Теория вероятностей и статистика

Тема 4. Непрерывные случайные величины

Белов А.И.

Уральский федеральный университет

Екатеринбург, 2020

Функция распределения

Пусть X – произвольная случайная величина. Согласно определению

$$A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x\} \in S,$$

т. е. можно вычислить вероятность $P(A_x)$, которая будет являться функцией от x.

Определение

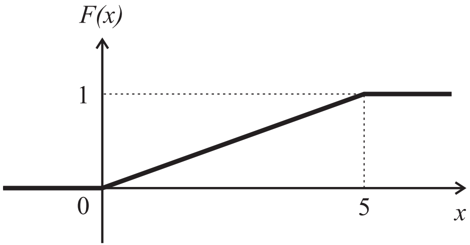
Функцией распределения случайной величины X называется функция

$$F(x) = P(A_x) = P(X < x).$$

Пример функции распределения

Производится взвешивание на весах с ценой деления 10 г. Случайная величина X — ошибка округления до ближайшего деления весов (то есть абсолютная величина разности истинного и измеренного значений).

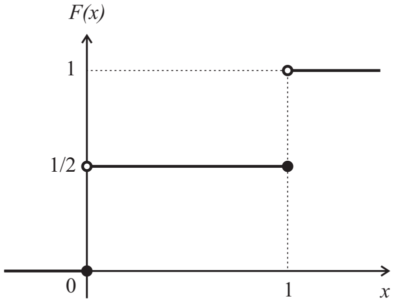
$$A_x = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x \leqslant 0; \\ [0, \mathsf{x}), & \text{если } 0 < x \leqslant 5; \\ \Omega = [0,\ 5], & \text{если } x > 5. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \frac{x}{5}, & \text{если } 0 < x \leqslant 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$



Пример функции распределения дискретной случайной величины

Бросается монета. Случайная величина X — число выпавших орлов.
$\Omega = \{«\text{О}», «\text{Р}»\}$.

$$A_x = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \{«\text{Р}»\}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ \Omega, & \text{если } x > 1. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$



Функция распределения дискретной случайной величины

Теорема

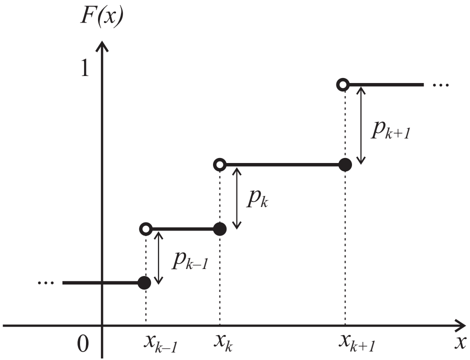
Функция распределения дискретной случайной величины X, распределённой по закону

X	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\cdots$
P	$\cdots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\cdots$

(где $\ldots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \ldots$), является ступенчатой функцией. Она имеет постоянные значения на промежутках $(x_k, x_{k+1}]$ и неустранимые разрывы 1-го рода в точках x_k, причём её значение возрастает при переходе через x_k на величину p_k.

Без доказательства. $\square$

График функции распределения дискретной случайной величины



Свойства функции распределения

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
2. если $a < b$, то $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$;
3. $F(x)$ — неубывающая функция;
4. $F(x)$ непрерывна слева, т. е. для любого $a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$;
5. $P(X = a)$ равна скачку $F(x)$ в точке a: $P(X = a) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x) - F(a)$, в частности, если $F(x)$ непрерывна в точке a, то $P(X = a) = 0$;
6. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Непрерывная случайная величина

Определение

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ является непрерывной кусочно-гладкой функцией.

Кусочно-гладкая: существуют такие $\ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots$, что

$$F(x) = \begin{cases} \ldots \\ F_k(x), & \text{где } x_{k-1} < x \leqslant x_k; \\ \ldots \end{cases}$$

где все $F_k(x)$ — гладкие (имеют непрерывную производную).

Из непрерывности $F(x)$ следует, что $\forall k \quad F_k(x_k) = F_{k+1}(x_k)$.

Плотность распределения

Определение

Пусть X — непрерывная случайная величина, а $F(x)$ — ее функция распределения.

Плотностью распределения вероятностей X называется функция

$$f(x) = F'(x).$$

$P(x < X < x + \Delta x)$ — вес интервала $(x, x + \Delta x)$.

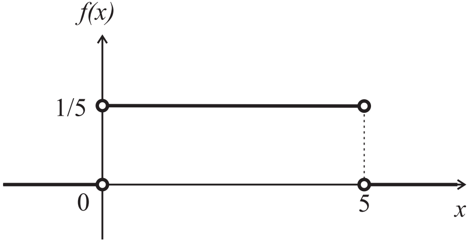
$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

Пример плотности распределения

X — ошибка округления при взвешивании — непрерывная случайная величина.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \frac{x}{5}, & \text{если } 0 < x \leqslant 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{если } 0 < x < 5; \\ 0, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$



Свойства плотности распределения

1. $f(x) \geqslant 0$;
2. $P(a \leqslant X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$;
3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.