Тренировочный вариант контрольных заданий по математике

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III сем., II курс

Экстремумы ФНП

Задание 1. Частная производная, градиент, локальный экстремум ФНП

№	Условие	Ответы
1	Дана функция двух переменных: $7 \cdot x \cdot y + 9 \cdot x + 2 \cdot y$. Найдите значение частной производной: $f'_y(-5, 1)$. Ответ: **-33** Дана функция двух переменных: $5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 3 \cdot y$. Найдите градиент в точке $(-1; -3)$. Ответ: **(-9;-2)**	-33 (-9;-2)
2	Найти градиент функции z(x,y) в точке A: $z = \ln(x^2 + 2y^2) + e^x;\ \ A(0; 1)$	(1;2)
3	Исследовать на локальный экстремум функцию $z = -x^2 + 2x - y^2 + 2y + 4$	(1;1) – точка locmax

Задание 2. Наибольшее, наименьшее значение непрерывной ФНП в замкнутой ограниченной области

4	Найти наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных $z = x^2 - 4 \cdot x + y^2 + 6 \cdot y$ в треугольнике с вершинами $A = (0, -1)$, $B = (4, -1)$ и $C = (4, 4)$. Ответ: $[(2, -1, -9), (4, 4, 40)]$	(2;-1;-9) (4,4,40)

Задание 3. Условный экстремум ФНП

5	Найдите точку условного экстремума функции $$x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y + 9$$ при условии $-3 \cdot x + 5 \cdot y - 13 = 0$. Ответ: $[(-1; 2; 30)]$	(-1;2;30)

Двойной интеграл

Задание 4. Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области

6	Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f(x,y)=x^2+y^3,\ D:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2.$	$\frac{14}{3}$

Задание 5. Расстановка пределов интегриров. двумя способами (простой)

7	В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями А) $(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ \ x=-1,$ где $x\le -1.$ Б) $y=2-(x+1)^2,\ \ y=1.$ Сделать чертеж.	

Задание 6. Расстановка пределов интегр. в двойном интеграле (сложный)

8	Расставьте пределы интегрирования в двойных интегралах. Интеграл берется по фигуре ограниченной линиями $y=x^2+35$ и $y=12\cdot x$. $\int_{(\quad)}^{(\quad)}\left(\int_{(\quad)}^{(\quad)} f(x,y)\,dy\right)dx$ $\int_{(\quad)}^{(\quad)}\left(\int_{(\quad)}^{(\quad)} f(x,y)\,dx\right)dy$	
9	Свести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, по заданной области *D*, ограниченной двумя линиями $y=x^2-2,\ y=x,$ к повторному и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами. Сделать чертеж.	

Задание 7. Вычисление двойного интеграла при помощи полярной замены

10	Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2+y^2+3)^{-2}\,dx\,dy$ по области D, ограниченной окружностями радиуса $r_1=1$ и $r_2=4$ с центром в начале координат и лучами, выходящими из начала координат под углами $\varphi_1=0.4$ и $\varphi_2=1.2$.	$[0.0789474]$

11	Найти ординату центра масс одной шестой однородной круглой печенинки радиуса R=1 см с центром в начале координат, лежащей на оси Ox и расположенной в первой четверти.	$\frac{1}{\pi}$

Задание 8. Расстановка пределов интегрирования в двойном интеграле двумя способами, вычисление двойного интеграла

12	Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области *D*, ограниченной заданными линиями, двумя способами. Сделать чертеж. Вычислить двойной интеграл любым способом. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy;$ $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$	11

Задание 9. Поменять пределы интегрирования в двойном интеграле двумя способами.

13	Поменять пределы интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f\ dy+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f\ dy$	

Криволинейный интеграл

Задание 10. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

14	Убедиться, что криволинейный интеграл $$\int (15\cdot x^4\cdot y^3 - 9\cdot x^2)\,dx + (9\cdot x^5\cdot y^2)\,dy$$ не зависит от пути интегрирования и вычислить его от точки $A=(3,1)$ до точки $B=(-1,-6)$.	3

Задание 11. Формула Грина.

15	Вычислить циркуляцию $\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{a},\overrightarrow{dr}\right)=\oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy$ векторного поля $\vec{a}=(a_x;a_y)$ по контуру $\Gamma=\triangle ABC$ двумя способами 1) непосредственно; 2) по формуле Грина. Сделать чертеж.	$\frac{2}{5}$

△ABC	Поле $\vec{a}$
{{0, 0}, {-1, 0}, {-1, 2}}	$\{x^3 y, -x y^3\}$

Ряды

Задание 12 Определение сходящегося ряда, сумма ряда.

16	Доказать, что данный ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}$ сходится, разложив общий член ряда в сумму элементарных дробей. Найти сумму этого ряда.	1
17	Доказать, что данный ряд сходится. Найти сумму этого ряда: $\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}3^n}{4^n}$	$\frac{64}{63}$.

Задание 13,14. Сходимость ряда с положительными членами.

18	Сходятся ли ряды? Ответ обоснуйте: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}+1}{n+2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n n!}$.	Нет, да, нет, да.

Задание 15. Знакопеременные ряды.

19	Выяснить сходимость ряда. В случае сходимости, определить, сходится ли ряд абсолютно или условно. Ответы обосновать: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n(n+1)!}{5^n}$.	Сходится условно; расходится абсолютно.

Задание 16. Область сходимости степенного ряда.

20	Найти область сходимости степенного ряда $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n\cdot 6^{n+1}}{5^{n-1}\sqrt{n+1}}$, $б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^2}$.	$a)[-2\frac{5}{6};-1\frac{1}{6})$; $б)\,[1;2]$

Задание 17. Ряд Тейлора.

21	Разложить в степенной ряд (в ряд Тейлора) заданную функцию $f(x)=\frac{125}{\sqrt[3]{125+x}}$ по степеням *x*. Взять ТРИ первых слагаемых ряда: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$.	$f(x)=25-\frac{1}{15}x+\frac{2}{5625}x^2+o\left(x^2\right)$.

Дифференциальные уравнения

Задание 18. ДУ с разделяющимися переменными.

22	Решите задачу Коши. Сделайте проверку. $x\cdot y'-2=y,\ y(6)=28.$	$y=5x-2$

Задание 19. Однородные ДУ.

23	Найти частное решение дифференциального уравнения $x\cdot y\cdot y'=8\cdot y^2-49\cdot x^2$, удовлетворяющее условию $y(1)=8$	$y=\sqrt{7\cdot x^2+57\cdot x^{16}}$

Задание 20. Линейные ДУ.

24	Найти общее решение уравнения $y'+2y\tan x=4\cos^{-3}x\cdot\sin x$	

Задание 21. Уравнение Бернулли.

25	Найти общее решение уравнения $y' = -4 \cdot y + e^{3 \cdot x} \cdot y^{-5}$	

Задание 22. Уравнение в полных дифференциалах.

26	1. Убедиться, что это ДУ в полных дифференциалах. 2. Найти потенциал соответствующего поля при помощи криволинейного интеграла. 3. Проверить, что это потенциал, т.е. проверить, что его дифференциал равен левой части данного ДУ. 4. Написать общий интеграл данного ДУ. $(9 \cdot x^2 \cdot y^3 + 6 \cdot x^2)\, dx + (9 \cdot x^3 \cdot y^2)\, dy$=0	$2x^3 + 3x^3y^3 = C$

Задание 23. Комплексные числа. ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

27	Решить уравнение $(3 - 2 \cdot i) \cdot (-2 - 2 \cdot i) + (2 + 4 \cdot i) = x + 2 \cdot i$ $x =$	-8
28	Вычислить $\dfrac{24 + 8 \cdot i}{4 - 4 \cdot i} =$	2+4*i*
29	Найдите общее решение диф. уравнения: $y'' + 6 \cdot y' + 5 \cdot y = 0$	$[C_1 \cdot e^{-1x} + C_3 \cdot e^{-5x}]$

Задание 24. НЛДУ с постоянными коэффициентами с многочленом в правой части.

30	Найдите общее решение диф. уравнения: $y'' - 6 \cdot y' + 9 \cdot y = -9 \cdot x^2 + 21 \cdot x - 8$	$[C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x} + (-x^2 + x)]$
31	Написать вид общего решения ОЛДУ с неопределенными коэффициентами. Неопределенны коэффициенты можно не вычислять! $y'' - 2 \cdot y' = -30 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 8$	

Задание 25. НЛДУ с постоянными коэффициентами с тригонометрическим квазимногочленом в правой части.

32	Найти частное решение ДУ, удовлетвор. данным НУ $y'' - 10 \cdot y' + 24 \cdot y = -40 \cdot \cos(2x),\ y(0) = -4,\ y'(0) = -14.$	
33	Написать вид общего решения ОЛДУ с неопределенными коэффициентами. Неопределенны коэффициенты можно не вычислять! $y'' - 2y' + 2y = -5xe^{x}\sin x$	

Задание 26. Теорема о наложении решений.

32	Написать вид общего решения ОЛДУ с неопределенными коэффициентами. Неопределенны коэффициенты можно не вычислять! $y'' - 5 \cdot y' + 6 \cdot y = -42 \cdot e^{-4x} - 50 \cdot \sin(4x)$	
33	$y'' - 4 \cdot y' + 3 \cdot y = -15 \cdot x + 17 - 2 \cdot e^{1x}$	

Задание 27. Тест на определение типа ДУ и выбора способа решения. (обобщающий).

34	1) Определить тип ДУ. 2) Для ДУ с раздел. переменными переменные разделить. 2) Для однородное, линейное, уравнение Бернулли или для ДУ II пор. написать соответствующую замену. 3) Для ОЛДУ или НЛДУ с постоянными коэффициентами с квазимногочленом в прав. части написать вид общ. решения, не вычисляя неопределенными коэффициентами Уравнения можно НЕ РЕШАТЬ! $(x^2 + y^2)dy - 2xy\,dx = 0$ $xy' = y + x^2\cos x$ $y'' = e^{y}$ $y' = 4xy + 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$ $x^2y^2y' + 1 = y$ $y'' + 2y' = x\sin x$	

Использовались

1) учебное пособие

Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М: Высшая школа, 1983.

2) Генератор задач для студентов : http://generatorzadach.1gb.ru/