ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ для подготовки к контрольным, проверочным и самостоятельным работам по курсу «Математическая логика», IV (VI) семестр для студентов направл. Математика и компьютерные науки. (Математика).

Часть 2. Логика предикатов

№	Условие задачи
1.	**Формулы логики предикатов (основные понятия). Равносильность формул логики предикатов. Законы логики предикатов.**
1.1	Равносильны ли формулы: $F_1 = (\exists x)(\forall y)\big(F(x) \wedge G(y)\big)$ и $F_2 = (\forall y)(\exists x)\big(F(x) \wedge G(y)\big)$; $F_1 = (\exists x)(\forall y)\big(F(x) \wedge G(y)\big)$ и $F_2 = (\forall y)(\exists x)\big(F(x) \wedge G(y)\big)$?
1.2 [1]	**96.** Докажите эквивалентность формул: **a)** $\exists x(F(x) \Rightarrow G(x)) \sim \forall x F(x) \Rightarrow \exists x G(x)$; **b)** $\exists x \forall y(F(x) \wedge G(y)) \sim \forall y \exists x(F(x) \wedge G(y))$; **c)** $\exists x \forall y(F(x) \vee G(y)) \sim \forall y \exists x(F(x) \vee G(y))$.
1.3	Изобразите на плоскости множество истинности предиката $P(x,y) = (x^2 + y^2 > 1) \Rightarrow (xy > 0)$; $Q(y) = \forall x P(x,y)$, $R(y) = \exists x P(x,y)$. Выяснить истинность высказываний $\forall y Q(y)$, $\exists y Q(y)$, $\forall y R(y)$, $\exists y R(y)$.
1.4 [1]	**91.** Запишите определения следующих предикатов в виде формул, принимая в качестве предметной области множество точек и прямых в одной плоскости и используя предикатные символы $=$, $\mathrm{T}(x) \Leftrightarrow$ «x есть точка», $\Pi(x) \Leftrightarrow$ «x есть прямая», $i(x,y) \Leftrightarrow$ «x — точка, лежащая на прямой y» : **a)** $\text{Пер}(x,y) \Leftrightarrow$ «x и y — пересекающиеся прямые»; **b)** $\text{Пар}(x,y) \Leftrightarrow$ «x и y — параллельные прямые»; **c)** $\Delta(x,y,z) \Leftrightarrow$ «x, y, z — вершины некоторого треугольника», т.е.
1.5 [1]	**93.** Переведите следующие формулы на русский язык (при условиях задачи 91): **a)** $\exists x \exists y \exists z \neg \exists t(i(x,t) \wedge i(y,t) \wedge i(z,t))$; **b)** $\forall x \forall y \forall z(\Pi(x) \wedge \Pi(y) \wedge \Pi(z) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg \exists u(i(u,x) \wedge i(u,y)) \wedge$ $\neg \exists v(i(v,y) \wedge i(v,z)) \Rightarrow \neg \exists w(i(w,x) \wedge i(w,z)))$.
2.	**Предваренная нормальная форма и сколемовская нормальная форма формулы логики предикатов**
2.1	Привести к сначала к предваренной, а затем к сколемовской нормальным формам формулу $\neg(\forall x)\big[(\exists y)P(x,y) \to (\forall y)(P(y,y) \vee Q(y))\big]$.
2.2	Привести к сначала к предваренной, а затем к сколемовской нормальным формам формулу $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \wedge \neg[(\exists x)(\forall y)Q(x,y)]$.
3.	**Логическое следование в логике предикатов. Анализ рассуждений.**

3.1 [2]	Показать, что в следующих случаях формула *G* не является логическим следствием формул множества *K*. $G = (\forall x)\neg R(x)$, $K = \{(\exists x)R(x) \to (\exists x)Q(x), \neg Q(a)\}$; $G = (\exists x)(P(x)\ \&\ \neg R(x))$, $K = \{(\forall x)[P(x) \to (\exists y)(Q(y)\ \&\ S(x, y))]$, $(\exists x)[R(x)\ \&\ (\forall y)(Q(y) \to \neg S(x, y)]$, $(\exists x)P(x)\}$.
3.2	Показать, что следующее рассуждение нелогично: *Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, у некоторых млекопитающих есть перья.*
3.3	Показать, что следующее рассуждение нелогично: *Никто не поймет этого сообщения, если кто-нибудь не разгадает кода. Значит, никто не сможет понять это сообщение.*
4.	**Метод резолюций в логике предикатов. Использование метода резолюций при доказательстве логичности рассуждений.**
4.1	Доказать при помощи метода резолюций, что $\mathrm{G} = (\forall x)(P(x) \to R(x))$ является логическим следствием формул $\mathrm{F}_1 = (\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$, $\mathrm{F}_2 = (\forall x)(\neg Q(x) \to R(x))$.
4.2 [2]	**10**. Доказать с помощью метода резолюций, что формула G есть логическое следствие формул $F_1, \ldots, F_k$: а) $F_1 = (\forall x)(P(x) \to Q(x)\ \&\ R(x))$, $F_2 = (\exists x)(P(x)\ \&\ T(x))$, $G = (\exists x)(R(x)\ \&\ T(x))$, б) $F_1 = (\forall x)[(\exists y)(M(y)\ \&\ S(x, y)) \to (\exists z)(I(z)\ \&\ E(x,z))]$,
4.3	Доказать справедливость утверждения при помощи метода резолюций. Сорит Л.Кэррола. *(1) Каждый член парламента является либо членом палаты общин, либо членом палаты лордов. (2) Все члены палаты общин находятся в полном рассудке. (3) Ни один член парламента, носящий титул пэра, не станет участвовать в скачках на мулах. (4) Все члены палаты лордов носят титул пэра. Следовательно, ни один член парламента не станет участвовать в скачках на мулах, если он в полном рассудке.* (Взять в качестве основного множества множество членов парламента).
5.	**Выполнимость в логике предикатов: выполнимые формулы, общезначимые формулы, логически противоречивые формулы.**
5.1	Выполнима ли формула? Логически общезначима ли? Логически противоречива ли она: $(\forall x \exists y (F(x,y) \operatorname{xor} F(y,x))) \wedge (\exists x \exists y\ F(x,y))$?
5.2	Выполнима ли формула? Логически общезначима ли? Логически противоречива ли она: $(\forall x\ F(x,y)) \wedge (\forall y\ \neg F(y,y))$?
5.3	Используя метод резолюций доказать невыполнимость формулы $\exists x\ \forall y\ (Q(x,x) \wedge \neg Q(x,y))$
5.4	Используя отрицание формулы и метод резолюций доказать тождественную истинность формулы $\exists x\ \forall y\ Q(x,y) \to \forall y\ \exists x Q(x,y)$

Список использованной литературы

1) И.С. Фролов. Элементы математической логики: Учебное пособие. Самара: Изд-во Самарский университет, 2001. - 80 с.

2) А.П. Замятин. Математическая логика. Учебное пособие. – Екатеринбург, УрГУ, 2008. – 273 с.