

Задачи к зачету по курсу “Теория алгоритмов”

1. Доказать NP-полноту задачи САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПУТЬ:
ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V|$.
ВОПРОС: имеется ли в G простой путь (т.е. путь, не проходящий дважды через одну вершину), состоящий из не менее чем K ребер?
2. Доказать NP-полноту задачи МИНИМАЛЬНЫЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ:
ДАННЫЕ: ориентированный граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |E|$.
ВОПРОС: существует ли ориентированный граф $G' = (V, E')$ такой, что $E' \subseteq E$, $|E'| \leq K$ и для каждой пары вершин $u, v \in V$ в G' имеется ориентированный путь из u в v тогда и только тогда, когда в G имеется ориентированный путь из u в v ?
3. Доказать NP-полноту задачи ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ:
ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V| - 1$.
ВОПРОС: имеется ли в G *остовное дерево*, в котором все вершины имеют степень не более K ?
4. Доказать NP-полноту задачи РАЗБИЕНИЕ НА ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ:
ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V|$.
ВОПРОС: можно ли множество V разбить на $k \leq K$ непересекающихся подмножеств V_1, V_2, \dots, V_k так, чтобы для всех i ($1 \leq i \leq k$) каждый подграф, порожденный подмножеством V_i , содержал гамильтонов цикл?
5. Доказать NP-полноту ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ РАССТОЯНИЯМИ:
ДАННЫЕ: множество C из m городов, расстояние $d(c_i, c_j) \in \mathbb{Z}^+$ между каждой парой различных городов $c_i, c_j \in C$ и положительное целое число B .
ВОПРОС: существует ли маршрут, проходящий через все города и не содержащий ребер длины, большей B ? Иначе говоря, существует ли такая перестановка городов $c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(m)}$, что $d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \leq B$ при $1 \leq i < m$ и $d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) \leq B$?
6. Доказать NP-полноту задачи УПАКОВКА МНОЖЕСТВ:
ДАННЫЕ: семейство \mathcal{C} конечных множеств и положительное целое число $K \leq |\mathcal{C}|$.
ВОПРОС: верно ли, что ли в \mathcal{C} имеется K непересекающихся множеств?

7. Доказать NP-полноту задачи МИНИМАЛЬНОЕ ПОКРЫТИЕ:

ДАННЫЕ: семейство \mathcal{C} подмножеств конечного множества S и положительное целое число K .

ВОПРОС: содержит ли \mathcal{C} покрытие множества S размера не более K , т.е. такое подсемейство $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, что $|\mathcal{C}'| \leq K$ и $\bigcup_{c \in \mathcal{C}'} c = S$?

8. Доказать NP-полноту задачи МНОЖЕСТВО ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ:

ДАННЫЕ: семейство \mathcal{C} подмножеств конечного множества S и положительное целое число K .

ВОПРОС: содержит ли S множество *представителей* для \mathcal{C} мощности, не превосходящей K , т.е. такое подмножество $S' \subseteq S$, что $|S'| \leq K$ и S' содержит по крайней мере один элемент из каждого множества семейства \mathcal{C} ?

9. Доказать NP-полноту задачи ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ:

ДАННЫЕ: графы $G = (V_1, E_1)$ и $H = (V_2, E_2)$.

ВОПРОС: содержит ли граф G подграф, изоморфный H ?

10. Доказать NP-полноту задачи НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ПОДГРАФ:

ДАННЫЕ: графы $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, и положительное целое число K .

ВОПРОС: существуют ли такие подмножества $E'_1 \subseteq E_1$ и $E'_2 \subseteq E_2$, что $|E'_1| = |E'_2| \geq K$, а подграфы $G'_1 = (V_1, E'_1)$ и $G'_2 = (V_2, E'_2)$ изоморфны?

11. Доказать NP-полноту задачи МИНИМУМ СУММЫ КВАДРАТОВ:

ДАННЫЕ: конечное множество A , «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого $a \in A$ и положительные целые числа K и J .

ВОПРОС: можно ли разбить A на K непересекающихся множеств A_1, A_2, \dots, A_K так, что

$$\sum_{i=1}^K \left(\sum_{a \in A_i} s(a) \right)^2 \leq J?$$

12. Доказать NP-полноту задачи РЮКЗАК:

ДАННЫЕ: конечное множество A , «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ и «стоимость» $v(a) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого $a \in A$ и положительные целые числа B и K .

ВОПРОС: существует ли подмножество $A' \subseteq A$ такое, что

$$\sum_{a \in A'} s(a) \leq B \quad \text{и} \quad \sum_{a \in A'} v(a) \geq K?$$

13. Доказать NP-полноту задачи СУММА РАЗМЕРОВ:

ДАННЫЕ: конечное множество A , «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ каждого $a \in A$ и положительное целое число B .

ВОПРОС: существует ли подмножество $A' \subseteq A$ такое, что

$$\sum_{a \in A'} s(a) = B?$$

14. Доказать NP-полноту задачи УПАКОВКА В КОНТЕЙНЕРЫ:

ДАННЫЕ: конечное множество A предметов, «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ каждого предмета $a \in A$, положительные целые числа B (емкость контейнера) и K (число контейнеров).

ВОПРОС: можно ли разбить A на K непересекающихся множеств A_1, A_2, \dots, A_K так, что для всех $i = 1, \dots, K$

$$\sum_{a \in A_i} s(a) \leq B?$$

15. Доказать NP-полноту задачи РАСПИСАНИЕ ДЛЯ МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ:

ДАННЫЕ: конечное множество A «заданий», «длительность» $\ell(a) \in \mathbb{Z}^+$ каждого задания $a \in A$, число $m \in \mathbb{Z}^+$ «процессоров» и «директивный срок» $D \in \mathbb{Z}^+$.

ВОПРОС: можно ли разбить A на m непересекающихся множеств A_1, A_2, \dots, A_m так, что

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{a \in A_i} \ell(a) \right\} \leq D?$$

16. Доказать NP-полноту задачи МНОЖЕСТВО ВЕРШИН, РАЗРЕЗАЮЩИХ КОНТУРЫ:

ДАННЫЕ: ориентированный граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $K \leq |V|$.

ВОПРОС: существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \leq K$ и любой ориентированный цикл в G проходит по крайней мере через одну вершину из V' ?

Указание: свести к данной задаче задачу ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.

17. Доказать NP-полноту задачи ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО:

ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$ и целое число $K \leq |V|$.

ВОПРОС: существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \leq K$ и каждая вершина $v \in V \setminus V'$ соединена ребром по крайней мере с одной вершиной из V' ?

Указание: свести к данной задаче задачу ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.

18. Доказать NP-полноту задачи ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ:
- ДАННЫЕ: множество X из $3q$ элементов и семейство \mathcal{C} трехэлементных подмножеств множества X .
- ВОПРОС: существует ли подсемейство $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ такое, что каждый элемент из X принадлежит в точности одному подмножеству из \mathcal{C}' ?
- Указание:** свести к данной задаче задачу 3-СОЧЕТАНИЕ.
19. Доказать NP-полноту задачи ДЕРЕВО ШТЕЙНЕРА:
- ДАННЫЕ: граф $G = (V, E)$, подмножество $R \subseteq V$ и положительное целое число $K \subseteq |V| - 1$.
- ВОПРОС: существует ли поддерево в G , содержащее все вершины из R и имеющее не более K ребер?
- Указание:** свести к данной задаче задачу ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ.
20. Доказать NP-полноту задачи ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ:
- ДАННЫЕ: множество X из $4q$ элементов и семейство \mathcal{C} четырехэлементных подмножеств множества X .
- ВОПРОС: существует ли подсемейство $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ такое, что каждый элемент из X принадлежит в точности одному подмножеству из \mathcal{C}' ?
- Указание:** свести к данной задаче задачу ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ.
21. Доказать NP-полноту задачи УПОРЯДОЧЕНИЕ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛОВ:
- ДАННЫЕ: конечное множество T «заданий», «длительность» $\ell(t) \in \mathbb{Z}^+$, «время готовности» $r(t) \in \mathbb{Z}^+$ и «директивный срок» $d(t) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого задания $t \in T$.
- ВОПРОС: существует ли *допустимое расписание* для T , т.е. такое отображение $\sigma : T \rightarrow \mathbb{Z}^+$, что $\sigma(t) + \ell(t) \leq d(t)$, $\sigma(t) \geq r(t)$ и при $t' \neq t$ либо $\sigma(t) + \ell(t) \leq \sigma(t')$, либо $\sigma(t') + \ell(t') \leq \sigma(t)$?
- Указание:** свести к данной задаче задачу РАЗБИЕНИЕ.
22. Доказать, что задача КЛИКА и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти клику с наибольшим числом вершин) сводятся друг к другу по Тьюрингу.
23. Доказать, что задача ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти вершинное покрытие с наименьшим числом вершин) сводятся друг к другу по Тьюрингу.
24. Доказать, что задача НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти независимое множество с наибольшим числом вершин) сводятся друг к другу по Тьюрингу.

25. Доказать, что задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ и ее переборный вариант (в данном графе требуется найти гамильтонов цикл, если он существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.
26. Доказать, что задача ВЫПОЛНИМОСТЬ и ее переборный вариант (по данной системе клозов требуется найти набор значений истинности переменных, делающий все клозы истинными, если он существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.
27. Доказать, что задача 3-СОЧЕТАНИЕ и ее переборный вариант (по данному системе троек требуется найти подсистему, являющуюся трехмерным сочетанием, если оно существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.
28. Доказать, что задача РАЗБИЕНИЕ и ее переборный вариант (по данному множеству «взвешенных» элементов требуется найти его разбиение на два подмножества одинакового суммарного веса, если оно существует) сводятся друг к другу по Тьюрингу.
29. В оптимизационном варианте задачи РЮКЗАК даны конечное множество A , «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}^+$ и «стоимость» $v(a) \in \mathbb{Z}^+$ для каждого $a \in A$ и положительное целое число B . Требуется найти подмножество $A' \subseteq A$ такое, что $\sum_{a \in A'} s(a) \leq B$, а величина $\sum_{a \in A'} v(a)$ принимает наибольшее возможное значение. Доказать, что если $P \neq NP$, то не существует приближенного полиномиального алгоритма \mathcal{A} такого, что при некоторой константе C неравенство $|OPT(x) - \mathcal{A}(x)| \leq C$ верно для любого экземпляра x задачи РЮКЗАК.
30. В задаче МАКСИМАЛЬНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ дан набор клозов, каждый из которых включает ровно три литерала, и требуется найти набор значений истинности переменных, выполняющий наибольшее возможное число клозов. Указать приближенный полиномиальный алгоритм \mathcal{A} такой, что для любого экземпляра x задачи МАКСИМАЛЬНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ выполняется неравенство $\mathcal{A}(x) \geq \frac{7}{8}OPT(x)$.