Теория вероятностей и статистика

Тема 1. Случайные события

Белов А.И.

Уральский федеральный университет

Екатеринбург, 2020

Эксперимент со случайными исходами

Определение

Если при одних и тех же условиях проведения исход эксперимента не определен однозначно, то такой эксперимент называется экспериментом со случайными исходами.

Определение

Событие называется случайным, если оно может произойти, а может не произойти в результате проведения эксперимента

Частота появления события

Предположим, что мы наблюдаем за появлением случайного события A. Пусть также в n экспериментах событие A произошло $k(A)$ раз.

Определение

Частотой появления события (статистической вероятностью) называется число

$$\overline{P}_n(A) = \frac{k(A)}{n}.$$

Очевидно, что $0 \leq \overline{P}_n(A) = \frac{k(A)}{n} \leq 1$.
Экспериментально было обнаружено явление стабилизации частоты появления события: $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{P}_n(A) = p$,
Значит событие имеет некую числовую характеристику p.
Её назвали вероятностью события.

Требования к экспериментам

Теория вероятностей рассматривает только те эксперименты, которые удовлетворяют следующим требованиям:

- неоднозначность исхода эксперимента;
- возможность проведения эксперимента при одних и тех же условиях сколь угодно большое число раз;
- стабилизация частоты появления событий.

К каким экспериментам применимо классическое определение вероятности?

Рассматриваются эксперименты, удовлетворяющие следующим условиям:

1. конечное число исходов;
2. равновозможность исходов.

Определение

Исход эксперимента называется благоприятствующим событию A, если событие A наступает в результате реализации этого исхода.

Классическое определение вероятности

Определение

Пусть эксперимент имеет конечное число N равновозможных исходов. Если A — случайное событие, а $m(A)$ — число благоприятствующих событию A исходов, то вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{m(A)}{N}$$

Примеры

- *Бросание монеты.*

  A — «монета упала вверх решкой».

  $N = 2$, $m(A) = 1$, $P(A) = \frac{1}{2}$

- *Бросание двух игральных костей.*

  A — «сумма выпавших очков четна»,

  B — «произведение выпавших очков четно».

  $N = 6 \cdot 6 = 36$

  $m(A) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$, $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

  $m(B) = 36 - 3 \cdot 3 = 27$, $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

Перестановки

Определение

Перестановкой из n элементов называется *упорядоченный набор* $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ из различных элементов n-элементного множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, т. е. $a_{i_j} \neq a_{i_k}$ при $j \neq k$.

Теорема

Число различных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!$$

Задача о расстановке книг

Десять различных книг, среди которых есть двухтомник
М. Ю. Лермнотова, расставлены на полке случайным образом. Найти вероятность того, что оба тома двухтомника окажутся рядом в нужном порядке.

$$N = 10!$$

$$m(A) = 8! \cdot 9 = 9!$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{N} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

Сочетания

Определение

Сочетанием из n по k называется *неупорядоченный набор* $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ из k различных элементов n-элементного множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

По сути сочетание — это k-элементное подмножество n-элементного множества.

Теорема

Число различных сочетаний из n по k равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вытаскивание двух карт

Из перетасованной колоды в 52 листа (4 масти по 13 карт от двойки до туза в каждой масти) наудачу вытаскиваются 2 карты. Найти вероятность следующих событий:

A — «обе карты одной масти»,

B — «обе карты одного значения».

$N = C_{52}^2 = 1326.$

$m(A) = C_{13}^2 \cdot 4 = 312.$
$P(A) = \frac{312}{1326} = \frac{4}{17}.$

$m(B) = C_4^2 \cdot 13 = 78$
$P(B) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}.$

Размещения

Определение

Размещением из n по k называется *упорядоченный набор* $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ из k различных элементов n-элементного множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Теорема

Число различных размещений из n по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Очевидно, что $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Последовательное вытаскивание трех карт

В повести А. С. Пушкина «Пиковая дама» Германн играл в штосс (или классический фараон). В этой игре из перетасованной колоды в 52 листа последовательно открываются карты сверху колоды. Какова вероятность того, что первыми выйдут тройка, семерка, туз?

$$N = A_{52}^{3} = \frac{52!}{49!} = 132600$$

$$m(A) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{N} = \frac{64}{132600} = \frac{8}{16575} \approx 0{,}0005$$

Перестановки с повторениями

Определение

Пусть n_1 — число элементов 1-го типа, n_2 — число элементов 2-го типа, ..., n_k — число элементов k-го типа, и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Перестановкой с повторениями называется *упорядоченный набор* этих элементов.

Теорема

Число различных перестановок с повторениями этих элементов равно

$$\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Ещё одна задача о расстановке книг

Библиотекарю нужно поставить на полку 4 экземпляра трёхтомника А. С. Пушкина. Какова вероятность того, что при случайной расстановке книги окажутся в нужно порядке,
т. е. 1 т., 2 т., 3 т., 1 т., 2 т. и так далее?

$$N = \overline{P}(4,4,4) = \frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!} = \frac{479001600}{13824} = 34650$$

$$m(A) = 4^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 = 13824$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{N} = \frac{13824}{34650} = \frac{768}{1925} \approx 0{,}399$$

Сочетания с повторениями

Определение

Сочетанием с повторениями из n по k называется *неупорядоченный набор* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ k элементов, взятых из n различных типов.

Теорема

Число различных сочетаний с повторениями из n по k равно

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Очевидно, что $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Задача о цветных шариках

В коробке лежит много шариков красного, синего, желтого и зеленого цветов. Ребенок наудачу выбрал 5 шариков. Какова вероятность, что среди них ровно 2 красных?

$$N = \overline{C}_4^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

$$m(A) = \overline{C}_3^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{N} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28} \approx 0{,}179$$

Размещения с повторениями

Определение

Размещением с повторениями из n по k называется *упорядоченный набор* $(a_1, \ldots, a_k)$ из k элементов, взятых из n различных типов.

Теорема

Число различных размещений с повторениями из n по k равно

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

По сути размещение с повторениями — элемент k-й декартовой степени n-элементного множества.

Задача о двоичных последовательностях

Какова вероятность, что в случайно взятой двоичной последовательности длиной 1 байт окажется ровно 4 единицы?

$$N = \overline{A}_2^8 = 2^8 = 256$$

$$m(A) = \overline{P}(4,4) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{40320}{546} = 70$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{N} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} \approx 0{,}273$$

К каким экспериментам применимо геометрическое определение вероятности?

Оно позволяет вычислять вероятности событий в некоторых экспериментах с бесконечным числом равновозможных исходов.

Пусть исход эксперимента выражен некоторым набором чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим исход как точку в пространстве $\mathbb{R}^n$ с этими координатами.

Пусть μ — функция меры в $\mathbb{R}^n$ ($n = 1$ — длина, $n = 2$ — площадь, $n = 3$ — объем).

Пусть Ω — множество всех исходов эксперимента,
A — множество исходов, благоприятствующих событию A.

Геометрическое определение вероятности

Определение

Пусть Ω и A — измеримые множества конечной меры, причем $\mu(\Omega) \neq 0$.
Вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Задача о встрече

Двое людей договорились встретиться в течение определенного часа, причем тот, кто придет на место встречи раньше другого, будет ждать не более 15 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Решение

x — время прихода одного

y — время прихода второго

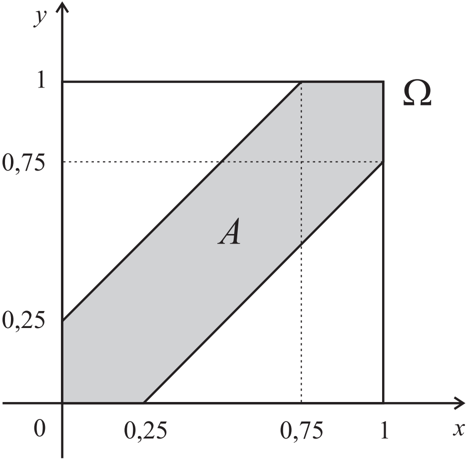
$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq\ 1\}$.

Если первый придет раньше ($x \leq y$), то и встреча состоится, когда $y \leq x + 0{,}25$.

Если второй придет раньше ($y \leq x$), то встреча состоится, когда $x \leq y + 0{,}25$.

$A = \{(x, y) | x \leq y \leq x + 0{,}25$ или $y \leq x \leq y + 0{,}25\}$.

Решение задачи о встрече



$$\mu(\Omega) = 1$$

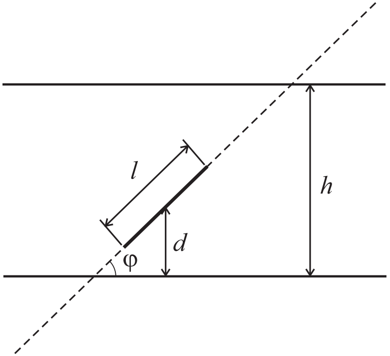
$$\mu(A) = 1 - \tfrac{9}{16} = \tfrac{7}{16}$$

$$P(A) = \tfrac{7}{16} : 1 = \tfrac{7}{16}$$

Задача Бюффона

На бесконечной плоскости нарисована сетка параллельных прямых с шагом h. На эту плоскость произвольно бросается отрезок длины ℓ, где $\ell < h$. Какова вероятность того, что отрезок пересечет одну из линий сетки?

Решение

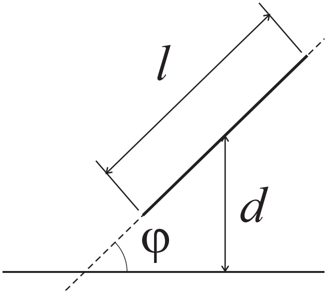


d —расстояние от центра отрезка до ближайшей линии сетки ($0 \leq d \leq \frac{h}{2}$)

φ — угол между отрезком и линиями сетки ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$)

Решение задачи Бюффона

$$\Omega = \{(\varphi, d) \mid 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}; 0 \le d \le \tfrac{h}{2}\}$$



Длина гипотенузы равна $\dfrac{d}{\sin\varphi}$.

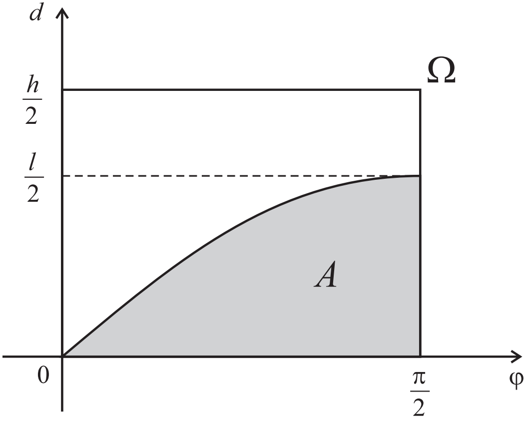
Игла пересечёт линию сетки при

$$\frac{d}{\sin\varphi} \le \frac{\ell}{2}$$

$$0 \le d \le \frac{\ell}{2}\sin\varphi$$

$$A = \{(\varphi, d) \mid 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2};\ 0 \le d \le \tfrac{l}{2}\sin\varphi\}$$

Решение задачи Бюффона



$$\mu(\Omega) = \frac{\pi h}{4}$$

$$\mu(A) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ell}{2} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{\ell}{2} \cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\ell}{2}$$

$$P(A) = \frac{\ell}{2} : \frac{\pi h}{4} = \frac{2\ell}{\pi h}$$

Вероятностное пространство

Аксиоматика теории вероятностей была предложена А.Н. Колмогоровым в 1929 г. в работе «Общая теория меры и исчисление вероятностей».

$\langle \Omega, S, P \rangle$ — вероятностное пространство.

- $\Omega \neq \varnothing$ — множество элементарных исходов.
- $S \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$ — алгебра событий.
  Элементы S рассматриваются как случайные события. Если в результате проведения эксперимента реализовался исход $\omega \in \Omega$,то считается что событие A произошло, если $\omega \in A$, и не произошло, если $\omega \notin A$.

Требования к алгебре событий

Множество S должно удовлетворять следующим двум условиям:

- S замкнуто относительно операций $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ (если $A, B \in S$, то $A \cup B \in S$, $A \cap B \in S$ и $A \setminus B \in S$);
- $\Omega \in S$.

Определение

Событие Ω называется достоверным событием.

Заметим, что $\varnothing \in S$, т.к. $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$.

Определение

Событие $\varnothing$ называется невозможным событием.

Функция вероятности

$P : S \to \mathbb{R}$ — функция вероятности.
Функция P должна удовлетворять следующим требованиям:

- $P(A) \geq 0$;
- $P(\Omega) = 1$;
- если $A, B \in S$ такие, что $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Определение

События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно, т. е. если $A \cap B = \varnothing$.

Определение

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A, т. е. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Следствия аксиом теории вероятностей

1. Если $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны, то $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(\varnothing) = 0$.
4. Для любого события A выполняется $P(A) \leq 1$.

Примеры вероятностных пространств

- *Классическое определение вероятности.*
  Ω — произвольное конечное непустое множество, $S = \mathcal{B}(\Omega)$. Если $A \in S$, то
  $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

- *Геометрическое определение вероятности.*
  Ω — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$ конечной ненулевой меры, S — множество всех измеримых подмножеств множества Ω. Если $A \in S$, то
  $$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Сумма событий

Определение

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит A или происходит B, т. е. $A + B = A \cup B$.

1. $A + B = B + A$ (коммутативность);
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность);
3. $A + \varnothing = A$;
4. $A + \Omega = \Omega$.

Пример суммы событий

Бросаются две игральных кости.

Событие A — «на первой кости выпало четное число очков».

Событие B — «на второй кости выпало четное число очков».

Событие C — «произведение выпавших очков четно».

Событие C произойдет тогда и только тогда, когда произойдет A или произойдет B:

$$C = A + B$$

Произведение событий

Определение

Произведением AB событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит A и одновременно происходит B, т. е. $AB = A \cap B$.

1. $AB = BA$ (коммутативность);
2. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность);
3. $A \cdot \varnothing = \varnothing$;
4. $A\Omega = A$;
5. $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность произведения относительно суммы);
6. $A + BC = (A + B)(A + C)$ (дистрибутивность суммы относительно произведения);

Пример произведений событий

Бросаются две игральных кости.

Событие A — «на первой кости выпало четное число очков».

Событие B — «на первой кости выпало нечетное число очков».

Событие C — «на второй кости выпало четное число очков».

Событие D — «на второй кости выпало нечетное число очков».

Событие E — «сумма выпавших очков четна».

Событие E произойдет тогда и только тогда, когда произойдет A одновременно с C или произойдет B одновременно с D:

$$E = AC + BD$$

Противоположное событие

Определение

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A, т. е. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $A + \overline{A} = \Omega$;
3. $A\,\overline{A} = \varnothing$;
4. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$;
5. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Свойства 4 и 5 — законы де Моргана для множеств.

Пример противоположных событий

Бросаются две игральных кости.

Событие A — «на первой кости выпало четное число очков».

Событие B — «на первой кости выпало нечетное число очков».

Событие C — «на второй кости выпало четное число очков».

Событие D — «на второй кости выпало нечетное число очков».

Событие E — «сумма выпавших очков четна».

$$B = \overline{A}$$

$$D = \overline{C}$$

$$E = AC + \overline{A}\,\overline{C}$$

Теорема о вероятности суммы двух событий

Теорема

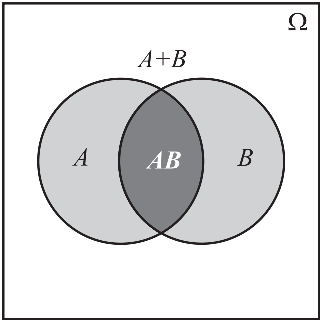
Пусть A и B — два случайных события. Тогда

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство.

Известный результат из теории множеств. $\square$

Геометрический смысл теоремы о вероятности суммы двух событий



μ — площадь фигуры

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(AB)$$

$$P(A+B) = \frac{\mu(A+B)}{\mu(\Omega)} =$$

$$= \frac{\mu(A) + \mu(B) - \mu(AB)}{\mu(\Omega)} =$$

$$= \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} + \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} - \frac{\mu(AB)}{\mu(\Omega)} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

Вероятность суммы трех событий

Следствие

$$P(A+B+C) =$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Доказательство.

Доказывается несложно повторным применением теоремы о вероятности суммы двух событий и свойств операций над событиями. $\square$

Условная вероятность

Определение

Пусть A и B — случайные события, причем $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью события A относительно B называется число

$$P(A\,|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

В этом случае B иногда называют условием и говорят о вероятности A при условии B.

В случае классического определения вероятности

$$P(A\,|B) = \frac{m(AB)}{m(B)} = \frac{m(AB)/N}{m(B)/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Свойства условной вероятности

1. Если $P(A) \neq 0$, то $P(A\,|A) = 1$.

2. Если $P(B) \neq 0$ и $B \subseteq A$ (событие A наступает всегда, если наступает B), то $P(A\,|B) = 1$.

3. Если $P(B) \neq 0$, то $P(\Omega\,|B) = 1$ и $P(\varnothing|B) = 0$.

4. Если события A и B несовместны и $P(C) \neq 0$, то $P(A + B\,|C) = P(A\,|C) + P(B\,|C)$.

Теорема о вероятности произведения двух событий

Теорема

Если $P(B) \neq 0$, *то*

$$P(AB) = P(A\,|B) \cdot P(B).$$

Доказательство.

Очевидно следует из определения условной вероятности. $\square$

Следствие (вероятность произведения нескольких событий)

$$P(A_1 \ldots A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Задача об экзамене

Пусть студент перед экзаменом выучил только один билет из n возможных (назовем этот билет счастливым).
Он рассуждает так: если я пойду сдавать первым, то очевидно вероятность вытащить счастливый билет равна $\frac{1}{n}$.
Если же я пойду в середине или в конце экзамена, то мой счастливый билет могут вытащить другие студенты.
С другой стороны, если его не вытащат, то билетов на столе экзаменатора будет меньше и мои шансы на успех повысятся.
Каким по порядку нужно заходить на экзамен чтобы вытащить счастливый билет с наибольшей вероятностью?

Решение задачи об экзамене

Пусть студент зайдет на экзамен под номером k.

B — «студенту попадется счастливый билет».

A_i — «i-й зашедший на экзамен вытащит счастливый билет».

$B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_{k-1}}\,A_k$.

$P(B) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_{k-1}}\,A_k) =$

$P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2}) \cdot \ldots P(\overline{A_{k-1}}|\overline{A_1}\ldots\overline{A_{k-2}}) \cdot P(A_k|\overline{A_1}\ldots\overline{A_{k-1}})$.

$P(\overline{A_1}) = \frac{n-1}{n}$

$P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = \frac{n-2}{n-1}$

$P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = \frac{n-3}{n-2}$

$\ldots$

$P(\overline{A_{k-1}}|\overline{A_1}\ldots\overline{A_{k-2}}) = \frac{n-k+1}{n-k+2}$

$P(A_k|\overline{A_1}\ldots\overline{A_{k-1}}) = \frac{1}{n-k+1}$

$$P(B) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Независимость событий

Определение

Говорят, что событие A не зависит от события B, если $P(A\,|\,B) = P(A)$.

- если A не зависит от B, то и B не зависит от A, то есть можно просто говорить, что события A и B независимы;
- A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(AB) = P(A)P(B)$.

Доказательство.

Если A не зависит от B, то по определению независимости $P(A\,|\,B) = P(A)$, но $P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, откуда $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, т. е. $P(AB) = P(A)P(B)$, значит $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B\,|\,A)$.

В обратную сторону — аналогично. $\square$

Независимость в совокупности

Определение

Говорят, что события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если любое их этих событий не зависит от произведения любого набора остальных.

Пример (попарно независимых, но зависимых в совокупности событий)

Пусть у нас имеются четыре внешне одинаковых карточки, на которых написаны числа 2, 3, 5 и 30. Наудачу извлекается одна карточка.

A — «число на карточке делится на 2»;
B — «число на карточке делится на 3»;
C — «число на карточке делится на 5».

Окончание примера

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$,
$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$.
Т. е. $P(AB) = P(A)P(B)$, а значит A и B независимы.

Аналогично независимы A и C, равно как B и C.
Тем самым тройка A, B, C является тройкой попарно независимых событий.

A наступает всякий раз, если наступили B и C
(вытащена карточка с числом 30),
т. е. $P(A \,|\, BC) = 1 \neq P(A)$.

Значит, A зависит от BC, и тройка событий A, B, C не является независимой в совокупности.

Вероятность произведения независимых в совокупности событий

Теорема

Если события $A_1, \ldots, A_n$ *независимы в совокупности, то*

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Доказательство.

Очевидно из следствия теоремы о вероятности произведения событий и определения событий независимых в совокупности. $\square$

Полный набор гипотез

Определение

Говорят, что события $H_1, \ldots H_n$ образуют полный набор гипотез (событий), если

- $H_i H_j = \varnothing$ для $i \neq j$ (эти события попарно несовместны);
- $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$ (их сумма — достоверное событие).

$P(H_1 + \ldots + H_n) = P(H_1) + \ldots + P(H_n)$
$P(H_1 + \ldots + H_n) = P(\Omega) = 1.$

Значит

$$P(H_1) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

На языке теории множеств полный набор гипотез — это разбиение множества Ω.

Формула полной вероятности

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть $H_1, \ldots H_n$ — полный набор гипотез. Тогда

$$P(A) = P(A\,|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|H_n)P(H_n).$$

Доказательство.

$$P(A) = P(A\Omega) = P\left(A(H_1 + \ldots + H_n)\right) = P(AH_1 + \ldots + AH_n) =$$

$$= P(AH_1) + \ldots + P(AH_n) = P(A\,|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|H_n)P(H_n). \qquad \square$$

Задача о двух урнах

Пусть имеются две одинаковые урны. В первой урне лежат два белых шара и один черный шар. Во второй лежат три белых и два черных. Наудачу выбирается урна, после чего из нее наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение

Пусть A — «вытащен белый шар».

H_1 — выбрана первая урна.

H_2 — выбрана вторая урна.

$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A\,|H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A\,|H_2) = \frac{3}{5}$.

$P(A) = P(A\,|H_1)P(H_1) + P(A\,|H_2)P(H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{30}$.

Формула Байеса (переоценка гипотез)

Теорема (формула Байеса)

Пусть $H_1, \ldots H_n$ *— полный набор гипотез. Тогда*

$$P(H_k|A) = \frac{P(A\,|H_k)P(H_k)}{P(A\,|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|H_n)P(H_n)}.$$

Доказательство.

$P(H_k|A) = \dfrac{P(H_kA)}{P(A)}$. $P(H_kA) = P(AH_k) = P(A\,|H_k)P(H_k)$.

$P(A) = P(A\,|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|H_n)P(H_n)$.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A\,|H_k)}{P(A\,|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A\,|H_n)P(H_n)}.$$

□

Ещё одна задача о двух урнах

Две одинаковые урны: в первой — два белых шара, один черный. Во второй — три белых, два черных. Наудачу выбирается урна, после чего из нее наудачу извлекается один шар.

Предположим, что в результате эксперимента вытащен белый шар. Какова вероятность, что он вытащен из первой урны?

Решение

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A\,|H_1)}{P(A\,|H_1)P(H_1) + P(A\,|H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{19}$$