Теория вероятностей и статистика

Тема 7. Статистическая проверка гипотез

Белов А.И.

Уральский федеральный университет

Екатеринбург, 2020

Статистическая гипотеза

В статистике рассматривают только статистические гипотезы:

- о виде распределения, т. е. в случае, когда закон распределения неизвестен, но есть основания предположить,что он имеет определённый вид;
- о параметре распределения, т. е. в случае, когда закон распределения известен, но его параметры неизвестны и есть основания предположить, что его параметр θ равен определённому значению θ_0;
- о равенстве параметров двух или более распределений;
- о независимости случайных величин и т. п.

Основная и конкурирующая гипотезы

Проверяемая гипотеза называется основной и обозначается H_0.
Зачастую наряду с ней рассматривают противоречащую ей гипотезу. Она называется конкурирующей и обозначается H_1.

Пример

Пусть θ — неизвестный параметр распределения.
Рассмотрим основную гипотезу H_0: $\{\theta = 2\}$.
Конкурирующие гипотезы:
H_1: $\{\theta = 1\}$, H_1': $\{\theta \neq 2\}$, H_1'' : $\{\theta > 2\}$ или H_1''': $\{\theta < 2\}$.

Гипотеза H_0 о параметре распределения называется простой, если она содержит только одно предполагаемое значение, и сложной в противном случае.

Ошибки первого и второго рода

Проверку основной гипотезы производят статистическими методами, т. е. на основе имеющихся выборок.
В итоге может быть принято неправильное решение, т. е. допущена ошибка одного из двух родов:

1. Ошибка первого рода — отвергнута правильная гипотеза.
2. Ошибка второго рода — принята неправильная гипотеза.

Определение

Вероятность совершить ошибку первого рода называют уровнем значимости и обозначают через α. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Уровень значимости выбирают близко к нулю, как правило 0,05 или 0,01.

Статистический критерий

Правило принятия или отклонения статистической гипотезы называется статистическим критерием.

В основе статистического критерия лежит функция

$$K = K(x_1, \dots, x_n),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — значения выборки. Эта функция служит мерой расхождения между проверяемой гипотезой H_0 и реальным результатом. Допуская вольность речи эту функцию называют критерием, а её значения — значениями критерия.

Т. к. значения выборки — случайные числа, то можно рассмотреть

$$K = K(X_1, \dots, X_n)$$

как случайную величину, где $X_1, \dots, X_n$ — одинаково распределены и независимы в совокупности.

Критическая область

После выбора определённого критерия область его значений разбивают на два непересекающихся множества.
Одно из них содержит значения критерия, при которых гипотеза принимается, другое — при которых отклоняется.

Определение

Множество значений критерия $K_{\text{кр}}$, при которых гипотеза отклоняется, называется критической областью. Множество значений критерия $K_{\text{пр}}$, при которых гипотеза принимается, называется областью принятия гипотезы.

Если для выборки $x_1, \ldots, x_n$ имеет место $K(x_1, \ldots, x_n) \in K_{\text{кр}}$, то гипотеза отклоняется.

Если $K(x_1, \ldots, x_n) \in K_{\text{пр}}$, то принимается.

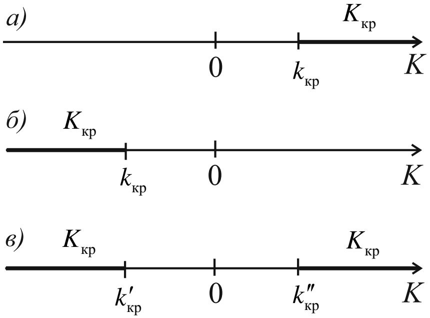
Критические точки

Как правило, значения критерия — это некоторый числовой (возможно, бесконечный) интервал. $K_{\text{кр}}$ и $K_{\text{пр}}$ — совокупность интервалов.

Определение

Критическими точками $k_{\text{кр}}$ называют точки, отделяющие $K_{\text{кр}}$ от $K_{\text{пр}}$.
$K_{\text{кр}}$ называется правосторонней, если она определяется неравенством $K > k_{\text{кр}} > 0$.
$K_{\text{кр}}$ называется левосторонней, если она определяется неравенством $K < k_{\text{кр}} < 0$.
Правостороннюю или левостороннюю $K_{\text{кр}}$ называют односторонней.
$K_{\text{кр}}$ называется двусторонней, если она определяется совокупностью неравенств $K < k'_{\text{кр}}$, $K > k''_{\text{кр}}$, где $k'_{\text{кр}} < k''_{\text{кр}}$.

Виды критических областей

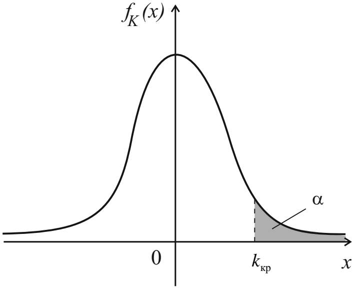


Критические области:
а) правосторонняя, б) левосторонняя, в) двусторонняя.

Отыскание правосторонней критической области

При фиксированном уровне значимости α правостороннюю критическую область ищут, исходя из равенства

$$P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha.$$

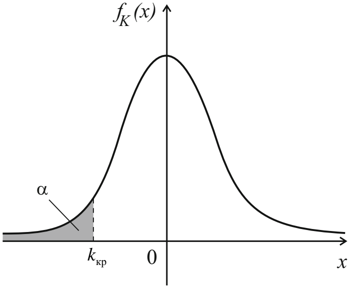


$k_{\text{кр}} = x_{(\alpha)} = x_{1-\alpha}$, где $x_{1-\alpha}$ — $(1-\alpha)$-квантиль.

Отыскание левосторонней критической области

При фиксированном уровне значимости α левостороннюю критическую область находят из равенства

$$P(K < k_{\text{кр}}) = \alpha.$$



$k_{\text{кр}} = x_{(\alpha)} = x_\alpha$, где x_α — α-квантиль.

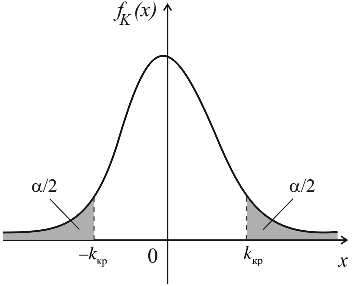
Отыскание двусторонней критической области

Двусторонняя критическая область определяется равенством

$$P(K < k'_{\text{кр}}) + P(K > k''_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Если распределение критерия K
и критические точки симметричны
относительно нуля:
$k'_{\text{кр}} = -k_{\text{кр}}$, $k''_{\text{кр}} = k_{\text{кр}}$,
$P(K < -k_{\text{кр}}) = P(K > k_{\text{кр}})$,
то критические точки определяются
условием

$$P(K > k_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2}.$$



$k_{\text{кр}} = x_{(\alpha/2)} = x_{1-\alpha/2}$, где $x_{1-\alpha/2}$ — $\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$-квантиль.

Мощность критерия

Определение

Мощностью критерия называют вероятность попадания значения критерия в критическую область при условии, что верна конкурирующая гипотеза.

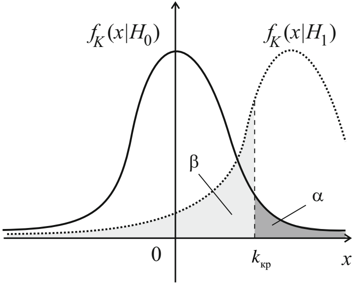
Мощность критерия — вероятность отвергнуть основную гипотезу, если верна конкурирующая гипотеза, то есть вероятность не совершить ошибку второго рода.

Если β — вероятность ошибки второго рода, то мощность критерия равна $1 - \beta$.

Мощность критерия и уровень значимости

В случае правосторонней критической области

$$\beta = P(K < k_{\textsf{кр}} \,|\, H_1).$$



При заданном объёме выборки уменьшение α ведет к увеличению β.
Единственный способ уменьшения как α, так и β — увеличение объёма выборки.

Критерии согласия

Определение

Рассмотрим гипотезу о распределении:

H_0: генеральная совокупность имеет распределение X, где X — случайная, величина, имеющая известное распределение.

Критерии проверки таких гипотез называют критериями согласия.

Известно несколько критериев согласия — Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

Распределение χ^2

Определение

Пусть X_i $(i = 1, \dots k)$ — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Случайная величина

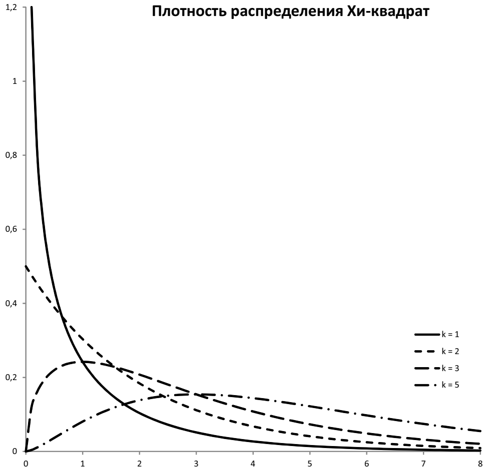
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

называется распределенной по закону χ^2 с k степенями свободы.

$M(\chi^2) = k$, $D(\chi^2) = 2k$ (без доказательства).

При $k \to \infty$ распределение χ^2 медленно приближается к нормальному.

Графики плотности распределения χ^2



Критерий согласия Пирсона

Для дискретных случайных величин с небольшим числом вариант используется статистическое распределение частот.

Для дискретных случайных величин с большим числом вариант и для непрерывных случайных величин проверка осуществляется по сгруппированным данным.

Критерий согласия Пирсона имеет вид

$$K = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Здесь n — объём выборки, m — число вариант (интервалов группировки), n_i — (групповые) частоты, p_i — теоретические вероятности $\{X = x_i\}$ (или попадания случайной величины X в i-й интервал группировки), т. е. np_i — теоретические частоты.

Критерий согласия Пирсона (продолжение)

Карл Пирсон доказал, что критерий K как случайная величина распределена по закону χ^2 с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где r — число параметров предполагаемого распределения X.

В качестве $K_{\text{кр}}$ рассматривают правостороннюю критическую область.

Критическую точку $k_{\text{кр}} = k_{(\alpha)}$ распределения χ^2 берут из таблиц.

В программе Microsoft Excel можно воспользоваться функцией ХИ2.ОБР.ПХ(α; k), где α — уровень значимости, $k = m - r - 1$ — число степеней свободы.

Если вычисленное по имеющейся выборке значение критерия $K^* < k_{(\alpha)}$, то гипотезу принимают. Если же $K^* > k_{(\alpha)}$, то её отвергают.

Практическое использование критерия согласия Пирсона

При практическом использовании критерия согласия Пирсона следует учитывать следующее:

- объём выборки должен быть достаточно большим, не менее 50;
- группировку следует делать так, чтобы значение групповых частот было не менее 5;
- малочисленные варианты (группы) следует объединять в одну группу, суммируя частоты.