Теория вероятностей и статистика

Тема 3. Дискретные случайные величины

Белов А.И.

Уральский федеральный университет

Екатеринбург, 2020

Примеры случайных величин

- Бросается игральная кость. X — число очков, выпавшее на верхней грани. Множество значений X — $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- В урне 10 шаров, из которых 6 белых и 4 черных. Наудачу вынимаются 3 шара. X — число вынутых белых шаров. Множество значений X — $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Бросается игральная кость до тех пор, пока не выпадет «шестерка». X — число произведенных бросков. Множество значений X — $\{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$.
- Производится взвешивание на весах с ценой деления 10 г. X — ошибка округления до ближайшего деления весов (абсолютная величина разности истинного и измеренного значений). Множество значений X — промежуток $[0; 5]$.

Определение случайной величины

Определение

Пусть $\langle \Omega, S, P \rangle$ — вероятностное пространство.
Функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной,
если для любого $x \in \mathbb{R}$

$$A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x\} \in S.$$

Пример случайной величины и ее множеств A_x

$$A_x = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x\}$$

Бросается монета.
Случайная величина X — число выпавших орлов.

$\{0, 1\}$ — множество значений X.

$\Omega = \{$«орел»$,$ «решка»$\}$.

$$A_x = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \{\text{«решка»}\}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ \Omega, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Действия над случайными величинами

Определение

Пусть X случайная величина такая, что $X : \Omega \to \mathbb{R}$,
а ψ — функция действительного аргумента ($\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
Определим случайную величину $\psi(X)$ по правилу $\psi(X)(\omega) = \psi(X(\omega))$ для любого $\omega \in \Omega$.

Если Y — еще одна случайная величина такая, что $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, то определим сумму $X + Y$ по правилу $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$
и произведение XY случайных величин X и Y по правилу $(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$.

Независимость случайных величин

Определение

Случайные величины X и Y назовем независимыми, если для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого $y \in \mathbb{R}$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы, т. е. если X и Y принимают свои значения независимо друг от друга.

Пример

Бросаются две игральные кости.
X – число очков, выпавшее на первой кости.
Y – число очков, выпавшее на второй кости.
Очевидно, что X и Y независимы.

Дискретные случайные величины

Определение

Случайная величина называется *дискретной*, если ее множество значений конечно или счетно.

Случайная величина с конечным множеством значений называется *конечной*.

- X — число очков, выпавшее на брошенной игральной кости. X — конечная случайная величина.
- X — число вытащенных белых шаров при вытаскивании трех шаров из урны. X — конечная случайная величина.
- X — число бросков игральной кости до тех пор, пока не выпадет "шестерка". X — дискретная (но не конечная) случайная величина.
- X — ошибка округления при взвешивании на весах с ценой деления 10 г. X не является дискретной случайной величиной.

Значения дискретной случайной величины

Пусть X — дискретная случайная величина.

Упорядочим ее значения по возрастанию:

$$\ldots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \ldots .$$

Если x_k не является наибольшим значением, то
$\{X = x_k\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_k\} = A_{x_{k+1}} \setminus A_{x_k} \in S$.

Если же x_k — наибольшее значение X, то $\{X = x_k\} = \Omega \setminus A_{x_k} \in S$.

В любом случае $\{X = x_k\}$ — это событие.

Обозначим

$$P(\{X = x_k\}) = P(X = x_k) = p_k.$$

Закон распределения

Определение

Пусть X - дискретная случайная величина. Таблица

X	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\cdots$
P	$\cdots$	p_{k-1}	p_k	p_{k+1}	$\cdots$

называется законом распределения случайной величины X.

В частности, для конечной случайной величины

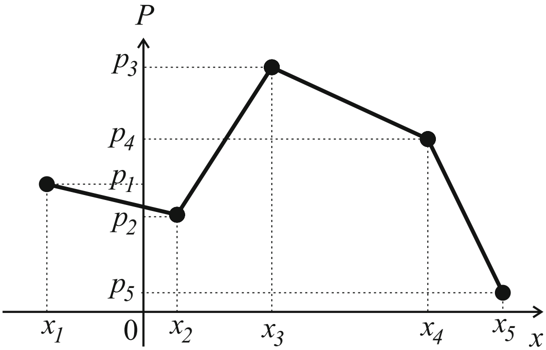
X	x_1	$\cdots$	x_n
P	p_1	$\cdots$	p_n

Т. к. $\Omega = \sum\limits_k \{X = x_k\}$ и слагаемые несовместны, то

$$\sum_k p_k = 1.$$

Полигон частот

Графическим представлением закона распределения дискретной случайной величины является полигон частот — ломаная линия, соединяющая точки (x_k, p_k).



Пример: число очков на игральной кости

Бросается игральная кость.
Случайная величина X — число очков, выпавшее на верхней грани.

X имеет 6 равновероятных значений $1, 2, \ldots, 6$.

Закон распределения X:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Пример: число вынутых белых шаров

В урне 10 шаров, из которых 6 белых и 4 черных.
Наудачу вынимаются 3 шара.
Случайная величина X — число вынутых белых шаров.

Элементарный исход — вытащенные три шара.
Общее число исходов $N = C_{10}^3 = 120$.
Пусть m_k — число благоприятствующих исходов для $\{X = k\}$
$m_0 = C_6^0 \cdot C_4^3 = 4$; $P(X = 0) = \frac{m_0}{N} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.
$m_1 = C_6^1 \cdot C_4^2 = 36$; $P(X = 1) = \frac{m_1}{N} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.
$m_2 = C_6^2 \cdot C_4^1 = 60$; $P(X = 2) = \frac{m_2}{N} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.
$m_3 = C_6^3 \cdot C_4^0 = 20$; $P(X = 3) = \frac{m_3}{N} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.
Закон распределения X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Пример: число бросков до появления успеха

Бросается игральная кость до тех пор, пока не выпадет «шестерка». Случайная величина X — число произведенных бросков.

Если $X = k$, то это означает, что на k-ом броске выпала «шестерка», а в предыдущие $k-1$ бросок не выпала.

Т. к. броски независимы, то $P(X = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

Закон распределения X:

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$	$\cdots$

Распределение Бернулли

Пусть проводится одно испытание с вероятностью успеха p (и вероятностью неудачи $q = 1 - p$).

Случайная величина X — число успехов в одном испытании.

Говорят, что X имеет распределение Бернулли.

Закон распределения Бернулли:

X	0	1
P	q	p

Очевидно $q + p = 1$.

Биномиальное распределение

Пусть имеется схема Бернулли с параметрами n, p.

Случайная величина X — число успехов в серии n одинаковых независимых испытаний.

Говорят, что X имеет биномиальное распределение.

По формуле Бернулли $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Закон биномиального распределения:

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\cdots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\cdots$	p^n

Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$

Геометрическое распределение

Пусть мы проводим серию одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p (и вероятностью неудачи $q = 1 - p$)
до появления первого успеха.

Случайная величина X — число проведенных испытаний.

Говорят, что X имеет геометрическое распределение.

$P(X = k) = pq^{k-1}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Закон геометрического распределения:

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	p	pq	$\cdots$	pq^{k-1}	$\cdots$

$$p + pq + \ldots pq^{k-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1$$

Гипергеометрическое распределение

Пусть N - число элементов некоторого конечного множества, среди которых D элементов обладают некоторым свойством $(0 \leqslant D \leqslant N)$. Предположим что мы наудачу выбрали n элементов из этого множества $(0 \leqslant n \leqslant N)$.

Случайная величина X — число выбранных элементов, обладающих указанным свойством.

Говорят, что X имеет гипергеометрическое распределение.

Пусть k — число выбранных предметов с указанным свойством.

$\max\{0, n - N + D\} \leqslant k \leqslant \min\{n, D\}$

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Распределение Пуассона

Пусть имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайная величина X — число событий потока, произошедшие за промежуток времени длиной $t = 1$.
Говорят, что X имеет распределение Пуассона.

По теореме о простейшем потоке событий

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots .$$

Закон распределения Пуассона:

X	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\cdots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\cdots$

Имеем $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$