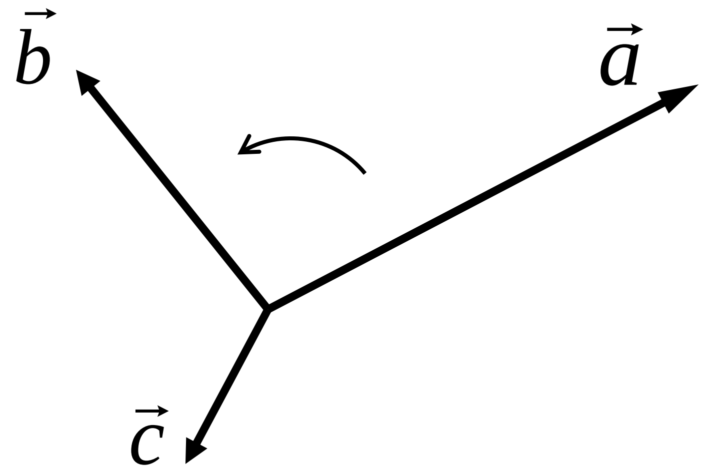
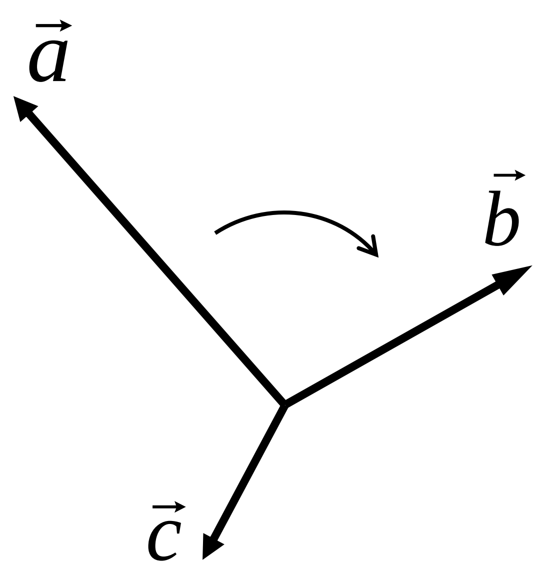
Векторное произведение

Опр. Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется правой, если переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по наименьшему углу видится **против часовой стрелки**, когда векторы отложены от одной точки, и наблюдение ведется с конца вектора $\vec{c}$.



Векторное произведение

<u>Опр</u>. Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется левой в противном случае (т.е. переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ с конца вектора $\vec{c}$ видится против часовой стрелки).

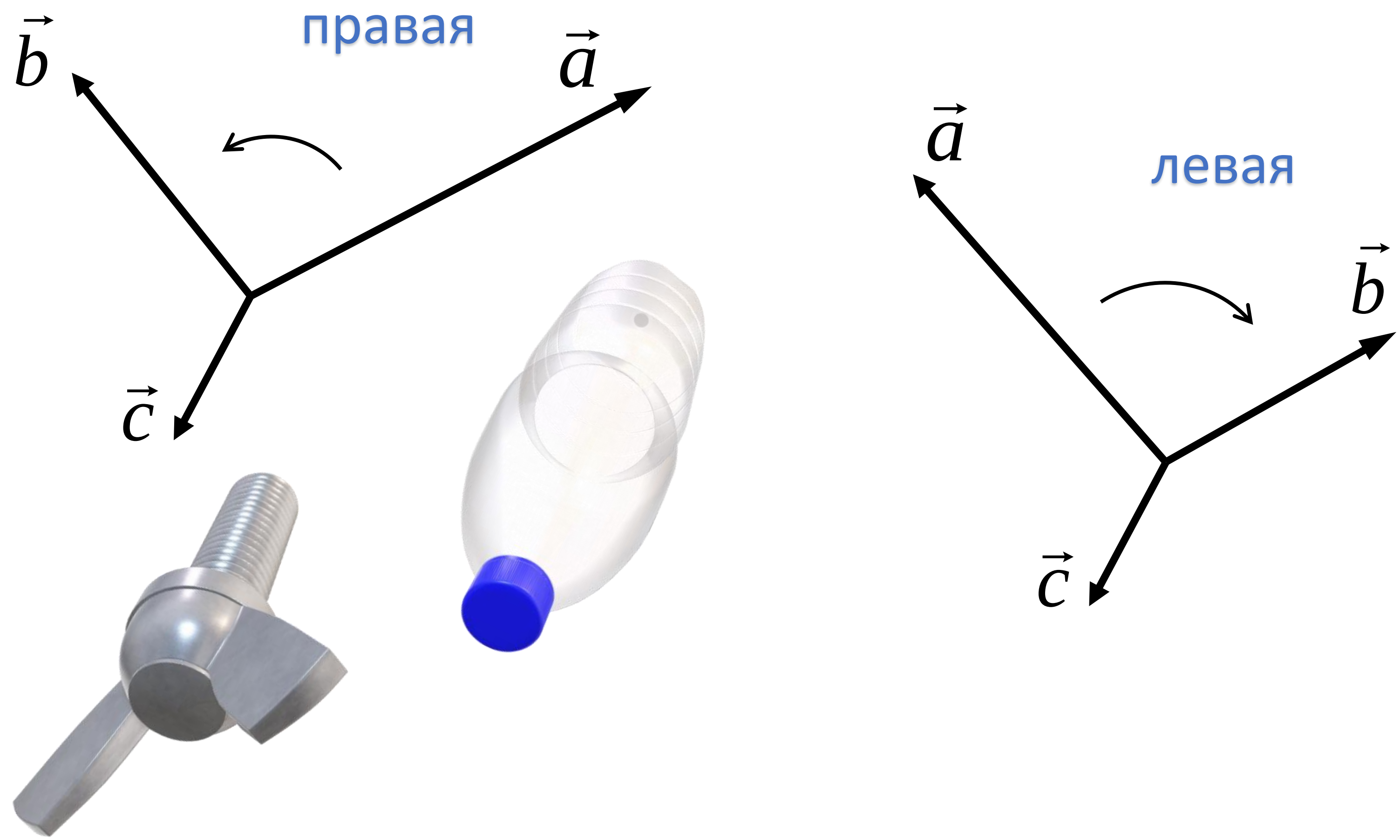


Векторное произведение

Замечание. Для определения того, является ли тройка правой или левой, можно пользоваться **«правилом буравчика»** или **«правилом отвинчивающейся крышки»**.

Если $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ – правая, то при переходе от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по наименьшему углу направление вектора $\vec{c}$ *согласовано* с движением буравчика или крышки, а если левая, то нет.

Векторное произведение



Векторное произведение

Опр. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}) = S_{\vec{a},\vec{b}}$;

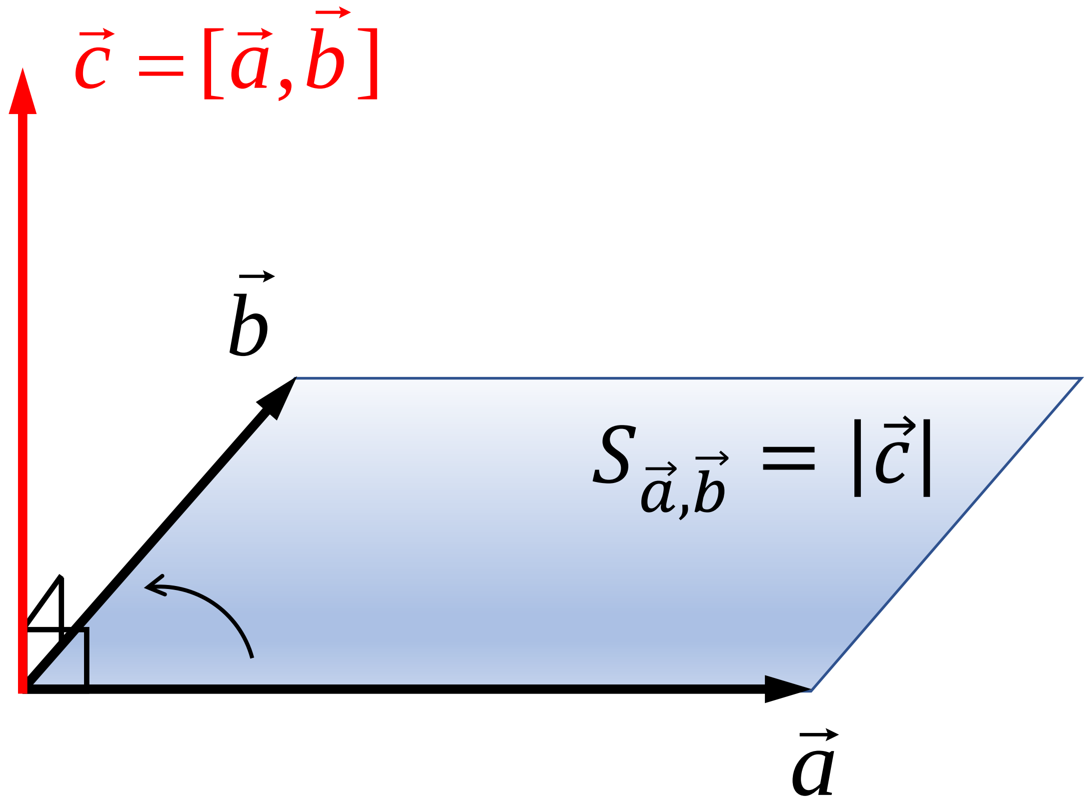
2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$,

т.е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение



Векторное произведение

Свойства векторного произведения

1. Антикоммутативность: $\vec{a} \times \vec{b} = - \ \vec{b} \times \vec{a}$.

2. Дистрибутивность относительно сложения:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

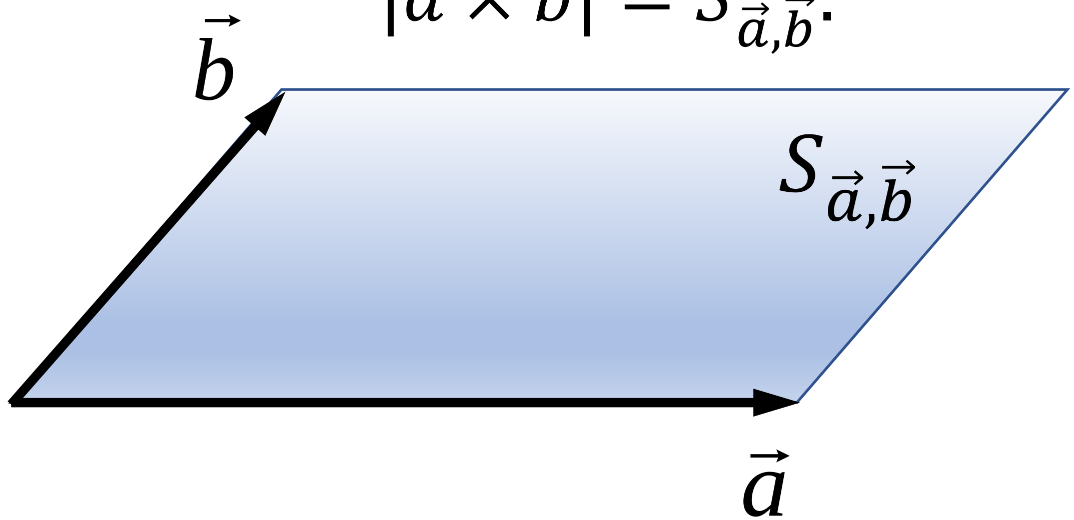
3. Однородность:

$$(m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m \cdot \vec{b}) = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Векторное произведение

4. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a},\vec{b}}.$$

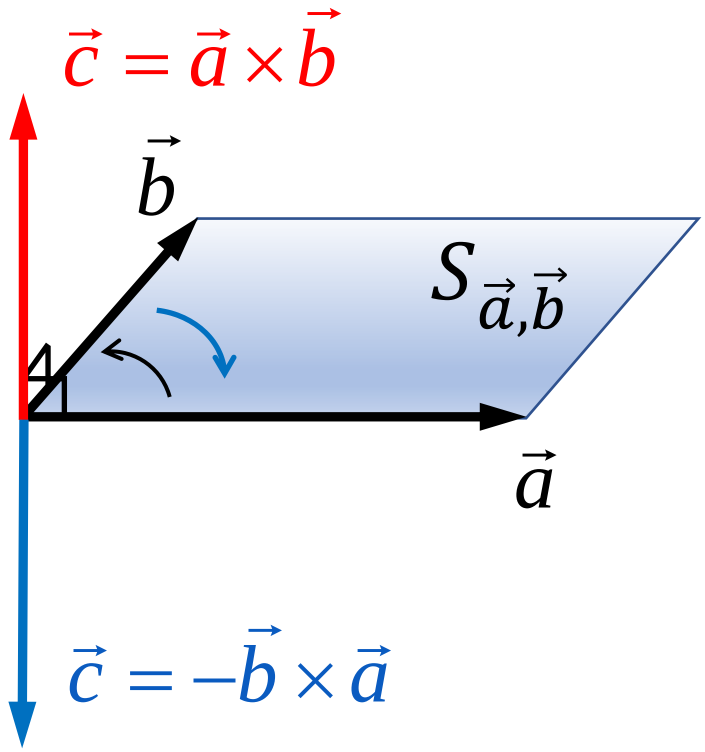


5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Векторное произведение

Доказательство

1) Надо доказать: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



2), 3) без док-ва;

4) очевидно.

Векторное произведение

<u>Пример 1</u>. Пусть $\vec{a} = (-1,1)$, $\vec{b} = (2,1)$ в базисе $\left(\vec{c}, \vec{d}\right)$, где $|\vec{c}| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\widehat{\vec{c}\vec{d}} = \frac{\pi}{3}$. Найти $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$.

<u>Решение</u>.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[-\vec{c} + \vec{d}, 2\vec{c} + \vec{d}\right] = [-\vec{c}, 2\vec{c}] + \left[-\vec{c}, \vec{d}\right] +$$
$$+\left[\vec{d}, 2\vec{c}\right] + \left[\vec{d}, \vec{d}\right] = \vec{0} - \left[\vec{c}, \vec{d}\right] - 2\left[\vec{c}, \vec{d}\right] + \vec{0} = -3\left[\vec{c}, \vec{d}\right]$$

$$\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = \left|-3\ \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right| = 3\left|\left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right| = 3|\vec{c}|\left|\vec{d}\right| \sin\frac{\pi}{3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Векторное произведение

<u>Теорема</u>. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{или } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение

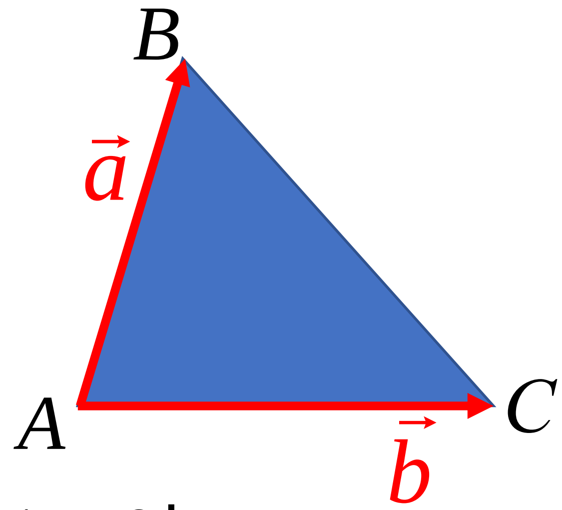
Пример 2. Пусть $A(-1,1,0)$, $B(-2,1,-1)$, $C(3,1,0)$ в $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Найти площадь ΔABC.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1,-1) - (-1,1,0) =$$
$$= (-1,0,-1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3,1,0) - (-1,1,0) =$$
$$= (4,0,0),$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Векторное произведение



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 4 + \vec{k} \cdot 0 = (0; -4; 0)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = \mathbf{2}$$