Единственность разложения функции в степенной ряд

Теорема 1 (единственность разложения в степенной ряд).

Если сумма степенного ряда равна функции $f(x)$ для $x \in (-R, R)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,}$$

Единственность разложения функции в степенной ряд

то

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

Ряд Тейлора в точке x=0

т.е.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение функции в ряд Тейлора

Теорема 2 (о разложении функции в ряд Тейлора).

Пусть

- функция $f(x)$ определена и **бесконечно много раз дифференцируема** на $(-R, R)$;
- все ее **производные равномерно ограничены** на $(-R, R)$, т.е.

существ. число $M > 0$ т.ч. для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < M,\ x \in (-R, R),$$

Разложение функции в ряд Тейлора

Тогда **ряд Тейлора функции** $f(x)$ **сходится к этой функции** для любого $x \in (-R, R)$, т.е.

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad x \in (-R, R)}$$

Разложение функции в ряд Тейлора

или, что тоже самое:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + .. +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ..., \quad x \in (-R, R)$$

Без док-ва.

Пример разложения в ряд по степеням x функции $y = \sin x$

Пример 1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sin x$ и определить обл. его сход-ти.

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пример разложения в ряд по степеням x функции $y = \sin x$

Функция $f(x) = \sin x$ беск. много раз дифференц. на $\mathbb{R}$ и все ее производные равномерно огранич. на $\mathbb{R}$: $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 \Rightarrow$ по теореме 2

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}}$$

Примеры разложения в ряд по степеням x функций $y = \cos x$, $y = \operatorname{arctg} x$

Примеры 2, 3. Разложить в ряд по степеням x функции $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$.

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x \in (-1,1]}$$

Примеры разложения в ряд по степеням x функции $y = \ln(1 + x)$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \ln(1 + x)$ и определить обл. его сходимости.

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,}$$

$$x \in (-1,1]$$

Пример разложения в ряд по степеням x функции $y = e^x$

Пример 5. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = e^x$ и определить обл. его сход-ти.

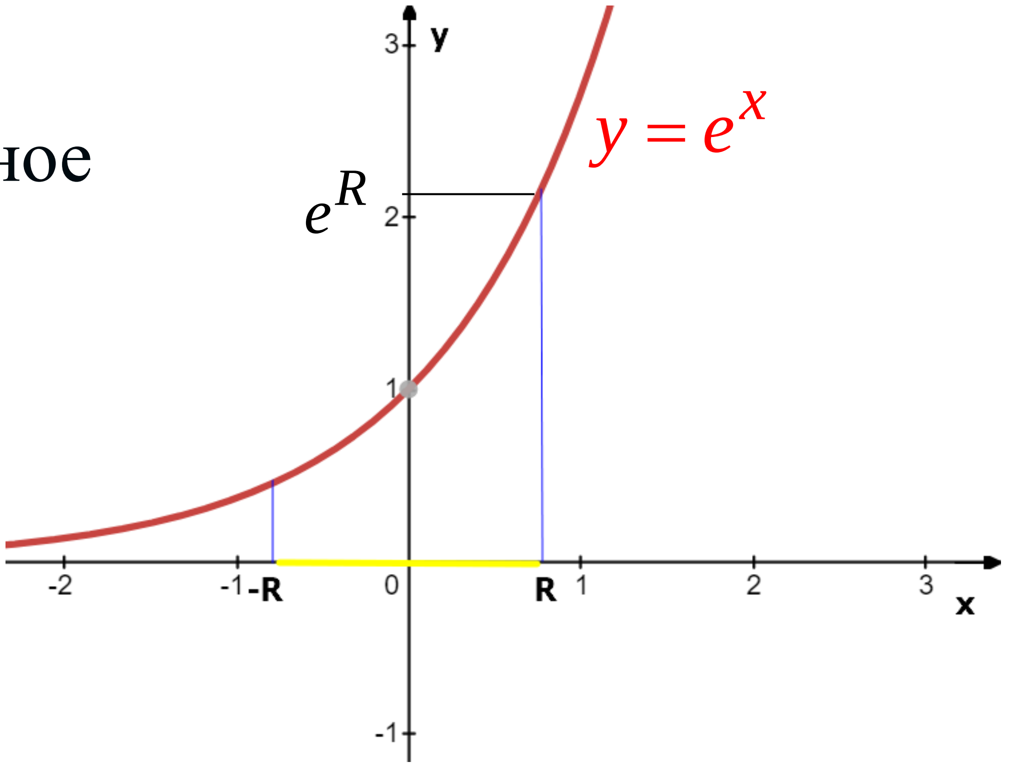
Функция $f(x) = e^x$ беск. много раз дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow$
$f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow$

ряд Тейлора функции $f(x) = e^x$ равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Пример разложения в ряд по степеням x функции $y = e^x$

Пусть $x \in (-R, R)$, где R – произвольное положит. число.



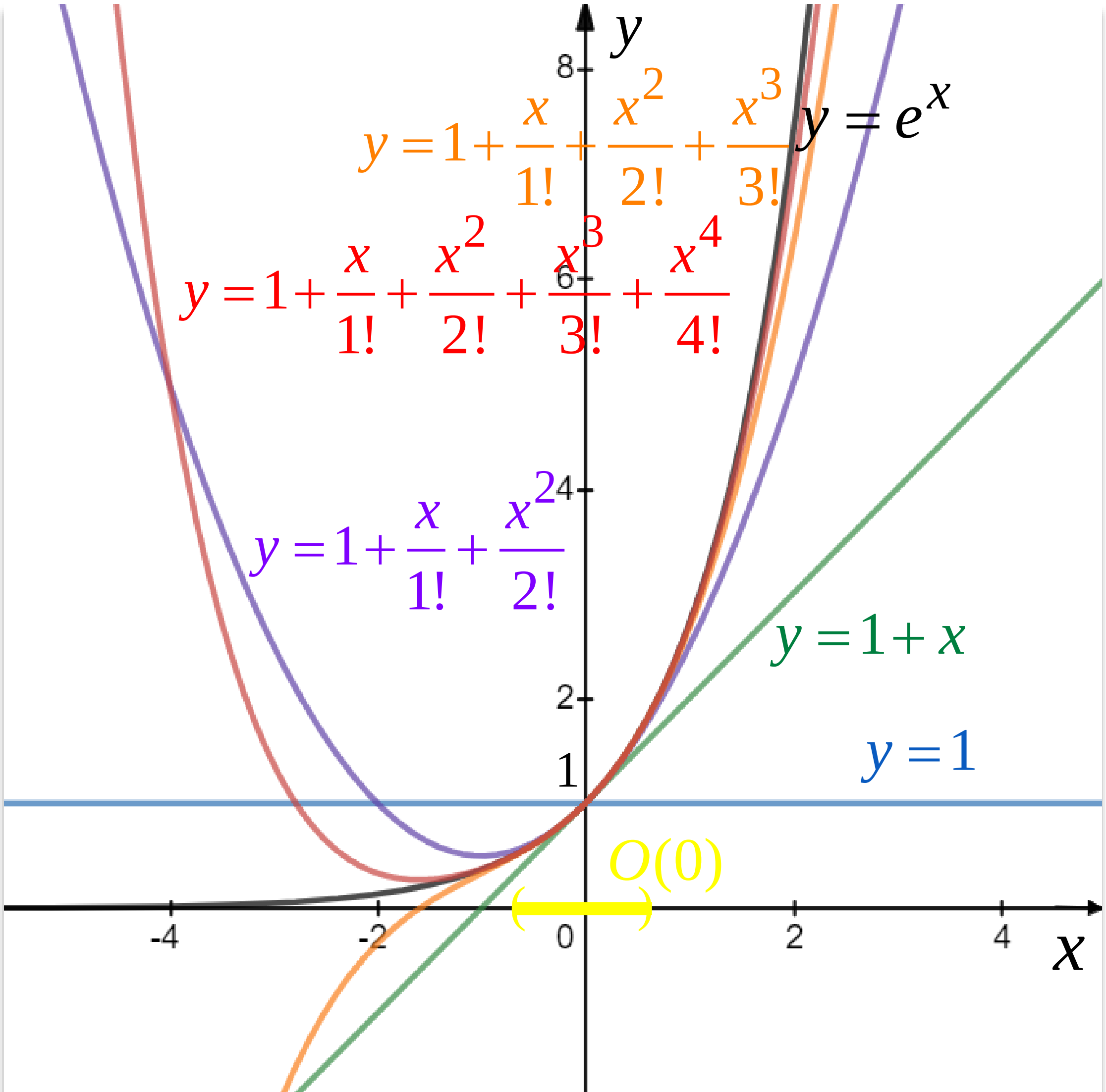
Тогда

$$\left|f^{(n)}(x)\right| =$$
$$= |e^x| = e^x < e^R$$

Пример разложения в ряд по степеням x функции $y = e^x$

$\Rightarrow$ по теореме 2, функция $f(x) = e^x$ равна своему ряду Тейлора для любого $x \in (-R, R)$, а значит, ввиду произвольности $R > 0$ и для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}}$$



Ряд сходится хорошо только в окрестности $O(0)$ точки $x = 0$.

Примеры разложения в в ряд по степеням x функции $y = (1+x)^\alpha$

<u>Пример 6</u>. Функция $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, раскладывается в ряд по степеням x следующим образом (без док-ва):

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots\\ &\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots\end{aligned}}$$

$$x \in (-1,1)$$

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

Пример 7. Вычислить приближенно число π с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

Используем разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x \in (-1,1]$$

Подставим $x = 1$:

$$45^0 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

$$\Rightarrow \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} + \ldots \Rightarrow$$

знакочередующийся ряд

$$\boxed{S = S_n + R_n} \quad \boxed{S \approx S_n} \quad |R_n| < b_{n+1} < \varepsilon$$

$$b_{n+1} = \frac{4}{2(n+1)+1} < \varepsilon = 0.01 \Rightarrow 2n+3 > 400 \Rightarrow$$

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

$n > 198.5 \quad S \approx S_{199}, \ |R_{199}| < \varepsilon$

$$S_{199} = \sum_{k=0}^{199} (-1)^k \frac{4}{2k+1} = \text{[посчитано в Exel]} = 3{,}136593 \approx \approx 3.14$$

Таким образом, $\pi \approx 3.14 \pm 0.01$

Лаборат. работа (упр.): вычислить при помощи формулы на слайде 11 приближ. число $\sin 1^0$ с точностью до $\varepsilon_1 = 0.001, \varepsilon_2 = 0.0001$.

Применение степенных рядов к нахождению «неберущихся» интегралов

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^x \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{x}dx =$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right)dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots;$$

<u>Лаборат. работа (упр.)</u>: вычислить приближенно при помощи формулы на слайде 17 интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.01, \varepsilon_2 = 0.001$.

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

Можно рассматривать ряд Тейлора беск. много раз дифференцируемой функции $f(x)$ на $(x_0 - R, x_0 + R)$ в любой точке $x = x_0$.

$$\boxed{\begin{aligned} T[f, x_0] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \end{aligned}}$$

Разложение функции в ряд Тейлора

Теорема 3 (о разложении функции в ряд Тейлора в точке $x = x_0$).

Пусть

- функция $f(x)$ определена и **бесконечно много раз дифференцируема** на $(x_0 - R, x_0 + R)$;
- все ее **производные равномерно ограничены** на$(x_0 - R, x_0 + R)$.

Разложение функции в ряд Тейлора

Тогда **ряд Тейлора функции** $f(x)$ в точке $x = x_0$ **сходится к этой функции**, т.е.

$$f(x) = T[f, x_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Пример разложения в ряд по степеням $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})$ функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$

Пример 5. Разложить в ряд по степеням $(x-1)$ функцию $f(x)=e^x$ и определить область сходимости этого ряда.

Проверить условия теоремы 3 для $f(x)=e^x$ беск. на (x_0-R, x_0+R) для $x_0=1$ и произвольного $R>0$ сам-но (упр.)

$$f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=e \Rightarrow$$

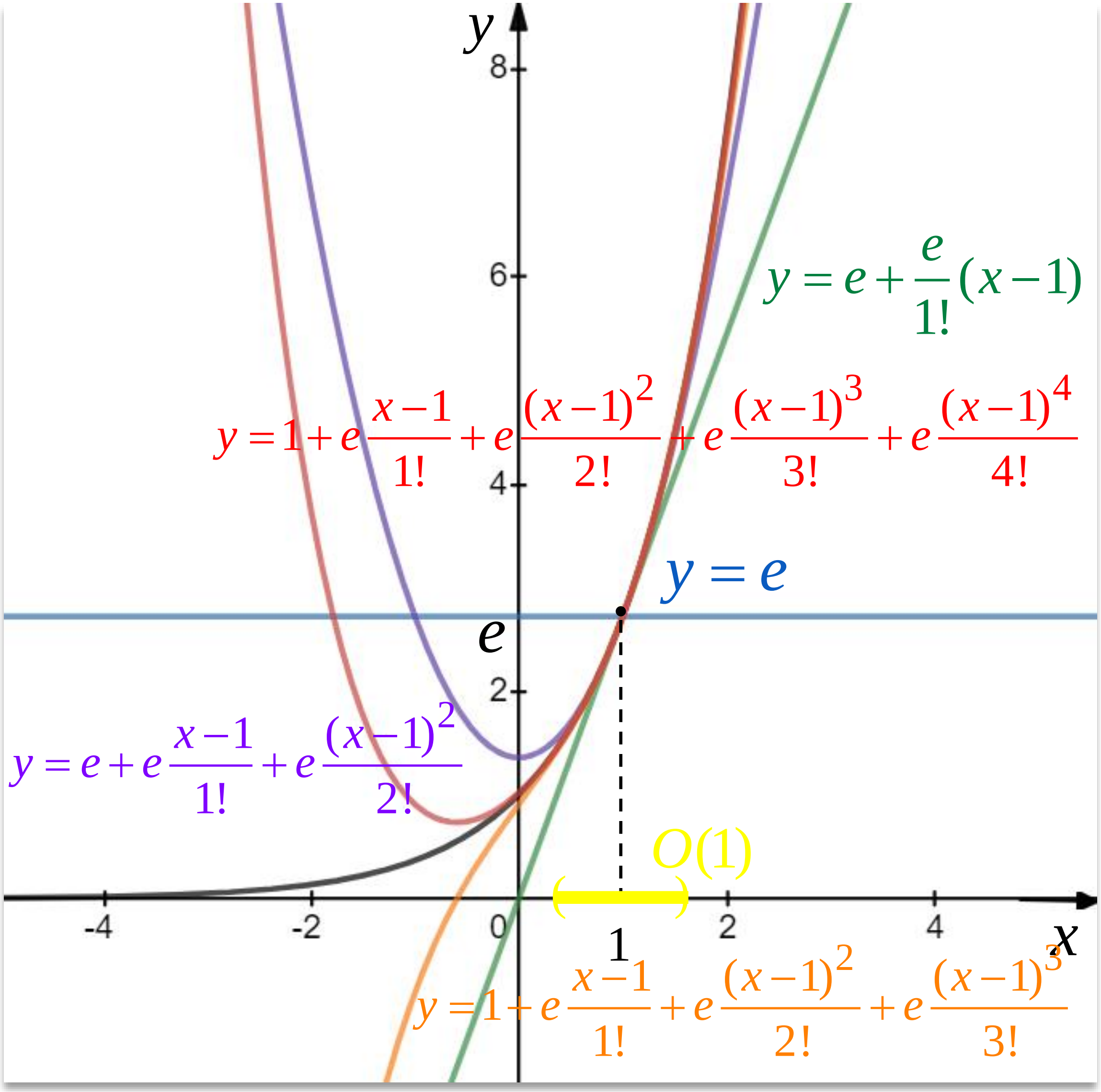
Пример разложения в ряд по степеням $(x-1)$ функции $y=e^x$

$\Rightarrow$ по теореме 3 для $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, а ввиду произвольности $R > 0$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ есть равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}\left(x-1\right)^n$$

Или, что тоже самое,

$$e^x=e+e\frac{\left(x-1\right)}{1!}+e\frac{\left(x-1\right)^2}{2!}+\ldots+e\frac{\left(x-1\right)^n}{n!}+\ldots$$



Ряд сходится хорошо только в окрестности точки $x = 1$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ определена и $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ **раз дифф-ма** на (x_0-R, x_0+R). Тогда для любого $x\in(x_0-R, x_0+R)$ справедливо равенство

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ +\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},}$$

где $c\in[x_0, x]$

Пример разложения многочлена по степеням $(x - x_0)$

<u>Пример 6</u>. Разложить по степеням $(x-2)$ функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \qquad f(2) = 11$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \qquad f'(2) = 7$$

$$f''(x) = 6x - 4 \qquad f''(2) = 8$$

$$f'''(x) = 6 \qquad f'''(2) = 6$$

$$f^{IV}(x) = 0 \Rightarrow f^{IV}(c) = 0 \text{ для любого } c \in [2, x]$$

Пример разложения многочлена по степеням $(x - x_0)$

Следовательно, по формуле Тейлора для $n = 3$

$$f(x) = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 +$$

$$+ \cancel{\frac{f^{(4)}(c)}{(4)!}}^{\,0}(x-2)^4 =$$

$$= 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3$$