Понятие тройного интеграла

Опр. Тройным интегралом называется

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j,k} f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

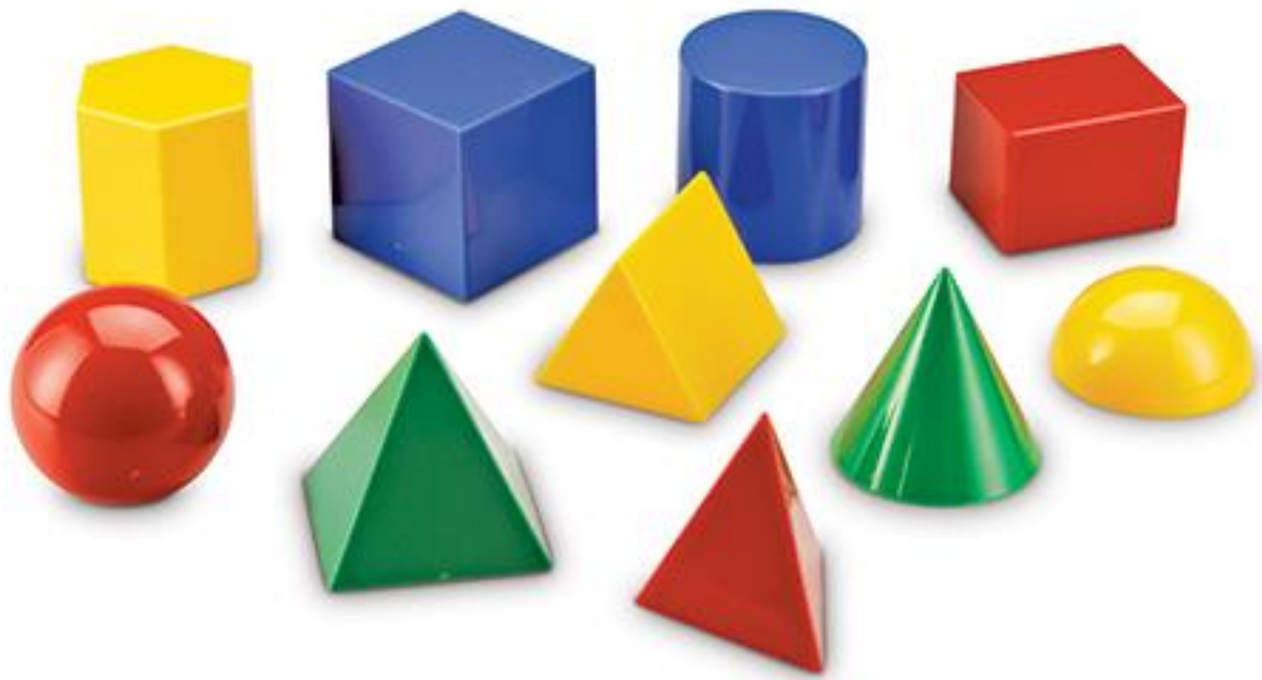
где $\lambda = \max_{i,j,k}\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k\}$

Теорема о существовании и свойства тройного интеграла

Теорема 1. Интеграл $\iiint_T f(x, y, z) dxdydz$ существует, если функция $z = f(x, y, z)$ **непрерывна** в трехмерной области **(теле)** T, ограниченной **кусочно-гладкой поверхностью** Γ_T.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла.

Примеры кусочно-гладких поверхностей



Этот слайд
можно не
конспектировать

Теорема о вычислении тройного интеграла (*I* способ)

Способ-
СПИЧКИ

Теорема 2. Пусть $\boldsymbol{T}$ − тело, ограниченное **цилиндрической поверхностью** $\boldsymbol{\Gamma_T}$:

1) образующие параллельны оси Oz;
2) снизу ограничено кусочно-гладкой поверхностью $\boldsymbol{z = z_1(x, y)}$;
3) сверху ограничено кусочно-гладкой поверхностью $\boldsymbol{z = z_2(x, y)}$;
4) проекция тела T на плоскость Oxy – область $\boldsymbol{D_{xy}}$.

Теорема о вычислении тройного интеграла (*I* способ)

Способ-
СПИЧКИ

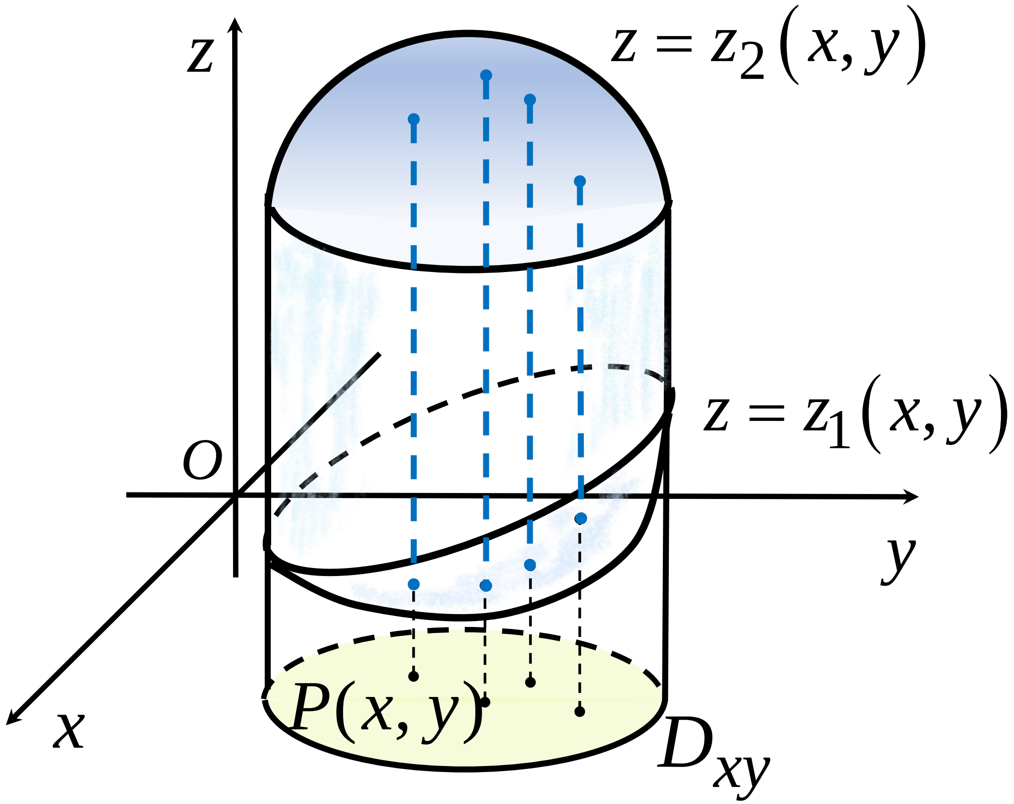
Тогда

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \\ &\qquad = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\end{aligned}}$$

(сначала одинарный, потом двойной)

Теорема о вычислении тройного интеграла (*I* способ)

Способ-
СПИЧКИ



Теорема о вычислении тройного интеграла (*II* способ)

Способ -СЛОИ

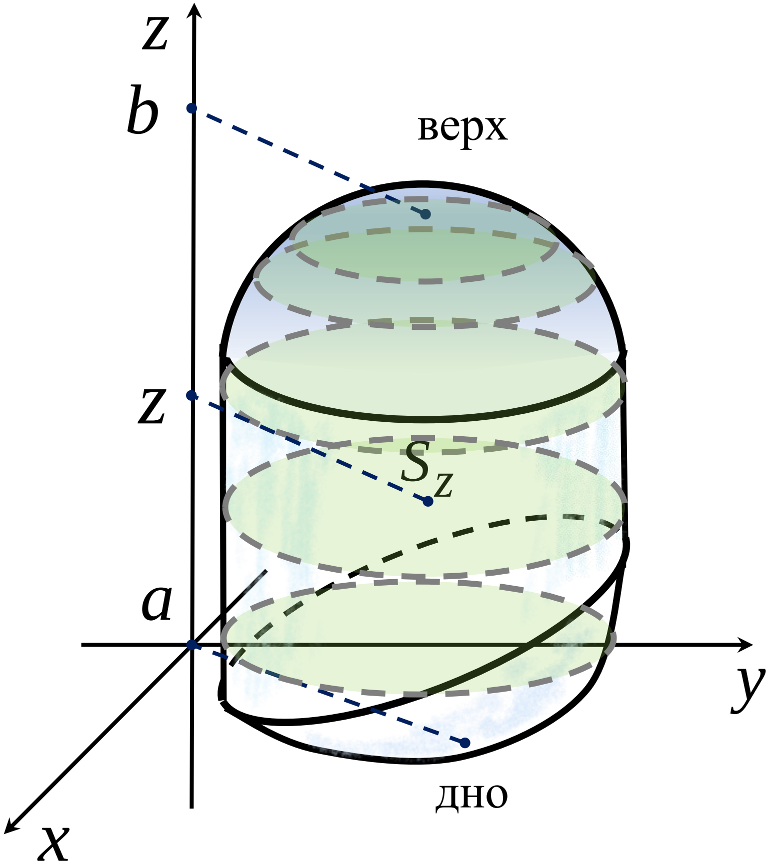
Теорема 3. Пусть тело $\boldsymbol{T}$ ограничено кусочно-гладкой поверхностью Γ_T и $\boldsymbol{S_z}$ – **сечение** тела T плоскостью, параллельной плоскости *Oxy* с аппликатой $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{z} \le \boldsymbol{b}$.

Тогда

$$\boxed{\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x,y,z)\,dxdy}$$

(сначала двойной, потом одинарный)

Теорема о вычислении тройного интеграла (*II* способ)

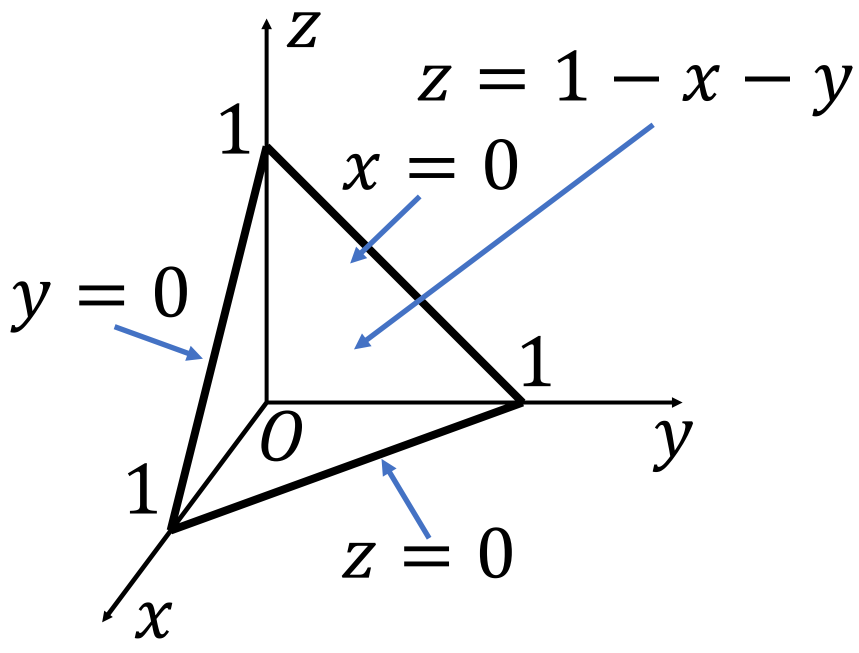


Способ -СЛОИ

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1

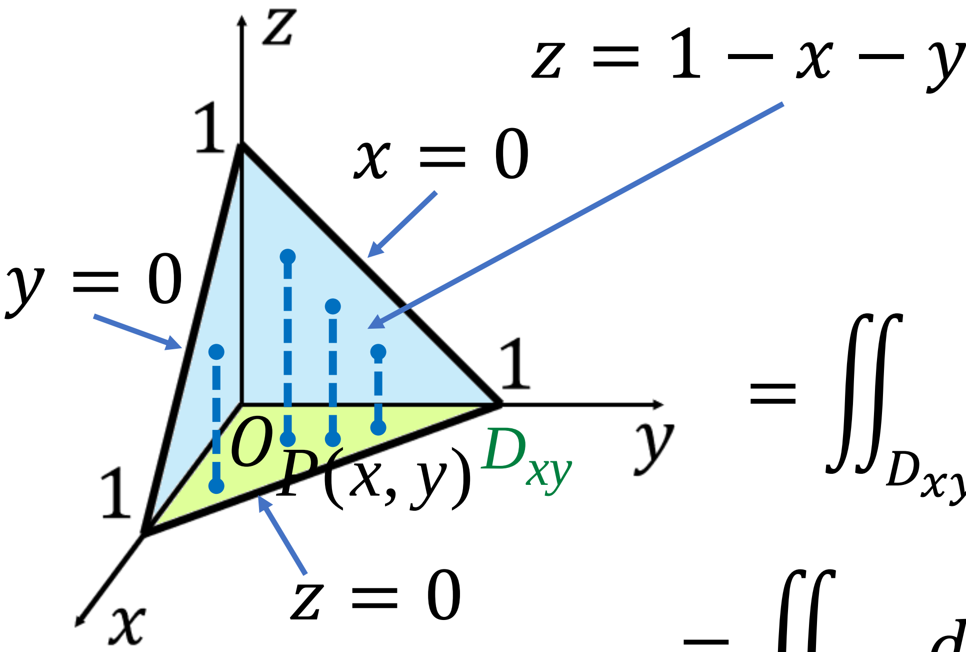
Пример 1. Вычислить двумя способами интеграл $\iiint_T x\,dx\,dy\,dz$, если тело T ограничено кусочно-гладкой поверхностью Γ_T, заданной уравнениями:

$$\Gamma_T : \begin{array}{c} x=0,\ y=0,\ z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}$$



Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*I* способ)`

Способ-СПИЧКИ



$$\iiint_T x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_0^{1-x-y} x\,dz =$$

$$= \iint_{D_{xy}} dx\,dy \cdot x\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right) =$$

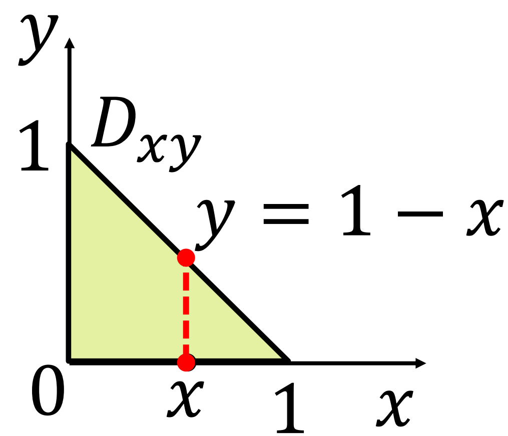
Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*I* способ)

Способ-
спички

$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \cdot x(1 - x - y) =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x - x^2 - xy)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)\, dy =$$



Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*I* способ)

Способ-

СПИЧКИ

$$= \int_0^1 dx \left(x \int_0^{1-x} dy - x^2 \int_0^{1-x} dy - x \int_0^{1-x} y\, dy \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x\, y \Big|_0^{1-x} - x^2\, y \Big|_0^{1-x} - x \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{1-x} \right) =$$

$$= \int_0^1 \left(x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*I* способ)

Способ-

СПИЧКИ

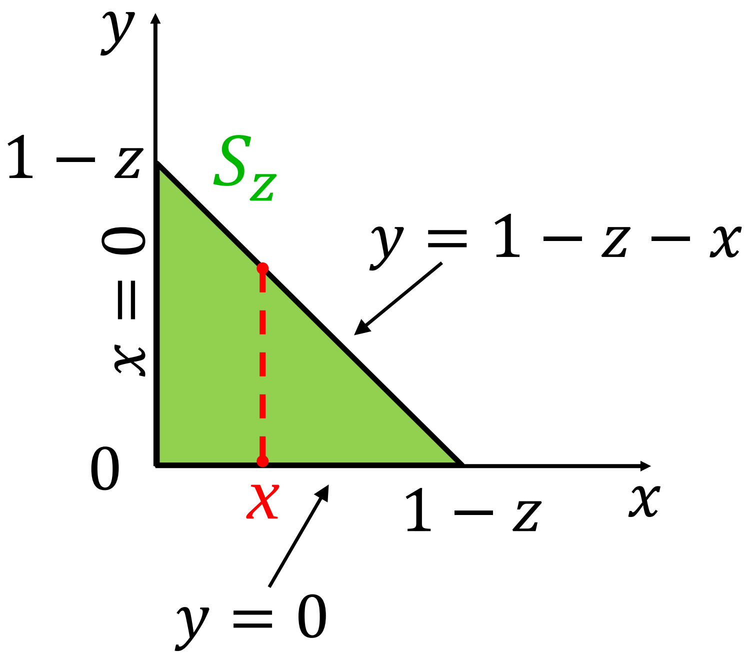
$$= \int_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x}{2}(1 - 2x + x^2) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ - СЛОИ



1) Фиксируем $z = const$

$0 \le z \le 1 \Rightarrow$
$z = 0$ – дно,
$z = 1$ – верх

Из Γ_T получаем:

$$\Gamma_{S_z}: \begin{array}{l} x = 0,\ y = 0, \\ y = 1 - z - x \end{array}$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ -**СЛОИ**

2) $J = \iiint_T x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} x\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 I(z)\,dz, \quad \text{где } I(z) = \iint_{S_z} x\,dx\,dy$$

3) Вычисляем $I(z) = \iint_{S_z} x\,dx\,dy =$

$$= \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} x\,dy = \int_0^{1-z} dx \cdot x \int_0^{1-z-x} dy =$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ -СЛОИ

$$= \int_0^{1-z} dx \cdot x \cdot y\Big|_0^{1-z-x} =$$

$$= \int_0^{1-z} dx \cdot x(1 - z - x) =$$

$$= \int_0^{1-z} (x - zx - x^2)dx =$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ -СЛОИ

$$= \left(\frac{x^2}{2} - z\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-z} =$$

$$= \left((1 - z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-z} =$$

$$= \frac{(1 - z)^3}{2} - \frac{(1 - z)^3}{3} = \frac{(1 - z)^3}{6}$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ -СЛОИ

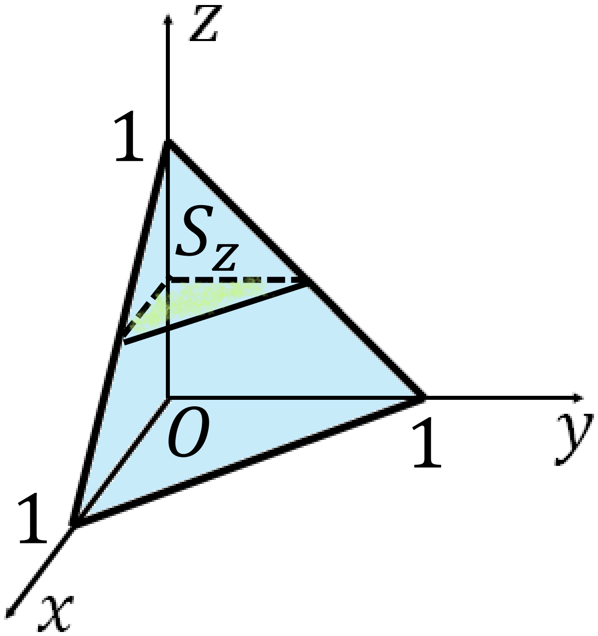
4) Вычисляем $J = \int_0^1 I(z)dz =$

$$= \int_0^1 \frac{(1-z)^3}{6} dz = \begin{bmatrix} t = 1 - z, dt = -dz \\ dz = -dt \\ z = 0 \to t = 1 \\ z = 1 \to t = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_1^0 \frac{t^3}{6} dt = -\frac{t^4}{24}\bigg|_1^0 = \frac{1}{24}$$

Теорема о вычислении тройного интеграла. Пример 1 (*II* способ)

Способ -СЛОИ



Этот трехмерный рисунок для решения не нужен. Преимущество II способа в том, что рисунки делаются в плоскости Oxy, а не в *пространстве,* как в *I* способе.