Среднее значение

Предположим, что X — конечная случайная величина, распределённая по закону

X	x_1	$\cdots$	x_n
P	p_1	$\cdots$	p_n

Проведем серию из N независимых экспериментов.
Пусть X приняла значение x_i ровно k_i раз
$(i = 1, \ldots, n;\ k_1 + \ldots + k_n = N)$.

Среднее значение $\overline{X}$ случайной величины X:

$$\overline{X} = \frac{x_1 k_1 + \ldots + x_n k_n}{N} = x_1 \frac{k_1}{N} + \ldots + x_n \frac{k_n}{N}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{X} = x_1 \lim_{N\to\infty} \frac{k_1}{N} + \ldots + x_n \lim_{N\to\infty} \frac{k_n}{N} = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$$

Математическое ожидание

Определение

Пусть X — дискретная случайная величина, распределенная по закону

X	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	$\cdots$	p_k	$\cdots$

Число

$$M(X) = \sum_k x_k p_k$$

называется математическим ожиданием X, если сумма существует и конечна. В противном случае считается, что X не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание конечной случайной величины

Если X — конечная случайная величина, то

$$\boxed{M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k}$$

Пример

В урне 10 шаров, из которых 6 белых и 4 черных. Наудачу вынимаются 3 шара. Случайная величина X — число вынутых белых шаров.

Закон распределения X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1{,}8.$

Пример дискретной случайной величины, не имеющей математического ожидания

Пусть X распределена по закону

X	2	4	$\cdots$	2^k	$\cdots$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^k}$	$\cdots$

Сумма вероятностей $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$

Ряд $\displaystyle\sum_{k} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \cdot \frac{1}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится.

X не имеет математического ожидания.

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, где C — постоянная величина.
2. Если $X \geqslant 0$, то $M(X) \geqslant 0$.
3. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где C — постоянная величина.
4. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
5. Если X и Y — независимы, то $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Свойства математического ожидания доказываются непосредственными выкладками с суммами (рядами).

Дисперсия

Если X — случайная величина, то отклонение $X - M(X)$ тоже случайная величина.
Но $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$.

Для характеристики разброса используют квадрат отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Определение

Пусть X — дискретная случайная величина, имеющая математическое ожидание $M(X)$.

Дисперсией случайной величины X называется

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2,$$

если это математическое ожидание существует.

Формула для вычисления дисперсии

Теорема

Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом ее математического ожидания

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

Доказательство.

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = M\left(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X) \qquad \square$$

Свойства дисперсии

1. $D(X) \geqslant 0$, причем $D(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = C$ — постоянная величина.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$, где C — постоянная величина.
3. $D(X + C) = D(X)$, где C — постоянная величина.
4. Если X и Y — независимые случайные величины, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Свойства доказываются непосредственными выкладками с применением свойств математического ожидания.

Пример

В урне 10 шаров, из которых 6 белых и 4 черных. Наудачу вынимаются 3 шара. Случайная величина X — число вынутых белых шаров.

X распределена по закону

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1{,}8$

X^2 распределена по закону

X^2	0	1	4	9
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$M(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}8.$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 3{,}8 - 1{,}8^2 = 0{,}56.$

Среднее квадратическое отклонение

Определение

Пусть случайная величина X имеет дисперсию $D(X)$.
Число
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$
называется средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Числовые характеристики распределения Бернулли

Закон распределения Бернулли

X	0	1
P	q	p

$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$

X^2 распределена также, как и X, поэтому $M(X^2) = p$.

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$

$$\boxed{M(X) = p; \quad D(X) = pq; \quad \sigma(X) = \sqrt{pq}}$$

Числовые характеристики биномиального распределения

Пусть X — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n и p.

Обозначим через X_i число успехов в i-м испытании.

X_i имеет распределение Бернулли и $X = X_1 + \ldots + X_n$.

$$M(X) = M(X_1 + \ldots + X_n) = M(X_1) + \ldots + M(X_n) = \\ = \underbrace{p + \ldots + p}_{n} = np$$

$$D(X) = D(X_1 + \ldots + X_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n) = \\ = \underbrace{pq + \ldots + pq}_{n} = npq$$

$$\boxed{M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}}$$

Числовые характеристики геометрического распределения

Закон геометрического распределения

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	p	pq	$\cdots$	pq^{k-1}	$\cdots$

Числовые характеристики (без доказательства):

$$\boxed{M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}}$$

Числовые характеристики гипергеометрического распределения

Гипергеометрическое распределение с параметрами N, D, n

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n},$$

где $\max\{0, n - N + D\} \leqslant k \leqslant \min\{n, D\}$.

Числовые характеристики (без доказательства):

$$\boxed{M(X) = \frac{nD}{N}; \quad D(X) = \frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)};}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{nD(N-D)(N-n)}{N-1}}}$$

Числовые характеристики распределения Пуассона

Закон распределения Пуассона

X	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\cdots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\cdots$

Числовые характеристики (без доказательства):

$$\boxed{M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda; \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$$

Среднее арифметическое одинаково распределенных независимых случайных величин

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — одинаково распределенные независимые случайные величины. $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2 \quad (i = 1, \ldots, n)$.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(M(X_1) + \ldots + M(X_n)) = \frac{1}{n} \cdot na = a$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D(X_1) + \ldots + D(X_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\overline{X}) = 0$$