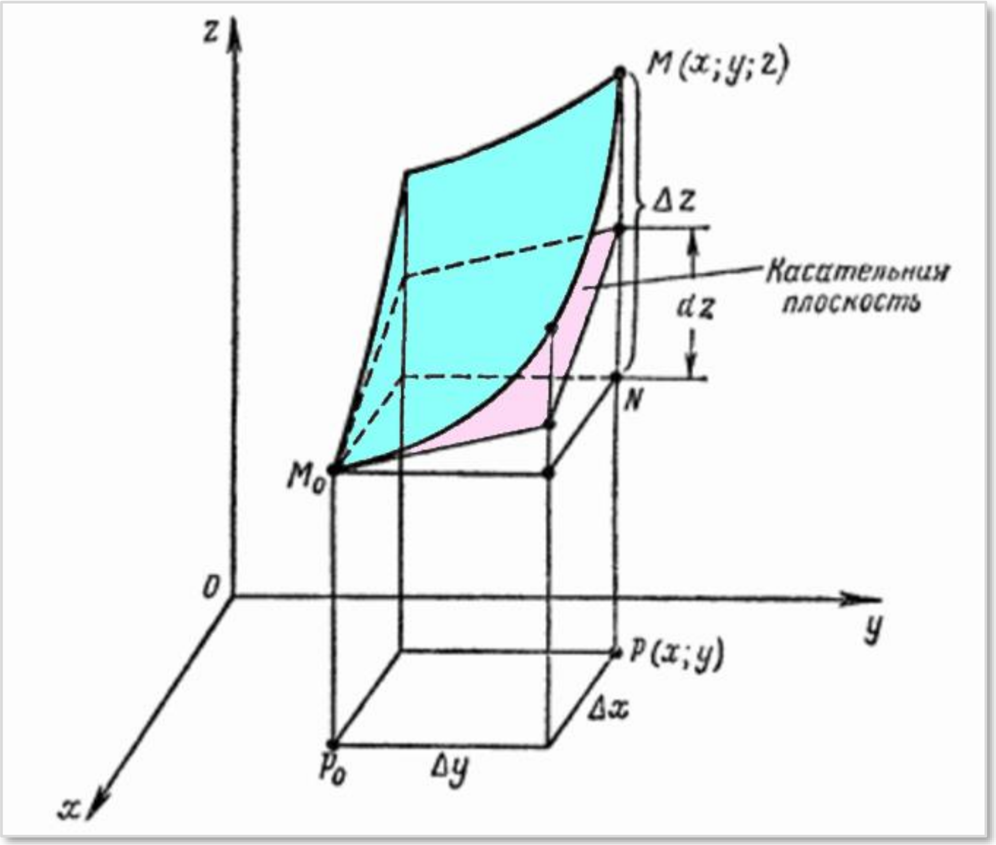
Уравнение касательной плоскости

Теорема. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, $(P_0(x_0, y_0))$ и дифференцируема в точке P_0.

Тогда **уравнение касательной плоскости к поверхности** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\left(P_0(x_0, y_0)\right)$:

$$\boxed{z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} (y - y_0)}$$

Уравнение касательной плоскости
Геометрическая иллюстрация



Изображение взято из учебника Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление т.1

$$\Delta z_{касат.} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \Delta y$$

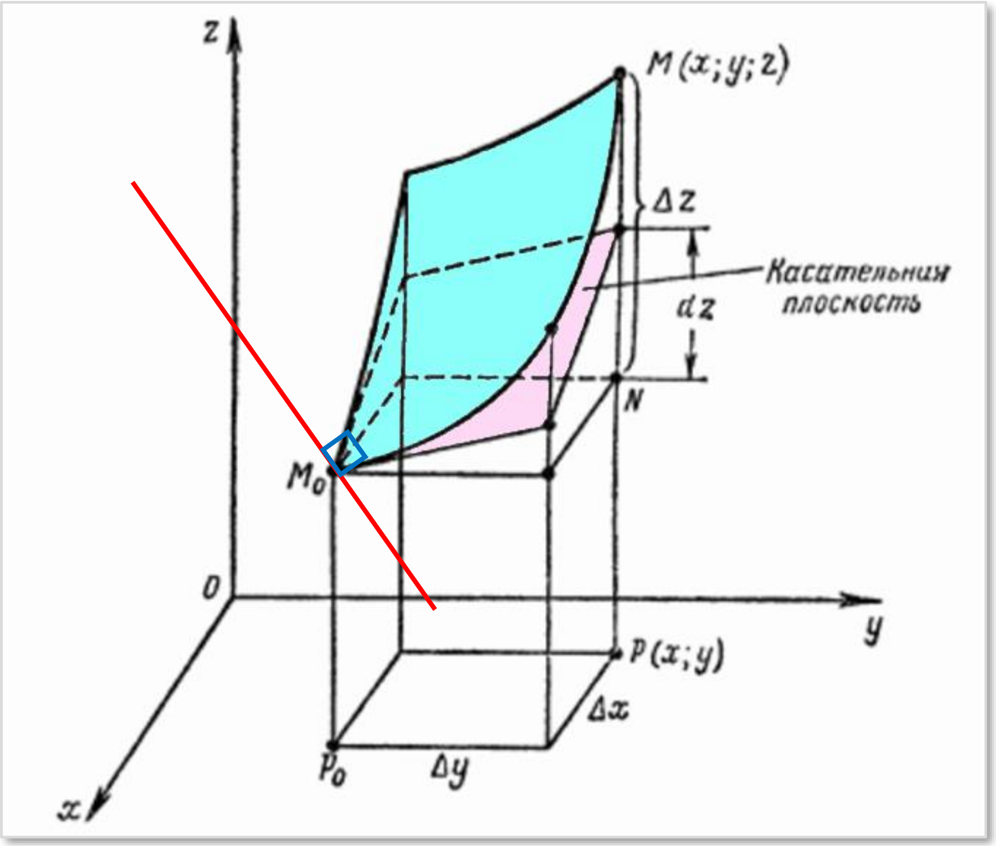
$$\boxed{\Delta z_{касат.} = dz}$$

Уравнение нормали

А **уравнение нормали к поверхности** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\left(P_0(x_0, y_0)\right)$:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

Уравнение касательной плоскости. Геометрическая иллюстрация



Изображение взято из учебника Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление т.1

Уравнение касательной плоскости и нормали. Пример

Пример. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(0,0)$.

Решение. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Уравнение касательной плоскости и нормали. Пример

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} (y - y_0) \Leftrightarrow$$

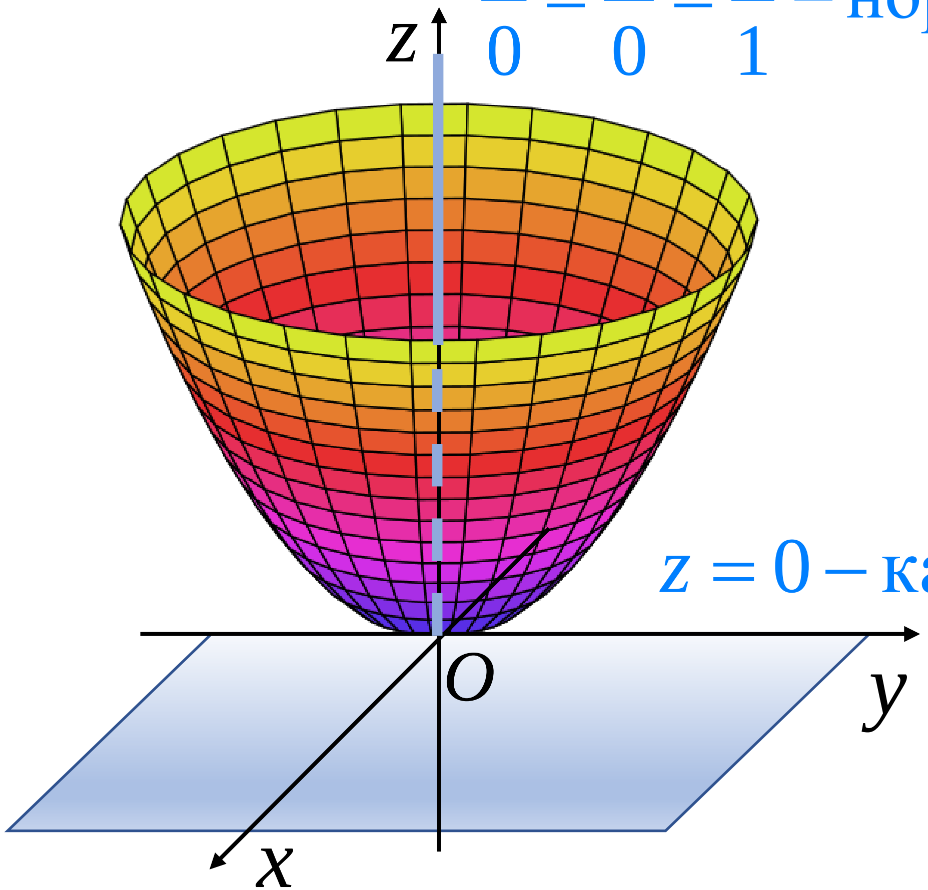
$$z = 0 - \text{уравнение касательн. плоскости.}$$

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \ (\text{ось } Oz) - \text{уравнение нормали}$$

Уравнение касательной плоскости и нормали

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}-\text{нормаль}$$



$$z=0-\text{касательная}$$