

Вопросы по алгебре (2 семестр)

1. Понятие линейного отображения. Линейное пространство Hom . Произведение отображений. Свойства произведения. Кольцо $\text{Hom}(L, L)$.
2. Матрица линейного отображения. Действия над матрицами. Линейное пространство Hom и линейное пространство матриц. Кольцо $\text{Hom}(L, L)$ и кольцо квадратных матриц.
3. Перестановки. Инверсии и четность перестановок. Свойства перестановок.
4. Группа подстановок. Примеры групп подстановок. Четность подстановок.
5. Понятие определителя квадратной матрицы. Свойства определителя.
6. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
7. Определитель произведения квадратных матриц.
8. Обратное отображение и обратимые матрицы. Матрица, обратная к данной. Критерий обратимости.
9. Ранг матрицы.
10. Ядро и образ линейного отображения. Соотношение между рангом и дефектом отображения.
11. Крамеровы системы линейных уравнений. Теорема и формулы Крамера.
12. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных уравнений.
13. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
14. Линейное преобразование линейного пространства. Преобразование координат при переходе к другому базису. Подобные матрицы.
15. Инвариантные подпространства. Свойства инвариантных подпространств. Полуразпавшиеся и разпавшиеся матрицы линейного преобразования.
16. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Свойства собственных векторов.
17. Корневые подпространства. Свойства суммы корневых подпространств.
18. Лемма Фиттинга.
19. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
20. Существование жордановой формы матрицы.
21. Единственность жордановой формы матрицы.
22. Пространство со скалярным произведением. Примеры. Простейшие свойства пространств со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника.
23. Ортогональные и ортонормированные системы. Процесс ортогонализации Грама-Шмита. Определитель Грама и его свойства.
24. Ортогональное дополнение. Свойства ортогонального дополнения.
25. Сопряженный оператор. Свойства сопряженного оператора. Единственность сопряженного оператора. Существование сопряженного оператора.
26. Нормальный оператор и его свойства.
27. Комплексификация вещественного пространства. Теорема об инвариантных подпространствах линейного преобразования вещественного пространства.
28. Строение матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве.
29. Изометрические операторы и их свойства. Строение матрицы изометрического оператора.
30. Самосопряженные операторы и их свойства. Строение матрицы самосопряженного оператора.
31. Проектирование вектора на подпространство. Псевдорешения несовместных систем линейных уравнений.
32. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Конгруэнтные формы и матрицы.
33. Нормальный вид квадратичной формы. Приведение формы к нормальному виду. Единственность нормального вида над полем комплексных чисел.
34. Закон инерции вещественных квадратичных форм.
35. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
36. Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям.
37. Линейные функционалы. Сопряженное пространство и его свойства. Дуальные базисы пространств.
38. Преобразование координат в сопряженных пространствах.
39. Характеристика кольца и поля. Простые поля.
40. Расширение поля с помощью неприводимого многочлена.

41. Конечные и алгебраические расширения. Минимальный многочлен алгебраического элемента и его свойства.
42. Теорема о башне конечных расширений.
43. Теорема о башне алгебраических расширений. Алгебраическое замыкание поля.
44. Конечные поля.
45. Циклические группы. Признак порождающего элемента конечной циклической группы.
46. Теорема о конечных подгруппах мультипликативной группы поля.