Равномерное распределение

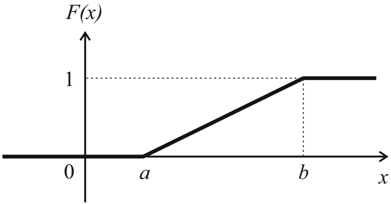
Пусть X — принимает равновозможные значения на промежутке от a до b $(a < b)$. Говорят, что X имеет равномерное распределение на этом промежутке.

Если $x \leqslant a$, то $\{X < x\} = \varnothing$ и $F(x) = P(X < x) = 0$.

Если $a < x \leqslant b$, то $\{X < x\} = [a, x)$. Тогда $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.

Если $x > b$, то $\{X < x\} = \Omega$ и $F(x) = P(X < x) = 1$.

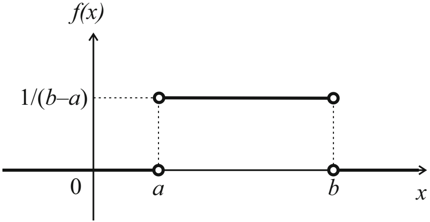
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$



Плотность равномерного распределения

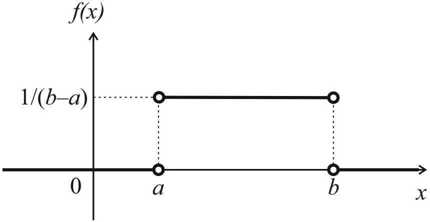
Поскольку $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x < b; \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$



Числовые характеристики равномерного распределения

X равномерно распределена на промежутке от a до b $(a < b)$.



$$M(X) = \frac{b+a}{2}; \qquad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}; \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

$M_0(X)$ не определена; $\qquad M_e(X) = \dfrac{b+a}{2}; \qquad \gamma_1 = 0; \qquad \gamma_2 = -1{,}2.$

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Говорят, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ, если плотность ее распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

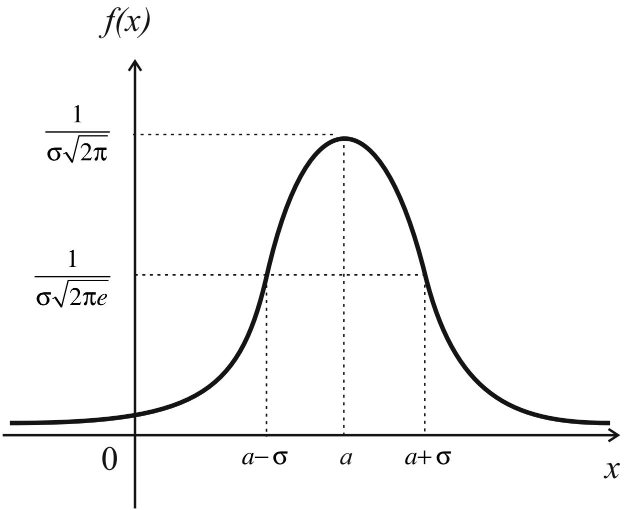
$f(x)$ определена на всей числовой оси.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$

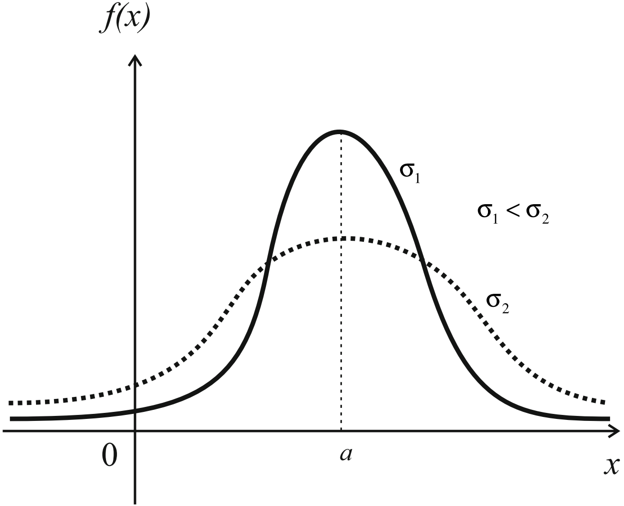
Точка $x = a$ является точкой максимума.

Точки $x = a \pm \sigma$ являются точками перегиба.

График плотности нормального распределения



Форма плотности нормального распределения в зависимости от параметра σ



Теорема о вероятности попадания в промежуток нормально распределённой случайной величины

Теорема

Пусть X нормально распределена с параметрами a, σ. Тогда

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[z = \frac{x-a}{\sigma}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad \square$$

Теорема о вероятности заданного отклонения от a нормально распределённой случайной величины

Теорема

Пусть X *нормально распределена с параметрами* a, σ*. Пусть также* $\varepsilon > 0$*. Тогда*

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Доказательство.

$$P(|X - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

□

Правило трёх сигм

Возьмём $\varepsilon = 3\sigma$.

Получим $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\dfrac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973$.

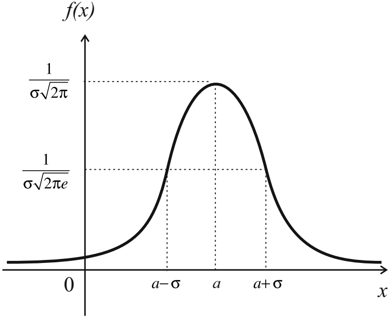
Значит $P(|X - a| \geqslant 3\sigma) \approx 0{,}0027$.

Правило трёх сигм

> Если случайная величина X распределена нормально
> с параметрами a и σ,
> то отклонение X от a больше чем на 3σ
> маловероятно (практически невозможно).

Числовые характеристики нормального распределения

X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ.



$$M(X) = a; \qquad D(X) = \sigma^2; \qquad \sigma(X) = \sigma;$$

$$M_0(X) = a; \qquad M_e(X) = a; \qquad \gamma_1 = 0; \qquad \gamma_2 = 0.$$