Задачи к зачету по курсу “Теория алгоритмов”

1. Доказать NP-полноту задачи САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПУТЬ:

   ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V|$.

   ВОПРОС: имеется ли в G простой путь (т.е. путь, не проходящий дважды через одну вершину), состоящий из не менее чем K ребер?

2. Доказать NP-полноту задачи МИНИМАЛЬНЫЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ:

   ДАННЫЕ: ориентированный граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |E|$.

   ВОПРОС: существует ли ориентированный граф $G' = (V, E')$ такой, что $E' \subseteq E$, $|E'| \leq K$ и для каждой пары вершин $u, v \in V$ в G' имеется ориентированный путь из u в v тогда и только тогда, когда в G имеется ориентированный путь из u в v?

3. Доказать NP-полноту задачи ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ:

   ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V| - 1$.

   ВОПРОС: имеется ли в G *остовное дерево*, в котором все вершины имеют степень не более K?

4. Доказать NP-полноту задачи РАЗБИЕНИЕ НА ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ:

   ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V|$.

   ВОПРОС: можно ли множество V разбить на $k \leq K$ непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \ldots, V_k$ так, чтобы для всех i $(1 \leq i \leq k)$ каждый подграф, порожденный подмножеством V_i, содержал гамильтонов цикл?

5. Доказать NP-полноту ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ РАССТОЯНИЯМИ:

   ДАННЫЕ: множество C из m городов, расстояние $d(c_i, c_j) \in \mathbb{Z}^+$ между каждой парой различных городов $c_i, c_j \in C$ и положительное целое число B.

   ВОПРОС: существует ли маршрут, проходящий через все города и не содержащий ребер длины, большей B? Иначе говоря, существует ли такая перестановка городов $c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \ldots, c_{\pi(m)}$, что $d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \leq B$ при $1 \leq i < m$ и $d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) \leq B$?

6. Доказать NP-полноту задачи УПАКОВКА МНОЖЕСТВ:

   ДАННЫЕ: семейство $\mathcal{C}$ конечных множеств и положительное целое число $K \leq |\mathcal{C}|$.

   ВОПРОС: верно ли, что ли в $\mathcal{C}$ имеется K непересекающихся множеств?

7. Доказать NP-полноту задачи МИНИМАЛЬНОЕ ПОКРЫТИЕ:

   ДАННЫЕ: семейство $\mathcal{C}$ подмножеств конечного множества S и положительное целое число K.

   ВОПРОС: содержит ли $\mathcal{C}$ *покрытие* множества S размера не более K, т.е. такое подсемейство $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, что $|\mathcal{C}'| \leq K$ и $\bigcup\limits_{c \in \mathcal{C}'} c = S$?

8. Доказать NP-полноту задачи МНОЖЕСТВО ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ:

   ДАННЫЕ: семейство $\mathcal{C}$ подмножеств конечного множества S и положительное целое число K.

   ВОПРОС: содержит ли S множество *представителей* для $\mathcal{C}$ мощности, не превосходящей K, т.е. такое подмножество $S' \subseteq S$, что $|S'| \leq K$ и S' содержит по крайней мере один элемент из каждого множества семейства $\mathcal{C}$?

9. Доказать NP-полноту задачи ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ:

   ДАННЫЕ: графы $G = (V_1, E_1)$ и $H = (V_2, E_2)$.

   ВОПРОС: содержит ли граф G подграф, изоморфный H?

10. Доказать NP-полноту задачи НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ПОДГРАФ:

    ДАННЫЕ: графы $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, и положительное целое число K.

    ВОПРОС: существуют ли такие подмножества $E_1' \subseteq E_1$ и $E_2' \subseteq E_2$, что $|E_1'| = |E_2'| \geq K$, а подграфы $G_1' = (V_1, E_1')$ и $G_2' = (V_2, E_2')$ изоморфны?

11. Доказать NP-полноту задачи МИНИМУМ СУММЫ КВАДРАТОВ:

    ДАННЫЕ: конечное множество A, «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого $a \in A$ и положительные целые числа K и J.

    ВОПРОС: можно ли разбить A на K непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_K$ так, что

    $$\sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{a \in A_i} s(a) \right)^2 \leq J?$$

12. Доказать NP-полноту задачи РЮКЗАК:

    ДАННЫЕ: конечное множество A, «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ и «стоимость» $v(a) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого $a \in A$ и положительные целые числа B и K.

    ВОПРОС: существует ли подмножество $A' \subseteq A$ такое, что

    $$\sum_{a \in A'} s(a) \leq B \quad \text{и} \quad \sum_{a \in A'} v(a) \geq K?$$

13. Доказать NP-полноту задачи СУММА РАЗМЕРОВ:

    ДАННЫЕ: конечное множество A, «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ каждого $a \in A$ и положительное целое число B.

    ВОПРОС: существует ли подмножество $A' \subseteq A$ такое, что

$$\sum_{a \in A'} s(a) = B?$$

14. Доказать NP-полноту задачи УПАКОВКА В КОНТЕЙНЕРЫ:

    ДАННЫЕ: конечное множество A предметов, «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ каждого предмета $a \in A$, положительные целые числа B (вместимость контейнера) и K (число контейнеров).

    ВОПРОС: можно ли разбить A на K непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_K$ так, что для всех $i = 1, \ldots, K$

$$\sum_{a \in A_i} s(a) \leq B?$$

15. Доказать NP-полноту задачи РАСПИСАНИЕ ДЛЯ МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ:

    ДАННЫЕ: конечное множество A «заданий», «длительность» $\ell(a) \in \mathbb{Z}^+$ каждого задания $a \in A$, число $m \in \mathbb{Z}^+$ «процессоров» и «директивный срок» $D \in \mathbb{Z}^+$.

    ВОПРОС: можно ли разбить A на m непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ так, что

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{a \in A_i} \ell(a) \right\} \leq D?$$

16. Доказать NP-полноту задачи МНОЖЕСТВО ВЕРШИН, РАЗРЕЗАЮЩИХ КОНТУРЫ:

    ДАННЫЕ: ориентированный граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V|$.

    ВОПРОС: существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \leq K$ и любой ориентированный цикл в G проходит по крайней мере через одну вершину из V'?

    Указание: свести к данной задаче задачу ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.

17. Доказать NP-полноту задачи ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО:

    ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и целое число $K \leq |V|$.

    ВОПРОС: существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \leq K$ и каждая вершина $v \in V \backslash V'$ соединена ребром по крайней мере с одной вершиной из V'?

    Указание: свести к данной задаче задачу ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.

18. Доказать NP-полноту задачи ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ:

    ДАННЫЕ: множество X из $3q$ элементов и семейство $\mathcal{C}$ трехэлементных подмножеств множества X.

    ВОПРОС: существует ли подсемейство $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ такое, что каждый элемент из X принадлежит в точности одному подмножеству из $\mathcal{C}'$?

    Указание: свести к данной задаче задачу 3-СОЧЕТАНИЕ.

19. Доказать NP-полноту задачи ДЕРЕВО ШТЕЙНЕРА:

    ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$, подмножество $R \subseteq V$ и положительное целое число $K \subseteq |V| - 1$.

    ВОПРОС: существует ли поддерево в G, содержащее все вершины из R и имеющее не более K ребер?

    Указание: свести к данной задаче задачу ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ.

20. Доказать NP-полноту задачи ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ:

    ДАННЫЕ: множество X из $4q$ элементов и семейство $\mathcal{C}$ четырехэлементных подмножеств множества X.

    ВОПРОС: существует ли подсемейство $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ такое, что каждый элемент из X принадлежит в точности одному подмножеству из $\mathcal{C}'$?

    Указание: свести к данной задаче задачу ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ.

21. Доказать NP-полноту задачи УПОРЯДОЧЕНИЕ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛОВ:

    ДАННЫЕ: конечное множество T «заданий», «длительность» $\ell(t) \in \mathbb{Z}^+$, «время готовности» $r(t) \in \mathbb{Z}^+$ и «директивный срок» $d(t) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого задания $t \in T$.

    ВОПРОС: существует ли *допустимое расписание* для T, т.е. такое отображение $\sigma : T \to \mathbb{Z}^+$, что $\sigma(t) + \ell(t) \leq d(t)$, $\sigma(t) \geq r(t)$ и при $t' \neq t$ либо $\sigma(t) + \ell(t) \leq \sigma(t')$, либо $\sigma(t') + \ell(t') \leq \sigma(t)$?

    Указание: свести к данной задаче задачу РАЗБИЕНИЕ.

22. Доказать, что задача КЛИКА и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти клику с наибольшим числом вершин) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

23. Доказать, что задача ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти вершинное покрытие с наименьшим числом вершин) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

24. Доказать, что задача НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти независимое множество с наибольшим числом вершин) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

25. Доказать, что задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти гамильтонов цикл, если он существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

26. Доказать, что задача ВЫПОЛНИМОСТЬ и ее переборный вариант (по данной системе клозов требуется найти набор значений истинности переменных, делающий все клозы истинными, если он существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

27. Доказать, что задача 3-СОЧЕТАНИЕ и ее переборный вариант (по данному системе троек требуется найти подсистему, являющуюся трехмерным сочетанием, если оно существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

28. Доказать, что задача РАЗБИЕНИЕ и ее переборный вариант (по данному множеству «взвешенных» элементов требуется найти его разбиение на два подмножества одинакового суммарного веса, если оно существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

29. В оптимизационном варианте задачи РЮКЗАК даны конечное множество A, «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ и «стоимость» $v(a) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого $a \in A$ и положительное целое число B. Требуется найти подмножество $A' \subseteq A$ такое, что $\sum_{a \in A'} s(a) \leq B$, а величина $\sum_{a \in A'} v(a)$ принимает наибольшее возможное значение. Доказать, что если P $\neq$ NP, то не существует приближенного полиномиального алгоритма $\mathscr{A}$ такого, что при некоторой константе C неравенство $|OPT(x) - \mathscr{A}(x)| \leq C$ верно для любого экземпляра x задачи РЮКЗАК.

30. В задаче МАКСИМАЛЬНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ дан набор клозов, каждый из которых включает ровно три литерала, и требуется найти набор значений истинности переменных, выполняющий наибольшее возможное число клозов. Указать приближенный полиномиальный алгоритм $\mathscr{A}$ такой, что для любого экземпляра x задачи МАКСИМАЛЬНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ выполняется неравенство $\mathscr{A}(x) \geq \frac{7}{8} OPT(x)$.