

Программа экзамена по курсу “Основы дифференциальной геометрии и топологии”

Направление: 01.03.01. Математика, IV семестр

Предварительные сведения (повторение)

1. Уравнения поверхностей второго порядка в трёхмерном пространстве.
2. Орфлаг (определение). Утверждение об орфлагах при ортогонализации Грамма-Шмидта.
3. Обобщенное векторное произведение: определение, вычисление.
4. Векторная функция от одной переменной. Теорема о дифференцировании билинейных отображений (формулировка). Следствие из нее.
5. Аффинные евклидовы пространства (определение). Аффинное отображение (определение).

Кривые в аффинном евклидовом пространстве

6. Кривая в аффинном евклидовом пространстве. Регулярность кривой. Понятие длины кривой.
7. Эквивалентность кривых, строгая эквивалентность кривых.
8. Кривая 1-скорости (определение). Теорема о строгой эквивалентности регулярной кривой и кривой 1-скорости.
9. Касательная, нормаль к гладкой линии при различном задании её на плоскости. Определение соприкосновения (касания) двух гладких линий. Порядок касания двух гладких линий.
10. Огибающая семейства плоских гладких линий. Определение огибающей, необходимое условие огибающей. Дискриминанта (определение, связь с огибающей).
11. Локальное строение плоских кривых.
12. Понятие подвижного репера плоской регулярной кривой, кривизны этой кривой. Уравнения Френе. Вычисление кривизны плоской кривой. Инвариантность базиса Френе и кривизны относительно строгой замены параметра и движения.
13. Утверждение о плоской регулярной кривой с постоянной кривизной.
14. Теорема о натуральных уравнениях кривой (доказательство единственности: вывод формул).
15. Центр кривизны, радиус кривизны бирегулярной кривой. Соприкасающаяся окружность. Определение эволюты бирегулярной кривой. Утверждение о свойствах эволюты.

Кривые общего вида

16. Определение кривой общего вида, базиса Френе кривой общего вида. Утверждение о существовании и единственности базиса Френе кривой общего положения (доказательство существования). Инвариантность базиса Френе относительно строгой замены параметра и движения.
17. Теорема Жордана.
18. Теорема о кривых общего положения с нулевой последней кривизной (доказательство для $n=3$).
19. Кривые общего вида в трёхмерном пространстве. Формулы Френе в трёхмерном пространстве. Нахождение векторов репера Френе, кривизны, кручения. Касательная, главная нормаль, бинормаль, соприкасающаяся плоскость, спрямляющая плоскость, нормальная плоскость (определение).

Поверхности

20. Гладкое отображение. Матрица Якоби. Дифференциал гладкого отображения (определение). Частные производные. Утверждение о значении дифференциала от касательного вектора кривой.
21. Понятие поверхности. Касательный вектор поверхности, касательное пространство. Утверждение о касательном пространстве. Стандартный базис касательного пространства.
22. Равенство координат касательного вектора поверхности в стандартном базисе касательного пространства и координат его прообраза в стандартном базисе в области определения.
23. Определение первой фундаментальной формы. Матрица первой фундаментальной формы. Вычисления на поверхности (внутренняя геометрия поверхности). Вычисление длины кривой, угла между двумя кривыми на поверхности. Вычисление «объема» поверхности.
24. Определение нормального стандартного Гауссова поля гиперповерхности. Утверждение о дифференциале нормального Гауссова поля.
25. Понятие основного оператора в точке для гиперповерхности как производной нормального Гауссова поля вдоль данной кривой (по данному направлению) Утверждение об основном операторе гиперповерхности как композиции двух дифференциалов. Действие основного оператора на стандартный базис касательного пространства.
26. Определение второй фундаментальной формы. Симметричность второй фундаментальной формы и самосопряжённость основного оператора. Вычисление элементов матрицы этой формы двумя способами.
27. Внешняя геометрия гиперповерхности. Линии кривизны. Вычисление линий кривизны в трехмерном пространстве.
28. Определение полной Гауссовой и средней кривизны, а также главных кривизн и главных направлений для гиперповерхности. Связь полной и средней кривизны с главными кривизнами. Утверждение о нахождении главных кривизн и главных направлений.
29. Теорема о матрице основного оператора через матрицы первой и второй фундаментальных форм. Вычисление полной Гауссовой кривизны через определители матриц первой и второй фундаментальных форм.
30. Локальное строение гиперповерхности (без доказательства). Классификация точек на гиперповерхности. Нахождение омбилических точек.
31. Теорема Менье. Нормальная кривизна (определение). Нормальная кривизна как кривизна нормального сечения в трёхмерном пространстве.
32. Теорема Эйлера для произвольного n и для $n=2$. Следствие из неё (главные кривизны как экстремальные значения нормальных кривизн). Асимптотические направления и асимптотические линии.
33. Движение репера вдоль поверхности. Коэффициенты связности.
34. Уравнение Гаусса-Петерсона-Кодацци-Майнарди.
35. Тензоры кривизны Леви-Чевита и Римана. Теорема «egregium» Гаусса.
36. Ковариантное ускорение. Геодезические. Вариации кривых на поверхности. Экстремальные свойства геодезических. Ковариантное дифференцирование

Состав экзаменационного билета: один теоретический вопрос (на 60 баллов), одна задача (на 40 баллов). Каждый теоретический вопрос без доказательства засчитывается на 10 баллов. В каждом билете присутствует две темы: кривые, поверхности.

Темы задач

Кривые

1. Касательная и нормаль плоской гладкой линии.
2. Длина кривой. Натуральная параметризация кривой.
3. Нахождение базиса Френе и кривизны плоской регулярной кривой.
4. Натуральные уравнения плоской кривой (т.е. нахождение явной или неявной зависимости кривизны от натурального параметра).
5. Огибающая, дискриминанта.
6. Локальное строение плоской кривой (классификация особых точек).
7. Нахождение эволюты и эвольвенты плоской бирегулярной кривой. Схематическое построение их по данной кривой.
8. Нахождение базиса Френе, кривизны, кручения кривой общего положения в трёхмерном пространстве.
9. Нахождение касательной, главной нормали, бинормали, соприкасающейся плоскости, спрямляющей плоскости, нормальной плоскости кривой общего положения в трёхмерном пространстве.
10. Доказательство того, что данная кривая в трёхмерном пространстве является плоской и нахождение гиперплоскости, в которой лежит кривая общего положения с нулевым кручением.
11. Натуральные уравнения кривой общего положения в трёхмерном пространстве (т.е. нахождение явной или неявной зависимостей кривизны и кручения от натурального параметра).
12. Доказательство тождеств для векторов базиса Френе в трёхмерном пространстве.

Поверхности

13. Параметризация поверхностей (для поверхностей вида $z=f(x,y)$).
14. Параметризация поверхностей вращения.
15. Уравнения поверхностей второго порядка в трёхмерном пространстве.
16. Нахождение касательного пространства поверхности, его стандартного базиса в точке для гиперповерхности в трёхмерном пространстве.
17. Нахождение нормального Гауссова поля гиперповерхности.
18. Нахождение первой фундаментальной формы поверхности.
19. Вычисление длины кривой на поверхности.
20. Вычисление углов между кривыми на поверхности. Нахождение локсодромы на поверхности.
21. Вычисление площади («объёма») поверхности.
22. Вычисление второй фундаментальной формы гиперповерхности.
23. Вычисление матрицы основного оператора, полной и средней кривизны для гиперповерхности в трёхмерном пространстве.
24. Вычисление главных кривизн и главных направлений для гиперповерхности в точке в трёхмерном пространстве.
25. Классификация точек на гиперповерхности в трёхмерном пространстве.
26. Вычисление нормальной кривизны.
27. Вычисление асимптотических линий и линий кривизны на гиперповерхности.