Пример решения варианта домашней контрольной № 2. «Предикаты (части 1,2,3)»

Условия

1) А) Равносильны ли формулы $F_1 = (\forall x)F(x) \to (\exists x)G(x)$ и $F_2 = (\exists x)\big(F(x) \to G(x)\big)$?
   Б) Равносильны ли формулы $F_1 = (\forall x)(\exists y)(F(x,y) \land G(x,y))$ и $F_2 = (\forall x)(\exists y)F(x,y) \land (\forall x)(\exists y)G(x,y)$?
2) Привести к сколемовской нормальной форме $\neg[(\forall x)(\exists y)[P(x,y) \to Q(y)]]$.
3) Показать, что следующее рассуждение нелогично.
   Некоторые студенты любят своих преподавателей. Никто не любит невежественных людей. Следовательно, есть невежественные преподаватели.
4) Записать в виде формулы сигнатуры $< \boldsymbol{R}, P(x), Q(x,y) >$ предикат: "Существует не менее двух целых чисел ", где $P(x)$ – " x – целое число ", $Q(x,y)$ – " x равен y ".
5) Доказать методом резолюций, что G является логическим следствием формул F_i: $F_1 = (\forall x)\big[P(x) \to (\exists y)[Q(y) \land S(x,y)]\big]$, $F_2 = (\exists x)\big[R(x) \lor (\forall y)\neg[\neg Q(y) \to S(x,y)]\big]$, $F_3 = (\exists x)P(x)$, $G = (\exists x)[\neg P(x) \lor R(x)]$.
6) Доказать логичность рассуждения.
   (Сорит Л. Кэррола).
   (1) Из всех птиц только страусы достигает 9 футов роста. (2) В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня. (3) Ни один страус не питается пирогами с начинкой. (4) У меня нет птиц, которые бы не достигали 9 футов роста. Следовательно, ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой. Взять в качестве основного множества множество птиц.
7) Является ли формула F выполнимой, логически общезначимой, логически противоречивой?
   А) $F = (\forall x)(P(x) \to (\forall y)P(y))$
   Б) $F = P(x) \to (\forall y)P(y)$
   В) $T = (\forall x)(P(x) \to (\exists y)P(y))$
   Г) $R(x) = P(x) \to (\exists y)P(y)$

Некоторые законы логики предикатов

22) $(\forall x)\big(F(x) \wedge G(x)\big)$ равносильна $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x)$,

23) $(\exists x)\big(F(x) \vee G(x)\big)$ равносильна $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$,

24) $(\forall x)(\forall y)F(x,y)$ равносильна $(\forall y)(\forall x)F(x,y)$,

25) $(\exists x)(\exists y)F(x,y)$ равносильна $(\exists y)(\exists x)F(x,y)$,

26) $\neg(\forall x)F(x)$ равносильна $(\exists x)\neg F(x)$,

27) $\neg(\exists x)F(x)$ равносильна $(\forall x)\neg F(x)$,

28) $(\forall x)(F(x) \vee G)$ равносильна $(\forall x)\ F(x) \vee G$,

29) $(\exists x)(F(x) \wedge G)$ равносильна $(\exists x)\ F(x) \wedge G$,

30) $(\forall x)\ F(x)$ равносильна $(\forall z)\ F(z)$,

31) $(\exists x)\ F(x)$ равносильна $(\exists z)\ F(z)$.

Решения

№1. А) Равносильны ли формулы $F_1 = (\forall x)F(x) \to (\exists x)G(x)$ и $F_2 = (\exists x)\big(F(x) \to G(x)\big)$?

Решение:

$F_1 = (\forall x)F(x) \to (\exists x)G(x)$ |=| Раскроем импликацию |=|

|=| $\neg(\forall x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$ |=| Закон 26 |=|

|=| $(\exists x)\neg F(x) \vee (\exists x)G(x)$ |=| Закон 23 |=|

|=| $(\exists x)\big(\neg F(x) \vee G(x)\big)$ |=| Обратная импликация |=|

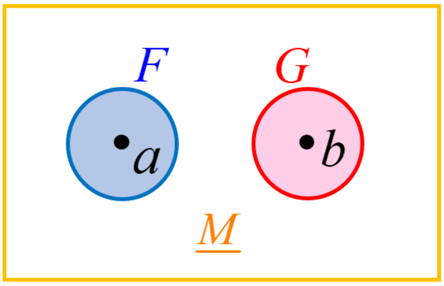
|=| $(\exists x)\big(F(x) \to G(x)\big) = F_2$

Ответ: Формулы F_1 и F_2 равносильны.

Б) Равносильны ли формулы $F_1 = (\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)$ и $F_2 = (\forall x)\big(F(x) \to G(x)\big)$?

Решение:

Построим интерпретацию (модель) $\underline{M} = \langle M; \sigma\rangle, M = \{a, b\}, \sigma = \langle F, G\rangle$, такую, что на этой модели $F_1 = 1, F_2 = 0$.



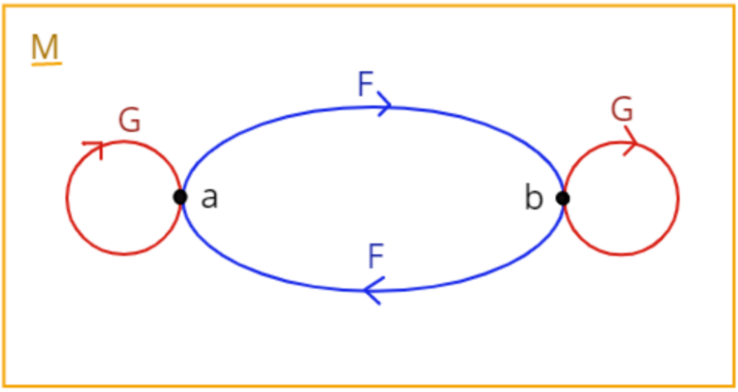
$F(a) = 1, F(b) = 0, G(a) = 0, G(b) = 1.$

Ответ: Формулы F_1 и F_2 не равносильны.

В) Равносильны ли формулы $F_1 = (\forall x)(\exists y)(F(x,y) \wedge G(x,y))$ и $F_2 = (\forall x)(\exists y)F(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)G(x,y)$?

Решение:

Построим интерпретацию (модель) $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle, M = \{a, b\}, \sigma = \langle F, G \rangle,$ такую, что на этой модели $F_1 = 0, F_2 = 1.$



$F(a,b) = F(b,a) = 1, F(a,a) = F(b,b) = 0,$

$G(a,b) = G(b,a) = 0, G(a,a) = G(b,b) = 1.$

Ответ: Формулы F_1 и F_2 не равносильны.

№2. Привести к сколемовской нормальной форме
$\neg[(\forall x)(\exists y)[P(x,y) \to Q(y)]]$

Решение:

$\neg[(\forall x)(\exists y)[P(x,y) \to Q(y)]]$ |=| Раскроем импликацию |=|

|=| $\neg(\forall x)\big[(\exists y)[\neg P(x,y) \vee Q(y)]\big]$ |=| Закон 26 |=|

|=| $(\exists x)\neg(\exists y)[\neg P(x,y) \vee Q(y)]$ |=| Закон 27 |=|

$|=|\ (\exists x)(\forall y)\neg[\neg P(x,y) \vee Q(y)]\ \ |=|$ Заносим отрицание $|=|$
$|=|\ (\exists x)(\forall y)[P(x,y) \wedge \neg Q(y)]\ |=|$ Вычеркиваем $\exists$: замена $x = c \sim$
$\sim(\forall y)[P(c,y) \wedge \neg Q(y)]$

Ответ: $(\forall y)[P(c,y) \wedge \neg Q(y)]$

№3. Показать, что следующее рассуждение нелогично.
(1) Некоторые студенты любят своих преподавателей. (2) Никто не любит невежественных людей. (3) Следовательно, есть невежественные преподаватели.

Решение:

Возьмем в качестве основного множества M множество людей.

Пусть $P(x) = 1$: "x – студент", $D(x) = 1$: "x – преподаватель",
$Q(x) = 1$: "x – невежественный", $L(x,y) = 1$: "x любит y".

Тогда
(1) F_1: $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x,y))]$
(2) F_2: $(\forall x)(\forall y)[Q(y) \to \neg L(x,y)]$
(3) G: $(\exists x)[D(x) \wedge Q(x)]$

Возьмем отрицание G:

$$\neg\mathrm{G} = \neg(\exists x)[D(x) \wedge Q(x)] |=| (\forall x)[\neg D(x) \vee \neg Q(x)]$$

Построим интерпретацию (модель) $\underline{M} = \langle M; \sigma\rangle$, $M = \{a, b, c\}$, $\sigma = \langle Q, P, D, L\rangle$, такую, что на этой модели $F_1 = F_2 = 1, \mathrm{G} = 0$.

Пусть

$P(a) = 1,\ P(b) = 0,\ P(c) = 0,$
$D(a) = 0,\ D(b) = 1,\ D(c) = 0,$
$Q(a) = 0,\ Q(b) = 0,\ Q(c) = 1,$
$L(a,b) = 1,\ L(x,y) = 0$, если $x \neq a$ или $y \neq b$

Тогда, как легко понять, $F_1 = F_2 = 1, \mathrm{G} = 0$.

Ответ: Данное рассуждение нелогично.

№4. Записать в виде формулы сигнатуры $< \boldsymbol{R}, P(x), Q(x,y) >$ предикат: “Существует не менее двух целых чисел ”, где $P(x)$ – “ x – целое число ”, $Q(x,y)$ – “x равен y ”.

Решение:

F - “Существует не менее двух целых чисел ”,

$P(x) = 1$: “ x – целое число ”,

$P(y) = 1$: “ y – целое число ”,

$Q(x,y) = 1$: “ x равен y ”.

“Существует хотя бы два неравных целых числа“:

$F = (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge P(y) \ \wedge \neg Q(x,y)]$

Ответ: $F = (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge P(y) \ \wedge \neg Q(x,y)]$

№5. Доказать методом резолюций, что G является логическим следствием формул F_i:

$F_1 = (\forall x)[P(x) \rightarrow \ (\exists y)(Q(y) \wedge S(x,y))]$,

$F_2 = (\exists x)[R(x) \vee \ (\forall y)\neg(Q(y) \wedge S(x,y))]$, $\qquad F_3 = (\exists x)P(x)$,

$G = (\exists x)[\neg P(x) \vee R(x)]$.

Решение:

Составим множество $\{F_1,\ F_2,\ F_3,\ \neg \mathrm{G}\}$. Каждую из формул приведем к сколемовской нормальной форме. Получим соответственно формулы:

F_1: $(\forall x)[P(x) \rightarrow \ (\exists y)(Q(y) \wedge S(x,y))] |{=}|$

$|{=}|\ (\forall x)[\neg P(x) \vee \ (\exists y)(Q(y) \wedge S(x,y))] |{=}|$

$|{=}|\ (\forall x)[(\exists y)(Q(y) \wedge S(x,y)) \vee \neg P(x)] |{=}|$ Закон 29 $|{=}|$

$|{=}|\ (\forall x)(\exists y)[(Q(y) \wedge S(x,y)) \vee \neg P(x)] |{=}|$

$|{=}|\ (\forall x)[(Q(y) \wedge S(x,y)) \vee \neg P(x)] \sim$

$\sim (\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(a)) \wedge (\neg P(x) \vee S(x,a))]$

F_2: $(\exists x)[R(x) \vee \ (\forall y)\neg(Q(y) \wedge S(x,y))] |{=}|$

$|{=}| \ (\exists x)[R(x) \vee \ (\forall y)\neg(Q(y) \wedge S(x,y))]|{=}|$ Закон 28 $|{=}|$

$|{=}| \ (\exists x)(\forall y)[R(x) \vee (Q(y) \wedge S(x,y))]|{=}|$

$|{=}| \ (\exists x)(\forall y)[[R(x) \vee \neg Q(y)] \wedge [R(x) \vee \neg S(x,y)]]\sim$

$\sim (\forall y)[[R(b) \vee \neg Q(y)] \wedge [R(b) \vee \neg S(b,y)]]$

$F_3: (\exists x)P(x) \sim P(c)$

$\neg G: \neg(\exists x)[\neg P(x) \vee R(x)] \ |{=}|$ Закон 27 $|{=}|(\forall x)\neg[\neg P(x) \vee R(x)] \ |{=}|$
$|{=}| \ (\forall x)[P(x) \wedge \neg R(x)]$

Множество S будет состоять из семи дизъюнктов:

$$S = \{\neg P(x) \vee Q(a), \neg P(u) \vee S(u,a), R(b) \vee \neg Q(y),$$
$$R(b) \vee \neg S(b,z), P(c), P(v), \neg R(v)\}$$

Построим резолютивный вывод:

1. $\neg P(x) \vee Q(a)$
2. $\neg P(u) \vee S(u,a)$
3. $R(b) \vee \neg Q(y)$
4. $R(b) \vee \neg S(b,z)$
5. $P(c)$
6. $P(v)$
7. $\neg R(v)$
8. $Q(a)\ \{x = v\}$ из 1, 6
9. $\neg Q(y)\ \{v = b\}$ из 3, 7
10. $\blacksquare\{y = a\}$ из 8, 9

Ответ: G является логическим следствием формул F_i.

№6. Доказать логичность рассуждения.
(1) Из всех птиц только страусы достигает 9 футов роста. (2) В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня. (3) Ни один страус не питается пирогами с начинкой. (4) У меня нет птиц, которые бы не достигали 9 футов роста. (5) Следовательно, ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой. Взять в качестве основного множества множество птиц.

Решение:

Пусть $M = \ \{\text{множество птиц}\}$
$\text{С}(x) = 1 \Leftrightarrow x -$ страус
$\text{Н}(x) = 1 \Leftrightarrow x -$ достигает 9 футов роста
$\text{В}(x) = 1 \Leftrightarrow x -$ птица в этом птичнике
$M(x) = 1 \Leftrightarrow x -$ птица, принадлежащая мне
$P(x) = 1 \Leftrightarrow x$ питается пирогами с начинкой

$F_1 = \forall x(H(x) \rightarrow C(x)) \equiv \forall x(\neg H(x) \vee C(x))$. Дизъюнкт: $\neg H(x) \vee C(x)$.
$F_2 = \neg\exists x(\text{В}(x) \wedge \neg M(x) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee M(x))$. Дизъюнкт: $\neg B(y) \vee M(y)$.
$F_3 = \neg\exists x(\text{С}(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg\text{С}(x) \vee \neg P(x))$. Дизъюнкт: $\neg\text{С}(u) \vee \neg P(u)$.
$F_4 = \neg\exists x(M(x) \wedge \neg\text{H}(x) \equiv \forall x(\neg M(x) \vee \text{H}(x))$. Дизъюнкт: $\neg M(v) \vee \text{H}(v)$
$G = \neg\exists x(B(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee \neg P(x))$
$\neg G = \exists x(B(x) \wedge P(x)) \sim B(a) \wedge P(a)$. Дизъюнкты: $B(\text{a}), P(a)$.

Выведем пустой дизъюнкт из множества дизъюнктов

$S = \{\neg H(x) \vee C(x), \neg B(y) \vee M(y), \neg\text{С}(u) \vee \neg P(u),$
$\neg M(v) \vee \text{H}(v), B(a), P(a)\}$

$\neg H(x) \vee C(x), \neg B(y) \vee M(y), \neg C(u) \vee \neg P(u), \neg M(v) \vee H(v), B(a), P(a);$

$\sigma_1 = \{u = x\}, \neg H(x) \vee \neg P(x)$ $\quad \sigma_2 = \{y = a\}, M(a)$

$\sigma_3 = \{x = a\}, \neg H(a)$

$\sigma_4 = \{v = a\}, \neg M(a)$

$\sigma_5 = \{y = a\}, \neg B(a)$

$\square$

$\neg H(x) \vee \neg P(x),\ M(a),\ \neg H(a),\ \neg M(a),\ \neg B(a),\ \square$

№7. Является ли формула F выполнимой, логически общезначимой, логически противоречивой?

А) $F = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)P(y))$
Б) $H(x) = P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)$
В) $T = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)P(y))$
Г) $R(x) = P(x) \rightarrow (\exists y)P(y)$

Напомним вначале определения из лекций.

Формула F сигнатуры σ называется *выполнимой [истинной] на модели* $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$, если она истинна при некоторой [соответственно, при любой] интерпретации в эту модель. Формула F называется просто *выполнимой,* если она выполнима на некоторой модели. Заметим, что для замкнутых формул понятие выполнимости и на модели и истинности на модели совпадают.

Формула F называется *логически общезначимой*, если она истинна на любой модели сигнатуры σ. Наконец, формула F называется логически *противоречивой*, если формула $\neg F$ логически общезначима.

Решение:

А) Построим интерпретацию (модель) $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$, $M = \{a\}$, $\sigma = \langle P \rangle$, такую, что на этой модели замкнутая формула F истинна. Для этого достаточно определить $P(a) = 1$. Следовательно, формула F **выполнима**.

Покажем, что формула $\neg F$ тоже выполнима. Поскольку формула

$$\neg F \equiv (\exists x)\big(P(x) \wedge \neg(\forall y)P(y)\big) \equiv (\exists x)\big(P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)\big)$$

$$\equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$$

имеет СНФ $G = P(a) \wedge \neg P(b)$, которая выполима или невыполнима одновременно с формулой $\neg F$, то нам необходимо построить такую модель $\underline{N} = \langle N; \sigma' \rangle$, где $\sigma' = \langle P, a, b \rangle$, что на ней G истинна. Для этого достаточно взять

$$N = \{a, b\}, P(a) = 1, P(b) = 0$$

Следовательно, формула $\neg F$ выполнима, то есть существует модель, на которой формула F ложна. Следовательно, формула F **не является логически общезначимой**. Кроме того, так как существует модель, для которой F истинна, т.е. $\neg F$ ложна, то формула $\neg F$ не является логически общезначимой, а значит, формула F **не является логически противоречивой**.

Б) На модели $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$, $M = \{a\}$, $\sigma = \langle P \rangle$, $P(a) = 1$, формула $H(x)$ истинна при $x = a$. Следовательно, формула $H(x)$ выполнима на этой модели, т.е. просто **выполнима**.

Формула $\neg H(x) \equiv P(x) \wedge \neg(\forall y)P(y) \equiv (\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$ имеет СНФ $K(x) = P(x) \wedge \neg P(b)$, которая выполнима или невыполнима одновременно с формулой $\neg H(x)$. Очевидно, формула $K(x)$ истинна на модели $\underline{N} = \langle N; \sigma' \rangle$

при $x = a$, т.е. выполнима на этой модели, а значит, просто выполнима. Следовательно, формула $\neg H(x)$ тоже выполнима. Это значит, формула $H(x)$ ложна в некоторой модели для некоторой интерпретации свободной переменной x, а значит, эта формула не является **логически общезначимой**. Поскольку $\neg H(x)$ ложна в модели $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$ для некоторой интерпретации свободной переменной x, то формула $\neg H(x)$ не является логически общезначимой, а значит формула $H(x)$ **не является логически противоречивой**.

В) Покажем, что замкнутая формула T логически общезначима. Для этого докажем, что формула $\neg T$ логически противоречива, т.е. ложна на любой модели. По определению (см. теоретич. материал по методу резолюций в логике предикатов) это означает, что формула $\neg T$ *не имеет модели*. А это можно доказать, показав, что из множества *S* дизъюнктов, входящих в СНФ этой формулы, выводится пустой дизъюнкт (см. тот же теоретич. материал). Приведем формулу $\neg T$ к ПНФ, а затем к СНФ:

$$\neg T \equiv (\exists x)\big(P(x) \wedge \neg(\exists y)P(y)\big) \equiv (\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)\neg P(y)\big)$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge \neg P(y)) \sim (\forall y)(P(a) \wedge \neg P(y))$$

Тогда из множества $S = \{P(a), \neg P(y)\}$, очевидно, выводится пустой дизъюнкт (для этого достаточно взять наибольший общий унификатор

$\sigma = \{y = a\}$).

Таким образом, формула $\neg T$ не имеет модели, т.е. логически противоречива, и значит, формула T является **логически общезначимой.** Следовательно, последняя формула **выполнима** и не является **логически противоречивой.**

Г) Рассмотрим замыкание формулы $R(x)$. Им является формула T. Поскольку формула T логически общезначима, т.е. истинна на любой модели, то формула $R(x)$ тоже логически общезначима, а значит, выполнима и не логически противоречива.

Ответ: А), Б) выполнимы, не являются логически общезначимыми, не являются логически противоречивыми; В), Г) выполнимы, логически общезначимы, не являются логически противоречивыми.