

Билеты к экзамену
«Дискретная математика»
для студентов 2 курса специальностей ФИИТ и КБ
2019г.

I. Теория множеств

1. Бинарные отношения (БО) на множестве. Матрица БО. Свойства БО: рефлексивность, транзитивность, линейность, симметричность, антисимметричность. Связь свойств матрицы и свойств БО.
2. Операции над БО: булевы операции, обращение, умножение, симметричное, транзитивное и рефлексивное замыкания. Связь с операциями над булевыми матрицами. Свойство транзитивного замыкания. Критерии транзитивности, рефлексивности, симметричности и антисимметричности.
3. Отношения порядка. Упорядоченные множества (ЧУМ). Отношение покрытия, диаграммы Хассе. Минимальные, максимальные, наименьшие и наибольшие элементы ЧУМ, их свойства. Условия индуктивности, минимальности и обрыва убывающих цепей, их эквивалентность. Отношения линейного порядка.
4. Отношения эквивалентности, фактор-множества. Разбиения. Теорема о связи отношений эквивалентности и разбиений множества.
5. Отображения (функции) как БО. Инъекции, сюръекции, биекции, теорема о существовании обратного отображения.
6. Мощность множества. Конечные и бесконечные множества, критерий бесконечности множества. Мощности числовых множеств. Сравнение мощностей. Теорема Бернштейна-Кантора. Теорема Кантора о булеане. Иерархия алефов, континуум-гипотеза.
7. Изоморфизм ЧУМ. Ординалы.
8. Парадоксы теории множеств. Система аксиом Цермело-Френкеля. Связь между аксиомой выбора, леммой Цорна и теоремой Цермело.

II. Комбинаторика

1. Правила сложения и умножения. Принцип Дирихле.
2. Биномиальные коэффициенты. Примеры: число подмножеств, число решений диофантова уравнения, число путей в целочисленной решетке. Свойства: симметрия, суммы и взвешенные суммы, четные/нечетные подмножества, бином Ньютона, треугольник Паскаля. Полиномиальные коэффициенты.
3. Наддиагональные пути в квадратной решетке. Числа Каталана, вывод формулы. Правильные расстановки скобок, триангуляции выпуклых многоугольников.
4. Принцип включения-исключения (ПВИ). Число сюръекций. Разбиения: числа Стирлинга второго рода. Функция Эйлера.

5. Рекуррентные соотношения. Теорема о линейных однородных рекуррентных соотношениях. Пример: вывод явной формулы для чисел Фибоначчи. Производящая функция для чисел Каталана.
6. Формула Стирлинга, ее вывод. Приложения: оценка числа Каталана.

III. Теория графов

1. Геометрическое и алгебраическое определение графа. Матрица смежности. Равенство и изоморфизм графов. Степень вершины, лемма о рукопожатиях. Маршруты, цепи, циклы. Подграфы. Удаление ребер и вершин. Связность, компоненты связности. Лемма о разрыве цикла. Эйлеров цикл, теорема Эйлера о циклах.
2. Мосты и точки сочленения. Двусвязные графы, компоненты двусвязности. Гамильтонов цикл. Точки сочленения и существование гамильтонова цикла. Теорема Оре.
3. Деревья. Лемма о корневом изображении. Теорема о деревьях. Цикломатическое число графа. Каркас графа.
4. Двудольные графы. Критерий двудольности. Паросочетания. Теорема Холла о свадьбах.
5. Плоские и планарные графы. Укладка на поверхности. Укладка на сфере. Многогранник как планарный граф. Теорема Эйлера о многогранниках: две формулировки. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Стягивание. Критерий планарности (д-во в одну сторону).
6. Раскраска графа. Хроматическое число. Элементарные случаи: двудольные графы, полные графы, циклы. Нижняя оценка $\chi(G)$ через максимальный полный подграф. Теорема о графах без треугольников. Оценка через число независимости. Верхние оценки: жадная раскраска и теорема Брукса. Раскраска плоского графа, теорема Хивуда.
7. Орграфы. Полустепени захода и исхода. Маршруты. Аналог теоремы Эйлера о циклах. Сильная связность, компоненты сильной связности, ЧУМ компонент.

IV. Алгебра логики

1. Булевы формулы и булевы функции. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ, их построение.
2. Суперпозиция булевых функций. Полные системы функций. Примеры. Полиномы Жегалкина, представимость булевых функций полиномами.
3. Замянутые классы. Линейность, монотонность, самодвойственность булевых функций. Классы L , M , S , T_0 , T_1 . Теорема Поста. Следствия о базисах и о максимальных замкнутых классах.

V. Избранные вопросы общей алгебры

1. Свободные полугруппы. Гомоморфизм. Теорема о гомоморфном образе свободной полугруппы.
2. Полугруппы преобразований. Подполугруппы. Теорема Кэли.

3. Порождающие множества. Полугрупповые коды. Теорема о вложимости любой свободной над счетным алфавитом в свободную над бинарным алфавитом. Классификация циклических полугрупп.
4. Группы перестановок. Циклы, разложение перестановки в суперпозицию циклов. Теорема Кэли. Группа симметрий квадрата.
5. Классификация циклических групп.
6. Построение свободной группы. Редуцированное слово и алгоритм его построения.
7. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа. Фактор-группа. Гомоморфизмы групп. Ядро. Теорема о гомоморфизмах.
8. Решетки и решеточно упорядоченные множества, их связь. Пример решеток в алгебре: решетка подполугрупп.
9. Модулярные и дистрибутивные решетки. Критерии модулярности и дистрибутивности (д-во в одну сторону). 0 и 1, дополнения. Теорема о единственности дополнения. Булевы алгебры.