, задающую язык ab^*.

6. Придумать формулу, задающую язык a^*b^*.

7. Придумать формулу, задающую язык $(ab)^*$.

8. Придумать формулу, задающую язык $(a^2)^*$.

9. Придумать формулу, задающую язык всех слов нечетной длины над алфавитом Σ.

10. Показать, что предикаты следования и равенства можно выразить в логике первого порядка через предикат порядка.

11. Показать, что предикат порядка можно выразить в монадической логике второго порядка через предикат следования.

12. Выразить через стандартные предикаты следующие монадические предикаты: а) Sing$X$ (множество X одноэлементно), б) $X \subseteq Y$ (множество X содержится в множестве Y), в) $X \subseteq Q_a$ (во всех позициях множества X стоит буква a).

13. Вася написал следующую формулу, которой, как он думает, задается язык a^*b^*:

$$\exists X\,\exists Y\,\forall x \forall y \Big(\big((x \in X)\,\&\,(y \in Y)\big) \to \big(Q_a(x)\,\&\,Q_b(y)\,\&\,(x < y)\big)\Big).$$

а) Прав ли Вася? б) Какой язык задает Васина формула? в) Как подправить Васину формулу, чтобы подправленная формула действительно задавала язык a^*b^*? г) Построить автомат, распознающий a^*b^*, и преобразовать его в формулу по алгоритму из доказательства теоремы Бюхи.

14. Доказать, что предикат сложения $S(x, y, z) \rightleftharpoons x + y = z$ нельзя выразить в логике MSO($<$).

15. Выразить предикат "x делится на 3" в логике MSO($<$).

16. Пусть $\mathcal{A}_1 = (\Sigma, Q_1, \mathcal{E}_1, i_1, F_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (\Sigma, Q_2, \mathcal{E}_2, i_2, F_2)$ – два автомата; L_1 и соответственно L_2 – языки бесконечных слов, которые эти автоматы принимают (по Бюхи). Построить автомат, принимающий язык $L_1 \cap L_2$.