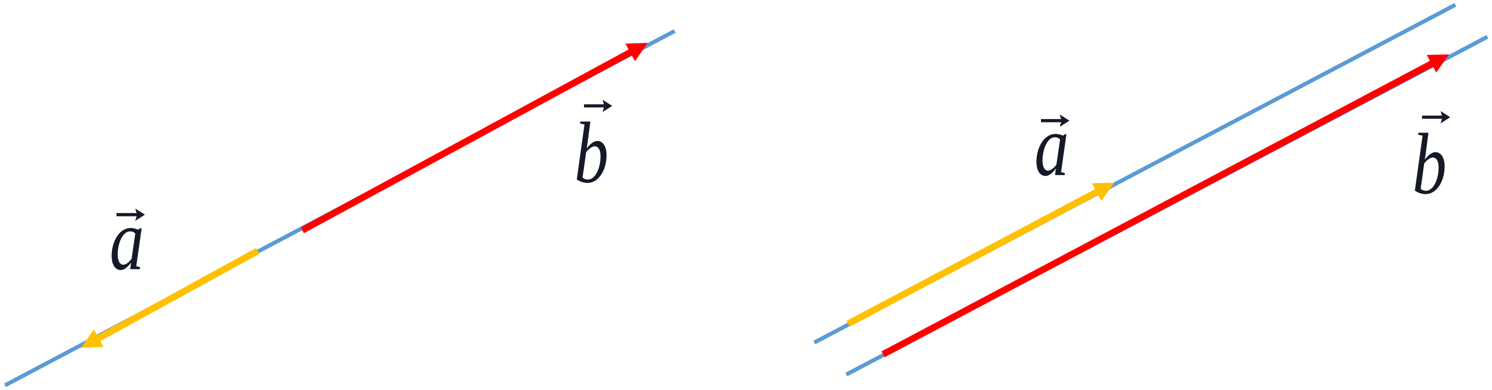
Основные понятия

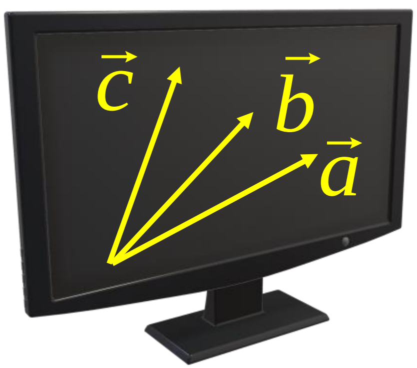
Опр. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

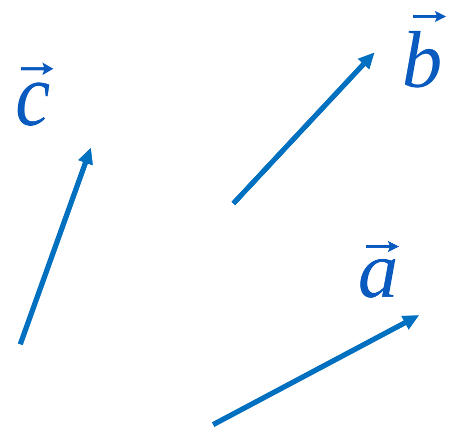


Обозначение: $\vec{a}||\vec{b}$.

Основные понятия

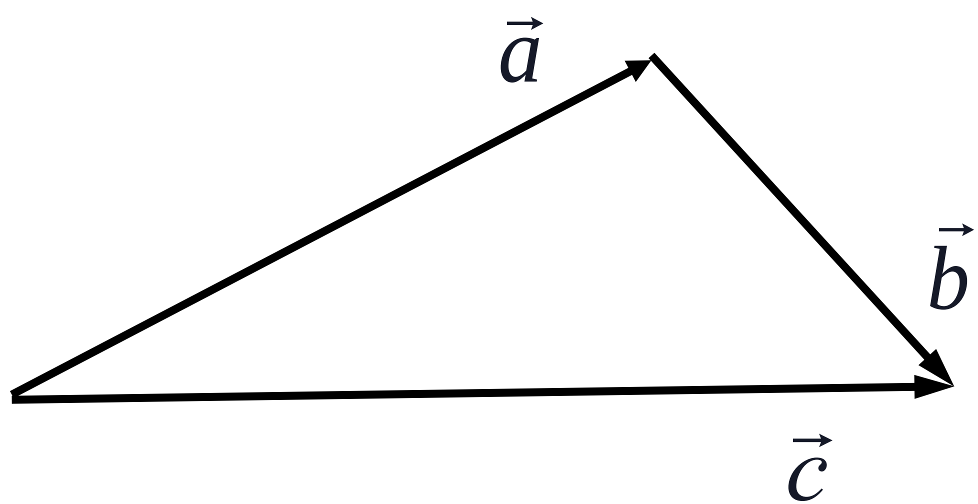
<u>Опр.</u> Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если, отложенные от одной точки, они лежат в одной плоскости.





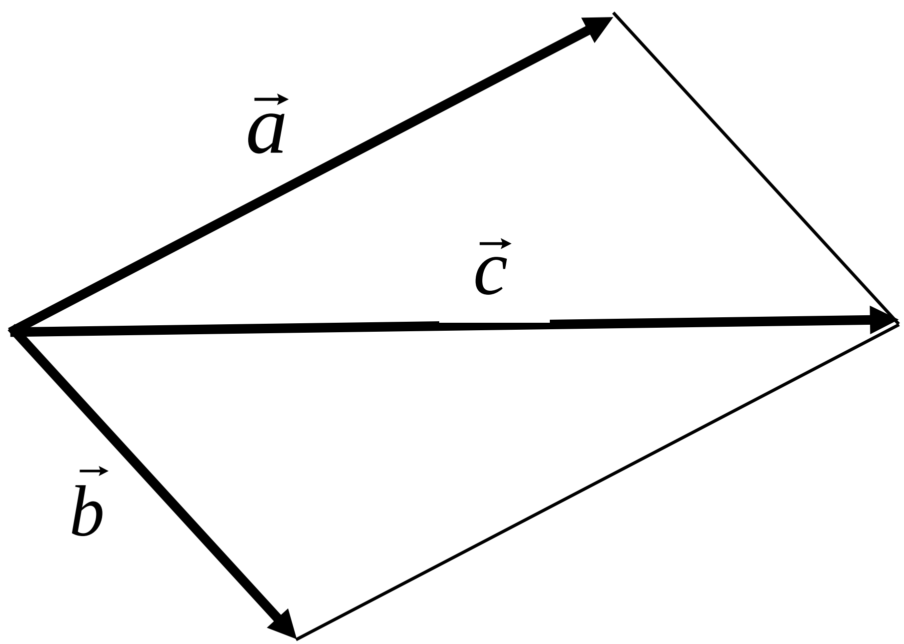
Линейные операции над векторами

Опр. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называется вектор $\vec{c}$, полученный по «правилу треугольника»:



Линейные операции над векторами

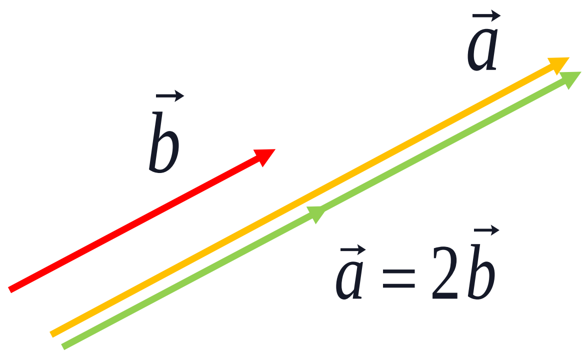
Тот же вектор можно получит по «правилу параллелограмма»:

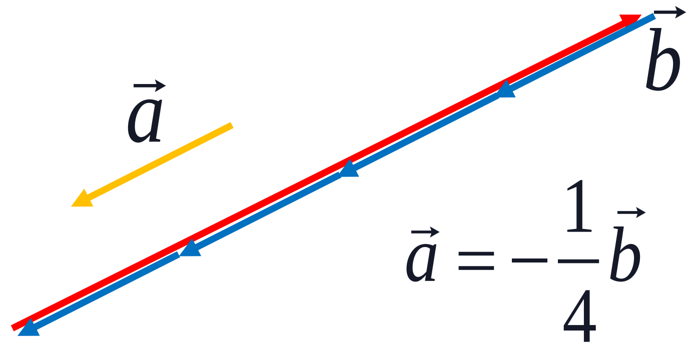


Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$

Линейные операции над векторами

<u>Опр.</u> Произведением вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный $\vec{a}$, длина которого равна произведению $|m| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $m > 0$, и противоположно направлению $\vec{a}$, если $m < 0$. Произведение $m = 0$ на вектор $\vec{a}$ есть нулевой вектор.



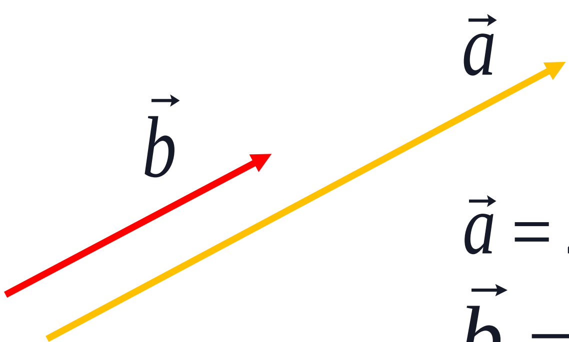


Обозначение: $\vec{c} = m\vec{a}$.

Линейные операции над векторами

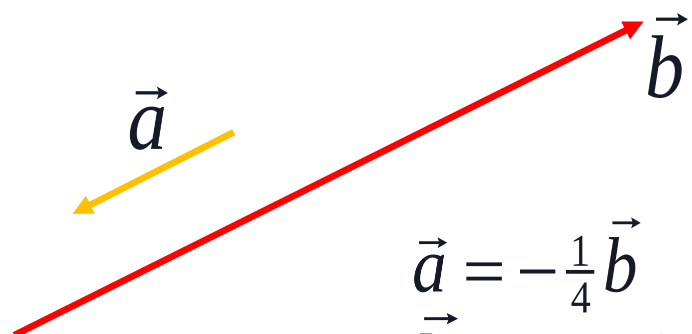
<u>Лемма о коллинеарных векторах.</u>

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ или $\vec{b}=\beta\vec{a}$ для некоторых чисел α, β.



$$\vec{a} = 2\vec{b}$$
$$\vec{b} = \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$



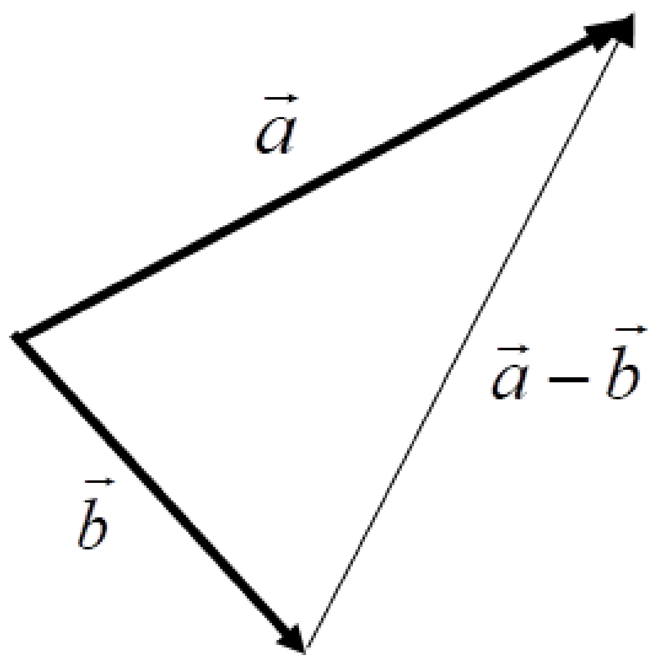
$$\vec{a} = -\tfrac{1}{4}\vec{b}$$
$$\vec{b} = -4\vec{a}$$

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

Линейные операции над векторами

Замечание: разность векторов – это комбинация операций сложения и умножения на число (–1):

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$



Базис на плоскости

Опр. Базисом на плоскости называется пара любых неколлинеарных векторов.

Теорема 1. Любой вектор плоскости можно единственным образом разложить по базисным векторам, причем единственным образом.

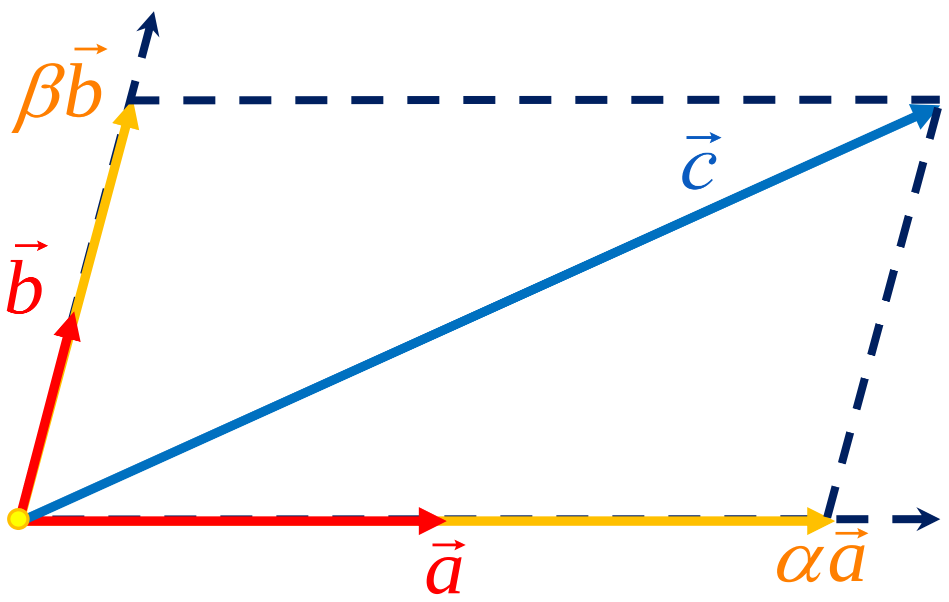
Базис в пространстве

Опр. Базисом в пространстве называется любая тройка некомпланарных векторов.

Теорема 2. Любой вектор пространства можно разложить по базисным векторам, причем единственным образом.

Координаты вектора

<u>Опр.</u> Координатами вектора на плоскости (в пространстве) называются коэффициенты разложения вектора по базису плоскости (пространства).



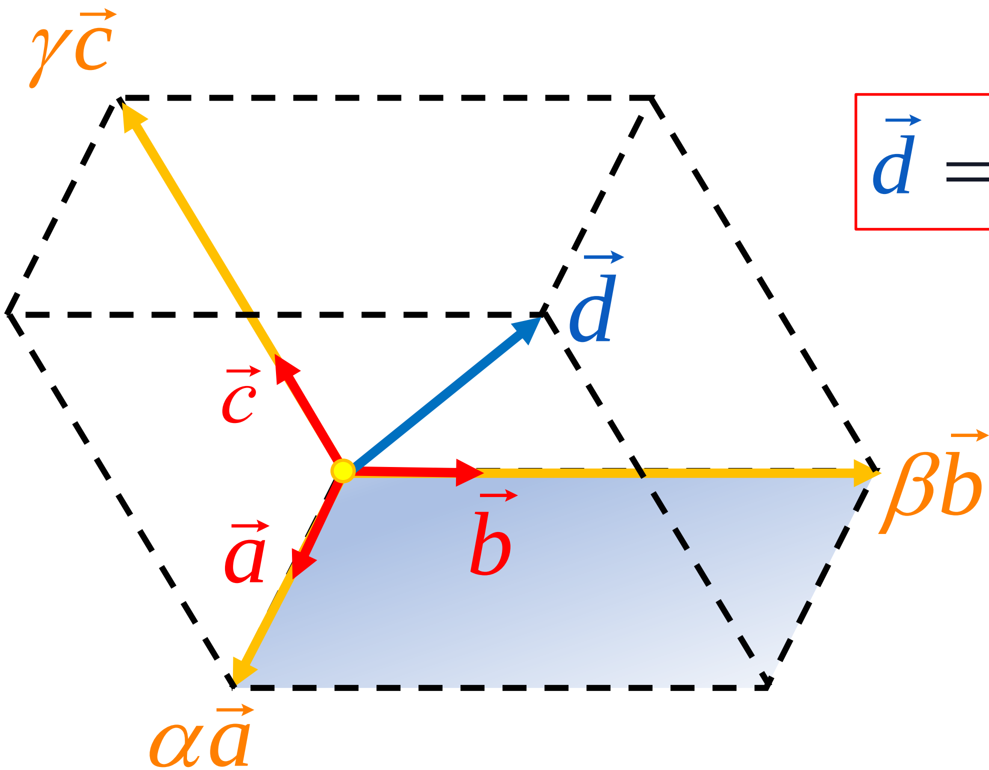
$$\boxed{\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}$$

Обозначение:

$\vec{c} = (\alpha, \beta)$

(α, β) – **координаты** вектора $\vec{c}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

§5. Координаты вектора



$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

Обозначение:

$$\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

(α, β, γ) –координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

Координаты вектора

Теорема 3 «о координатах» (в пространстве)

Пусть $\vec{a} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \vec{b} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.
Справедливы следующие утверждения:

(1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$.

Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

(2) $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$.

Координаты суммы векторов равны сумме координат этих векторов.

Координаты вектора

(3) $m \cdot \vec{a} = (m \cdot \alpha_1, m \cdot \beta_1, m \cdot \gamma_1)$.

Координаты произведения вектора на число равны произведению координат вектора на это число.

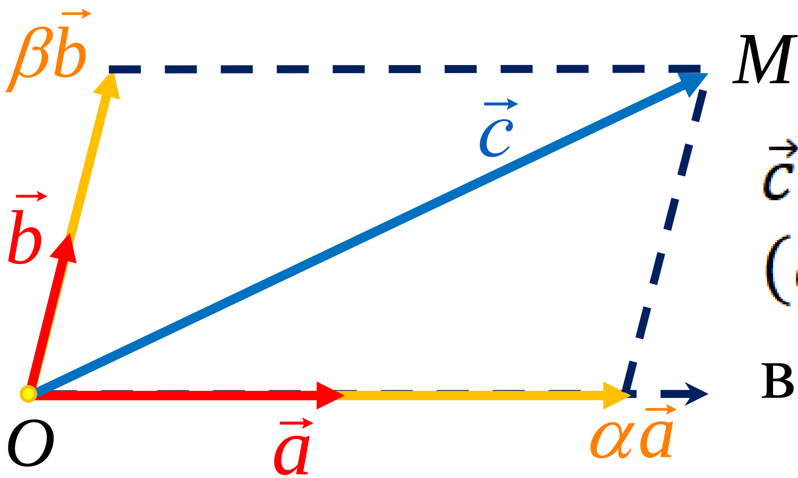
(4) $\vec{a} \mid\mid \vec{b} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Координаты точки

<u>Опр.</u> Радиус-вектором точки M на плоскости называется вектор $\overrightarrow{OM}$ в системе координат $\left(O;\vec{a},\vec{b}\right)$, связанной с базисом плоскости $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

<u>Опр.</u> Координатами точки M на плоскости называются координаты ее радиус-вектора.



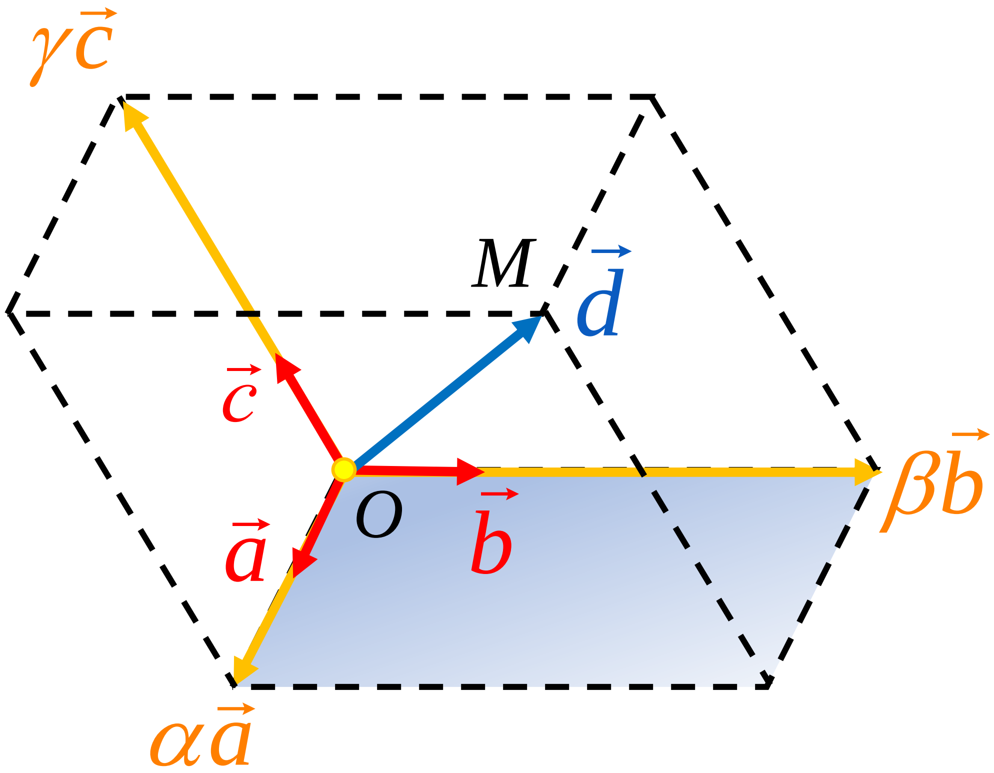
$\vec{c}$ –радиус-вектор точки M ;
(α,β) – координаты точки M в системе коодинат $(0;\vec{a},\vec{b})$.

Координаты точки

Опр. Радиус-вектором точки M в пространстве называется вектор $\overrightarrow{OM}$ в системе координат $\left(O;\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, связанной с базисом пространства $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Опр. Координатами точки M в пространстве называются координаты ее радиус-вектора.

Координаты точки



$\vec{d}$ –радиус-вектор точки M;

(α, β, γ) –координаты точки M в системе координат $\left(0; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

Координаты точки

Теорема 4. Если $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Чтобы найти координаты вектора, надо из координат конца вычесть координаты начала.