Билеты к экзамену «Дискретная математика»

для студентов 2 курса специальности «Компьютерные науки»

2018г.

I. Теория множеств

- 1. Бинарные отношения (БО) на множестве. Матрица БО. Свойства БО: рефлексивность, транзитивность, линейность, симметричность, антисимметричность. Связь свойств матрицы и свойств БО.
- 2. Операции над БО: булевы операции, обращение, умножение, симметричное, транзитивное и рефлексивное замыкания. Связь с операциями над булевыми матрицами. Свойство транзитивного замыкания. Критерий транзитивности.
- 3. Отношения порядка. Упорядоченные множества (ЧУМ). Отношение покрытия, диаграммы Хассе. Минимальные, максимальные, наименьшие и наибольшие элементы ЧУМ, их свойства. Условия индуктивности, минимальности и обрыва убывающих цепей, их эквивалентность. Отношения линейного порядка.
- 4. Отношения эквивалентности, фактор-множества. Разбиения. Теорема о связи отношений эквивалентности и разбиений множества.
- 5. Отображения (функции) как БО. Инъекции, сюръекции, биекции, теорема о существовании обратного отображения.
- 6. Мощность множества. Конечные и бесконечные множества, критерий бесконечности множества. Мощности числовых множеств. Сравнение мощностей. Теорема Бернштейна-Кантора. Теорема Кантора о булеане. Иерархия алефов, континуум-гипотеза.
- 7. Изоморфизм ЧУМ. Ординалы.
- 8. Парадоксы теории множеств. Система аксиом Цермело-Френкеля. Связь между аксиомой выбора, леммой Цорна и теоремой Цермело.

II. Комбинаторика

- 1. Правила сложения и умножения. Принцип Дирихле.
- 2. Биномиальные коэффициенты. Примеры: число подмножеств, число инъекций, число решений диофантова уравнения, число путей в решетке. Свойства: симметрия, суммы и взвешенные суммы, четные/нечетные подмножества, бином Ньютона, треугольник Паскаля. Полиномиальные коэффициенты.
- 3. Наддиагональные пути в квадратной решетке. Числа Каталана, вывод формулы. Правильные расстановки скобок, триангуляции выпуклых многоугольников.
- 4. Принцип включения-исключения (ПВИ). Число сюръекций. Разбиения: числа Стирлинга второго рода. Функция Эйлера.
- 5. Рекуррентные соотношения. Теорема о линейных однородных рекуррентных соотношениях (доказательство в случае различных

- корней). Пример: вывод явной формулы для чисел Фибоначчи. Нелинейные рекуррентные соотношения. Вывод формулы для числа операций при сортировке массива слиянием.
- 6. Порядок роста функции. Сравнение функций, $\mathbf{0}$ -, $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Theta}$ -символика. Основные свойства $\mathbf{0}$, $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Theta}$, преобразование $\mathbf{0}$ -выражений.
- 7. Формула Стирлинга, ее вывод. Приложения: центральный биномиальный коэффициент, нижняя оценка для числа операций по сортировке массива.

III. Теория графов

- 1. Геометрическое и алгебраическое определение графа. Матрица смежности. Равенство и изоморфизм графов. Степень вершины, лемма о рукопожатиях. Маршруты, цепи, циклы. Подграфы. Удаление ребер и вершин. Связность, компоненты связности. Лемма о разрыве цикла. Эйлеров цикл, теорема Эйлера о циклах.
- 2. Мосты и точки сочленения. Двусвязные графы, компоненты двусвязности. Гамильтонов цикл. Обобщенные точки сочленения и существование гамильтонова цикла. Теорема Оре.
- 3. Деревья. Лемма о корневом изображении. Теорема о деревьях. Цикломатическре число графа. Каркас графа.
- 4. Двудольные графы. Критерий двудольности. Паросочетания. Теорема Холла о свадьбах.
- 5. Плоские и планарные графы. Укладка на поверхности. Укладка на сфере. Многогранник как планарный граф. Теорема Эйлера о многогранниках: две формулировки. Непланарность графов К₅ и К_{3,3}. Стягивание. Миноры. Критерий планарности (д-во в одну сторону).
- 6. Раскраска графа. Хроматическое число. Элементарные случаи: двудольные графы, полные графы, циклы. Нижняя оценка χ(G) через максимальный полный подграф. Теорема о графах без треугольников. Оценка через число независимости. Верхние оценки: жадная раскраска и теорема Брукса. Раскраска плоского графа, теорема Хивуда.
- 7. Орграфы. Полустепени захода и исхода. Маршруты. Аналог теоремы Эйлера о циклах. Сильная связность, компоненты сильной связности, ЧУМ компонент. Топологическая сортировка орграфа.

IV. Алгебра логики

- 1. Булевы формулы и булевы функции. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ, их построение.
- 2. Суперпозиция булевых функций. Полные системы функций. Примеры. Полиномы Жегалкина, представимость булевых функций полиномами.
- 3. Замкнутые классы. Линейность, монотонность, самодвойственность булевых функций. Классы L, M, S, T₀, T₁. Теорема Поста. Следствия о базисах и о максимальных замкнутых классах.

V. Избранные вопросы общей алгебры

- 1. Свободные полугруппы. Гомоморфизм. Теорема о гомоморфном образе свободной полугруппы.
- 2. Полугруппы преобразований. Подполугруппы. Теорема Кэли.
- 3. Порождающие множества. Полугрупповые коды. Теорема о вложимости любой свободной над счетным алфавитом в свободную над бинарным алфавитом. Классификация циклических полугрупп.
- 4. Группы перестановок. Циклы, разложение перестановки в суперпозицию циклов. Теорема Кэли. Группа симметрий квадрата.
- 5. Классификация циклических групп.
- 6. Построение свободной группы. Единственность редуцированного слова в классе эквивалентности.
- 7. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Гомоморфизмы групп. Ядро. Теорема о гомоморфизмах.
- 8. Решетки и решеточно упорядоченные множества, их связь. Пример решеток в алгебре: решетка подполугрупп.
- 9. Модулярные и дистрибутивные решетки. Критерии модулярности и дистрибутивности (д-во в одну сторону). 0 и 1, дополнения. Теорема о единственности дополнения. Булевы алгебры.