

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и  
прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребцкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

## Лекция 9

### Математический анализ

### Интегрирование тригонометрических выражений (продолжение)

# Рациональные функции от $\operatorname{tg}x$

Пусть  $R(x)$  – рациональная функция  
(т.е. отношение двух многочленов).

Тогда в интеграле  $\int R(\operatorname{tg}x)dx$  делаем замену

$$t = \operatorname{tg}x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Тогда  $\int R(\operatorname{tg}x)dx = \int \frac{R(t)}{t^2 + 1} dt$  – интеграл от  
рациональной дроби.

# Рациональные функции от $\operatorname{tg} x$ . Пример 9

Пример 9. Найти интеграл  $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$ .

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt \end{array} \right] = \int t^3 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

# Рациональные функции от $\operatorname{tg}x$ . Пример 9

$$\begin{array}{r}
 t^3 \quad \left| \begin{array}{l} t^2 + 1 \\ \hline \end{array} \right. \\
 - \quad t^3 \quad \left| \begin{array}{l} t^2 + 1 \\ \hline t \end{array} \right. \\
 \hline
 \phantom{-} \quad \quad \quad -t \\
 \phantom{-} \quad \quad \quad \hline
 \phantom{-} \quad \quad \quad -t \\
 \phantom{-} \quad \quad \quad \hline
 \phantom{-} \quad \quad \quad -t + 1 \\
 \phantom{-} \quad \quad \quad \hline
 \phantom{-} \quad \quad \quad -1
 \end{array}$$
  

$$\frac{t^3}{t^2 + 1} = \underbrace{t - 1}_{\text{blue circle}} + \underbrace{\frac{-1}{t^2 + 1}}_{\text{red circle}} = t - 1 - \frac{1}{t^2 + 1}$$

## Рациональные функции от $\operatorname{tg}x$ . Пример 9

$$\int t^3 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int \left( t - 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt =$$

$$\int t dt - \int 1 dt - \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{t^2}{2} - t - \operatorname{arctg} t + C$$

# Рациональные функции от $\operatorname{ctg}x$

Пусть  $R(x)$  – рациональная функция

Тогда в интеграле  $\int R(\operatorname{ctg}x)dx$  делаем замену  $t = \operatorname{ctg}x$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + t^2$$

$$dt = d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(1 + t^2) dx =$$

# Рациональные функции от $\text{ctg}x$

$$\Rightarrow dx = -\frac{dt}{1+t^2}$$

$\int R(\text{ctg}x)dx = -\int \frac{R(t)}{t^2+1} dt$  — интеграл от рациональной функции.

# Рациональные функции от $\text{ctg}x$ .

## Пример 10

Пример 10. Найти интеграл  $\int \text{ctg}^2 x dx$ .

$$\int \text{ctg}^2 x dx = \left[ \begin{array}{l} t = \text{ctg} x \\ dx = -\frac{1}{t^2 + 1} dt \end{array} \right] = \int t^2 \left( -\frac{1}{t^2 + 1} dt \right) =$$
$$= -\int t^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt = -\int \frac{t^2 \pm 1}{t^2 + 1} dt = -\int \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} dt =$$



# Рациональные функции от $\text{ctg}x$ .

## Пример 10

$$= -\int \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = -\left( \int 1 dt - \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) =$$

$$= -\int 1 dt + \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -t + \text{arctg} t + C =$$

$$= -\text{tg} x + \text{arctg}(\text{tg} x) + C = -\text{tg} x + x + C$$

# Универсальная тригонометрическая подстановка

Пусть  $R(x, y)$  – рациональная функция

Тогда в интеграле  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  делаем

замену  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{t^2 + 1}$$

# Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{t^2}{t^2 + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

# Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sqrt{\frac{1}{t^2+1}} \sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

# Универсальная тригонометрическая подстановка

$$dt = d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' dx = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{t^2 + 1}{2} dx \Rightarrow dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt$$

# Универсальная тригонометрическая подстановка

Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right) \frac{2dt}{t^2+1} -$$

интеграл от рациональной функции

# Универсальная тригонометрическая подстановка. Пример 11

Пример 11. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{5+4 \cos x+3 \sin x}$ .

$$\int \frac{dx}{5+4 \cos x+3 \sin x} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{t^2+1} \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array} \right] =$$

## Универсальная тригонометрическая подстановка. Пример 11

$$\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{5 + 4\frac{1-t^2}{t^2+1} + 3\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{5(t^2+1) + 4(1-t^2) + 6t}{t^2+1}} =$$
$$\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{5(t^2+1) + 4(1-t^2) + 6t} = \int \frac{2dt}{5(t^2+1) + 4(1-t^2) + 6t} =$$



## Универсальная тригонометрическая подстановка. Пример 11

$$\begin{aligned} \int \frac{2dt}{5t^2 + 5 + 4 - 4t^2 + 6t} &= \int \frac{2dt}{t^2 + 6t + 9} = \\ &= \int \frac{2dt}{(t+3)^2} = \left[ \begin{array}{l} u = t + 3 \\ du = dt \end{array} \right] = 2 \int \frac{du}{u^2} = 2 \int u^{-2} du = \\ &= 2 \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C \end{aligned}$$

## Замена $t = \operatorname{tg} x$ . Пример 11

Если функция  $R(\sin x, \cos x)$  – четная функция от  $\sin x, \cos x$ , то более эффективной будет

замена  $t = \operatorname{tg} x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

## Замена $t = \operatorname{tg} x$ . Пример 11

Пример 7. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}$ .

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ \cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1} \end{array} \right] =$$

## Замена $t = \operatorname{tg} x$ . Пример 11

$$\int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1} - 2 \frac{1}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t^2-2} = \int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{2})^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2}} \right| + C$$

# Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей

Интегралы с иррациональностью вида

$$1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad x = a \sin t$$

$$2) \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx \quad x = a \operatorname{tg} x$$

$$3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad x = a / \cos x$$

находятся с помощью тригонометрических подстановок.

После чего подынтегральная функция становится тригонометрической.

# Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей. Пример 12

Пример 12. Найти интеграл  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left[ \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \\ &= \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \end{aligned}$$

## Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей. Пример 12

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt &= \int \frac{1}{2} dt - \int \frac{\cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + C\end{aligned}$$

# Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей. Пример 12

$$= \left[ \begin{array}{l} \sin t = x \Rightarrow t = \arcsin x \\ \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2} \\ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + C = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{1 - x^2} + C$$