1. Логика предикатов. Основные понятия. Интерпретация. Равносильность. Законы логики предикатов

Опр. Пусть $M \neq \varnothing$. Назовём ***n*-местным предикатом**, заданным на M выражение, содержащее n переменных, обращающееся в высказывание при замене переменных элементами из M.
Обозначение: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Опр. Назовём **нульместным предикатом** высказывание.

Операции с высказываниями переносятся на предикаты: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.

Опр. **Термом** называется выражение одного из двух видов:
1) переменная или константа (символ нуль-местной функции);
2) $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где f – n-местный символ сигнатуры, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы.

Опр. **Атомарной формулой** называется выражение $A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где A – символ n-местного предиката в сигнатуре, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы.

Опр. **Формулой логики предикатов** называется выражение одного из двух видов:
1) атомарная формула;
2) $(F)\ \&\ (G)$, $(F) \vee (G)$, $\neg(F)$, $(F) \to (G)$, $(F) \leftrightarrow (G)$, $(\forall y)(F)$, $(\exists y)(F)$, где F и G – формулы логики предикатов, y – переменная.

Опр. В формулах $(\forall y)(F)$, $(\exists y)(F)$, формула F **называется областью действия квантора по переменной *y*.**

Для уменьшения количества скобок договоримся о приоритетах операций: у кванторов выше, чем у связок, для связок так же, как в высказываниях.

Опр. Вхождение переменной в формулу называется **связанным,** если переменная стоит непосредственно за квантором, или входит в область действия квантора по этой переменной.

Вхождение переменной **свободное** – в противном случае.

Опр. **Интерпретацией** формулы F на непустом множестве M называется отображение φ, ставящее в соответствие:
символу константы – элемент из M,
символу n-местной функции f – некоторую функцию на M,
символу n-местного предиката A – некоторый предикат, заданный на M.

Опр. Формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются **равносильными**, если для любой интерпретации φ на множестве M, и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, значения истинности высказываний $\varphi(F(a_1, a_2, \dots, a_n))$ и $\varphi(G(a_1, a_2, \dots, a_n))$ совпадают.
Обозначение:
$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv G(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Опр. Формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **тождественно истинной**, если для любой интерпретации φ на множестве M, и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, высказывание $\varphi(F(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно.

Теорема. $F \equiv G \iff F \leftrightarrow G \equiv 1$.

Законы логики предикатов:

1) – 21) аналогичны законам логики высказываний.
Законы логики высказываний:
1) $F \,\&\, 1 \equiv F$ 2) $F \vee 1 \equiv 1$
3) $F \,\&\, 0 \equiv 0$ 4) $F \vee 0 \equiv F$
5) $F \,\&\, F \equiv F$ 6) $F \vee F \equiv F$
7) $F \,\&\, G \equiv G \,\&\, F$ 8) $F \vee G \equiv G \vee F$
9) $(F \,\&\, G) \,\&\, H \equiv F \,\&\, (G \,\&\, H)$

10) $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$
11) $F \,\&\, (G \vee H) \equiv (F \,\&\, G) \vee (F \,\&\, H)$
12) $F \vee (G \,\&\, H) \equiv (F \vee G) \,\&\, (F \vee H)$
13) $F \,\&\, (F \vee H) \equiv F$
14) $F \vee (F \,\&\, H) \equiv F$
15) $F \,\&\, \neg F \equiv 0$
16) $F \vee \neg F \equiv 1$
17) $\neg(F \,\&\, G) \equiv \neg F \vee \neg G$
18) $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \,\&\, \neg G$
19) $\neg\neg F \equiv F$
20) $F \to G \equiv \neg F \vee G$
21) $F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \,\&\, (G \to F)$

22) $(\forall x)(F(x) \,\&\, G(x)) \equiv (\forall x)F(x) \,\&\, (\forall x)G(x)$;
23) $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \equiv (\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$;
24) $(\forall x)(\forall y)F(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)F(x, y)$;
25) $(\exists x)(\exists y)F(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)F(x, y)$;
26) $\neg(\forall x)F(x) \equiv (\exists x)\neg F(x)$;
27) $\neg(\exists x)F(x) \equiv (\forall x)\neg F(x)$;
28) $(\forall x)(F(x) \vee G) \equiv (\forall x)F(x) \vee G$;
29) $(\exists x)(F(x) \,\&\, G) \equiv (\exists x)F(x) \,\&\, G$;

Пусть $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$, $F(x)$ не содержит *y*, $G(y)$ не содержит *x*.
30) $(Q_1 x)(Q_2 y)(F(x) \,\&\, G(y)) \equiv (Q_1 x)F(x) \,\&\, (Q_2 y)G(y)$;
31) $(Q_1 x)(Q_2 y)(F(x) \vee G(y)) \equiv (Q_1 x)F(x) \vee (Q_2 y)G(y)$;
32) $(\forall x)F(x) \equiv (\forall z)F(z)$;
33) $(\exists x)F(x) \equiv (\exists z)F(z)$.

2. Нормальные формы в логике предикатов

Опр. Формула F имеет **предварённую нормальную форму (ПНФ)**, если $F=(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)\,H$, где $Q_1,\ldots,Q_n\in\{\forall,\exists\}$, H не содержит кванторов.

Теорема. Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая ПНФ.

Алгоритм приведения к ПНФ

1. Исключить эквиваленцию и импликацию (по законам 21 и 20).

2. Занести отрицание к атомарным формулам (по законам де Моргана 17 и 18 и законам переноса отрицания через кванторы 26, 27).

3. Вынести кванторы вперед, используя (если нужно) переименование переменных (по законам 22, 23, 28 – 33).

Пример. Привести к ПНФ

$$F=(\forall x)(\exists y)P(x,y)\to(\forall x)(\exists y)Q(x,y)\ =$$

$$=\ \neg(\forall x)(\exists y)P(x,y)\vee(\forall x)(\exists y)Q(x,y)\ =$$

$$=\ (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y)\vee(\forall x)(\exists y)Q(x,y)\ =$$

$$=\ (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y)\vee(\forall u)(\exists v)Q(u,v)\ =$$

$$=\ (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y)\vee Q(u,v)).$$

Опр. Формула F имеет **сколемовскую нормальную форму (СНФ),** если $F=(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\,H$, где H не содержит кванторов и имеет КНФ.

Теорема. Для всякой формулы F существует формула, имеющая СНФ, одновременно с F выполнимая или невыполнимая.

Алгоритм приведения к ПНФ.

1. Исключить эквиваленцию и импликацию (по законам 21 и 20).

2. Занести отрицание к атомарным формулам (по законам де Моргана 17 и 18 и законам переноса отрицания через кванторы 26, 27).

3. Вынести кванторы вперед, используя (если нужно) переименование переменных (по законам 22, 23, 28 – 33).

Пример. Привести к ПНФ

$$F = (\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\forall x)(\exists y)Q(x,y) =$$

$$= \neg(\forall x)(\exists y)P(x,y) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x,y) =$$

$$= (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x,y) =$$

$$= (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y) \vee (\forall u)(\exists v)Q(u,v) =$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y) \vee Q(u,v))$$

Опр. Формула F имеет **сколемовскую нормальную форму (СНФ),** если $F = (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\, H$, где H не содержит кванторов и имеет КНФ.

Теорема.
Для всякой формулы F существует формула, имеющая СНФ, одновременно с F выполнимая или невыполнимая.

Алгоритм приведения к СНФ

1, 2, 3 – из алгоритма приведения к ПНФ.
Результат $F \equiv (Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)\ H$.

4. Бескванторную часть H привести к КНФ.

5. Исключить кванторы существования, поочередно слева направо, применяя одно из двух правил:

1 случай) $(\exists x_1)(Q_2 x_2)\ldots H(x_1, x_2, \ldots) \sim (Q_2 x_2)\ldots H(a, x_2, \ldots)$, где a – символ константы.

2 случай) $(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})\ldots H(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \sim$
$\sim (\forall x_1)\ldots(\forall x_k)\ldots H(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k), \ldots)$, где $f(x_1, \ldots, x_k)$ – символ функции, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_k$.

Пример. Привести к СНФ

$$F = (\forall x)(\exists y)P(x, y) \to (\forall x)(\exists y)Q(x, y) = \ldots =$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x, y) \vee Q(u, v) \sim$$

$$\sim (\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(a, y) \vee Q(u, v)) \sim$$

$$\sim (\forall y)(\forall u)(\neg P(a, y) \vee Q(u, f(y, u))).$$

3. Метод резолюций в логике предикатов

<u>Опр.</u> **Подстановкой** называется множество равенств $\sigma = \{ x_1 = t_1, \ldots, \ x_n = t_n \}$, где $x_1, \ldots, x_n \in V$, t_i – терм, не содержащий x_i .

Обозначение: $\sigma(F)$ – формула, полученная из F подстановкой σ.

<u>Опр</u>. (повторно). **Литерал** – атомарная формула $P(t_1, \ldots, t_n)$, или ее отрицание $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

<u>Опр</u> **Пустой дизъюнкт** – дизъюнкт, не содержащий литералов.
$\square$

Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации на любой модели.

<u>Опр</u>. **Правило резолюций** в логике предикатов – из дизъюнктов $\neg P(t_1, \ldots, t_n) \vee H_1$ и $P(s_1, \ldots, s_n) \vee H_2$ выводится дизъюнкт $\sigma(H_1) \vee \sigma(H_2)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1, \ldots, t_n))$ и $\sigma(P(s_1, \ldots, s_n))$ совпадают.

σ – «Наиболее общий унификатор».

<u>Опр.</u> **Правило склейки** в логике предикатов – из дизъюнкта $P(t_1, \ldots, t_n) \vee P(s_1, \ldots, s_n) \vee H$ выводится дизъюнкт $\sigma(P(t_1, \ldots, t_n)) \vee \sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1, \ldots, t_n))$ и $\sigma(P(s_1, \ldots, s_n))$ совпадают.

Либо – из дизъюнкта $\neg P(t_1, \ldots, t_n) \vee \neg P(s_1, \ldots, s_n) \vee H$ выводится дизъюнкт $\sigma(\neg P(t_1, \ldots, t_n)) \vee \sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1, \ldots, t_n))$ и $\sigma(P(s_1, \ldots, s_n))$ совпадают.

Опр. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n выводится из S, если существует последовательность дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$, такая, что каждый D_i либо принадлежит S, либо получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди $D_1, D_2, \ldots, D_{i-1}$, либо получен по правилу склейки.

Вывод D_n из S – эта последовательность $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

4. Логическое следование

Опр. Формула $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **логическим следствием формул** $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если для любой модели $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$ из того, что все формулы $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ истинны на этой модели (т.е. для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ для любой интерпретации предметных переменных $a_1 = \varphi(x_1), a_2 = \varphi(x_2), \dots, a_n = \varphi(x_n)$ на основном множестве M высказывание $\varphi(F_i(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно) следует, что формула $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тоже истинна на этой модели (т.е. для любой интерпретации предметных переменных $a_1 = \varphi(x_1), a_2 = \varphi(x_2), \dots, a_n = \varphi(x_n)$ на основном множестве M высказывание $\varphi(G(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно).

Лемма

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \models G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\Leftrightarrow \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n \models \bar{G}.$$

Здесь для любой формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через $\bar{F}$ обозначается замыкание $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этой формулы.

Поэтому везде далее будем считать, когда будем говорить о логическом следствии $F_1, F_2, \dots, F_n \models G,$ что формулы $F_1, F_2, \dots, F_n, G$ – *замкнуты.*

Опр. Будем говорить, что для множества $T = \{ f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)\}$ формул ЛП **существует модель**, если *существует* такая модель $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$ на которой истинны все эти формулы, т.е. что для любых $a_1, \dots, a_n \in M$ справедливо $f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_k(a_1, \dots, a_n) = 1$

(другими словами, множество T выполнимо, т. и т.т.к. существует модель для формулы $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge f_k(x_1, \dots, x_n)$, В частности, существует модель для формулы-замыкания $\overline{f} = \forall x_1 ... \forall x_n f(x_1,...,x_n)$).

Напомним, что

(1) Каждая формула ЛП равносильна своей ПНФ

(2) Каждая формула ЛП одновременно выполнима или невыполнима вместе со своей СНФ.

<u>Теорема</u> Множество дизъюнктов S логики предикатов не имеет модели $\Leftrightarrow$ из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций и правило склейки сохраняют истинность при некоторой интерпретации φ, если **для всех свободных переменных подразумевается квантор всеобщности**.

<u>Схема применения метода резолюций для доказательства логического следствия</u>

Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ - замкнутые формулы.

1. Формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G$ привести к СНФ.
2. Отбросить кванторы общности.
3. Все получившиеся дизъюнкты собрать в множество S, переименовав, если надо, переменные, чтобы в разных дизъюнктах переменные не повторялись.
4. Построить вывод □ из S

<u>Пример</u>. Доказать методом резолюций, что G является логическим следствием формул F_1, F_2:

$F_1 = (\forall x)(A(x) \to (\exists y)D(x, y));$

$F_2 = (\forall x)(\forall y)(D(x, y) \to B(x));$

$G = (\forall x)(A(x) \to B(x)).$

$F_1 \equiv (\forall x)(\neg A(x) \vee (\exists y)D(x, y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \vee D(x, y)) \sim$

$\sim (\forall x)(\neg A(x) \vee D(x, f(x)))$. Дизъюнкт: $\neg A(x) \vee D(x, f(x))$.

$F_2 \equiv (\forall x)(\forall y)(\neg D(x, y) \vee B(x))$. Дизъюнкт: $\neg D(u, y) \vee B(u)$.

$\neg G = \neg(\forall x)(\neg A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)(A(x) \,\&\, \neg B(x)) \sim (A(a) \,\&\, \neg B(a))$.
Дизъюнкты: $A(a), \neg B(a)$.

$S = \{\neg A(x) \vee D(x, f(x)),\ \neg D(u, y) \vee B(u),\ A(a),\ \neg B(a)\}$.

$\neg A(x) \vee D(x, f(x)),\ \neg D(u, y) \vee B(u),\ \{u = x, y = f(x)\}, \neg A(x) \vee B(x),$
$A(a), \{x = a\}, B(a), \neg B(a),\ \square$.