Теория вероятностей и статистика

Тема 4. Непрерывные случайные величины

Белов А.И.

Уральский федеральный университет

Екатеринбург, 2020

Аппроксимация непрерывной случайной величины дискретной

Пусть X — непрерывная случайная величина, которая принимает значения на промежутке $[a, b]$.
Разобьем этот промежуток на n частей $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Аппроксимируем X дискретной случайной величиной $\widetilde{X}_n$:
для $\omega \in \Omega$ если $x_{k-1} < X(\omega) \leqslant x_k$, то $\widetilde{X}_n(\omega) = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$
и если $X(\omega) = a$, то $\widetilde{X}_n(\omega) = X(x_1)$.

Случайная величина $\widetilde{X}_n$ распределена по закону

$\widetilde{X}_n$	x_1	$\cdots$	x_n
P	p_1	$\cdots$	p_n

Подход к математическому ожиданию непрерывной случайной величины

Используя теорему Лагранжа о среднем получим

$$p_k = P(x_{k-1} < X \leqslant x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)\Delta x_k = f(c_k)\Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$.
Следовательно,

$$M(\widetilde{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k f(c_k)\Delta x_k.$$

Это интегральная сумма. В пределе при $n \to \infty$ так, что $\max \Delta x_k \to 0$ получим $\widetilde{X}_n \to X$.

$$M(X) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} M(\widetilde{X}_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} x_k f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Определение

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. *Математическим ожиданием X* называется число

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

если этот несобственный интеграл сходится. В противном случае говорят, что X не имеет математического ожидания.

Свойства математического ожидания сохраняются и для непрерывной случайной величины.

Дисперсия непрерывной случайной величины

Определение

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$ и математическим ожиданием $M(X)$. *Дисперсией случайной величины* X называется число

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)\, dx,$$

если этот несобственный интеграл сходится. В противном случае говорят, что X не имеет дисперсии.

Свойства дисперсии сохраняются и непрерывной случайной величины.

Дисперсия и среднее квадратическое непрерывной случайной величины

Формула вычисления дисперсии справедлива и в непрерывном случае

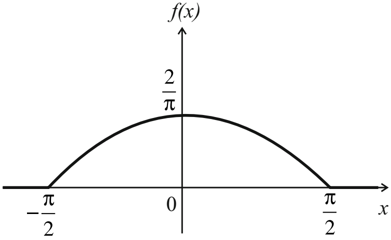
$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(X))^2\,.$$

Определение среднего квадратического отклонения не изменится в непрерывном случае

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, имеющей в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ плотность распределения $\frac{2}{\pi}\cos^2 x$ и нулевую плотность распределения вне этого интервала.



Решение

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{2}{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x\,dx = 0$$ как определенный интеграл от нечетной функции
по симметричному относительно нуля промежутку.

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(X))^2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x\,dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 + \cos 2x)\,dx =$$

Решение (окончание)

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \cos 2x\,dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x^2}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin 2x\,dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\substack{\parallel \\ 0}}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \approx 0{,}322\ .\ \sigma(X) \approx 0{,}568.$$

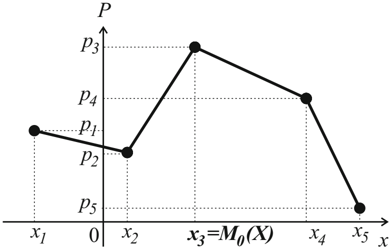
Мода дискретной случайной величины

Определение

Пусть X — дискретная случайная величина, распределённая по закону

X	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	$\cdots$	p_k	$\cdots$

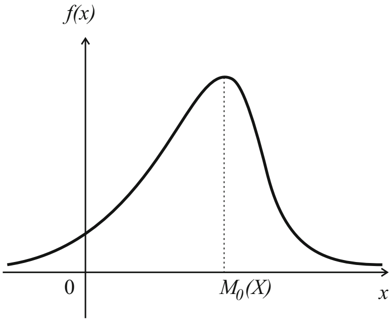
Число $M_0(X)$ называется модой, если $P(X = M_0(X)) = \max_k p_k$.



Мода непрерывной случайной величины

Определение

Пусть X — непрерывная случайная величина. Модой $M_0(X)$ называется точка локального максимума $f(x)$.
Если если точка максимума единственная, то X называют унимодальной.

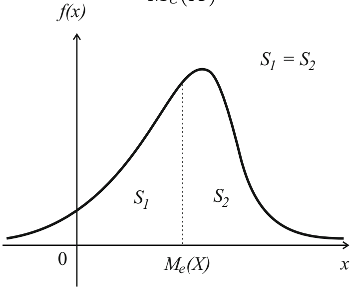


Медиана

Определение

Медианой непрерывной случайная величины X называется число $M_e(X)$ такое, что $P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = 0{,}5.$

$$\int\limits_{-\infty}^{M_e(X)} f(x)\,dx = \int\limits_{M_e(X)}^{+\infty} f(x)\,dx = 0{,}5.$$

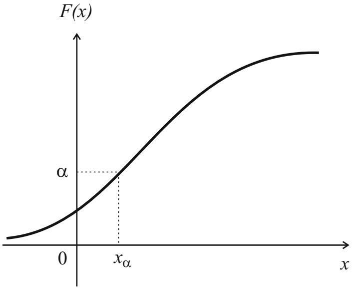


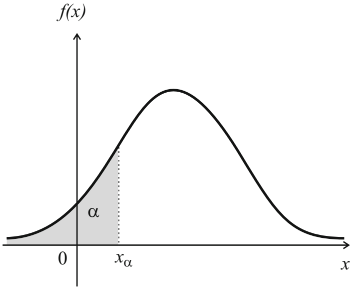
Квантили

Определение

Рассмотрим число α такое, что $0 < \alpha < 1$. Число x_α называют α-квантилью случайной величины X, если $P(X < x_\alpha) \leqslant \alpha$ и $P(X \geqslant x_\alpha) \leqslant 1 - \alpha$.

Если X — непрерывная случайная величина, то x_α — это решение уравнения $F(x_\alpha) = \alpha$, которое всегда имеет решение.





Начальные моменты k-го порядка

Определение

Пусть X — случайная величина. Начальным моментом k-го порядка X называется число

$$\nu_k = M\left(X^k\right).$$

Дискретный случай

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i$$

Непрерывный случай

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx$$

$$\nu_0 = 1 \qquad \nu_1 = M(X)$$

Центральные моменты k-го порядка

Определение

Пусть X — случайная величина. Центральным моментом k-го порядка X называется число

$$\mu_k = M\left(X - M(X)\right)^k.$$

Дискретный случай

$$\mu_k = \sum_i (x_i - M(X))^k p_i.$$

Непрерывный случай

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x)\, dx.$$

$$\mu_0 = 1 \qquad \mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = D(X)$$

Соотношения для моментов k-го порядка

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

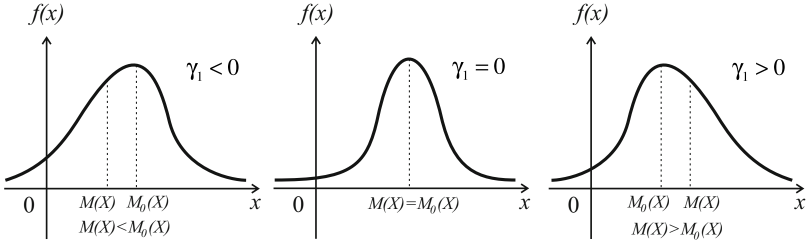
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

Асимметрия

Определение

Пусть X — случайная величина, имеющая начальные и центральные моменты до 3-го порядка включительно, и $\sigma = \sigma(X)$. Коэффициентом асимметрии X называется число

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$



Эксцесс

Определение

Пусть X — случайная величина, имеющая начальные и центральные моменты до 4-го порядка включительно, и $\sigma = \sigma(X)$. Коэффициентом эксцесса X называется число
$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$