Решение варианта из Контрольной №1 (ФЛВ)

Условия задач варианта

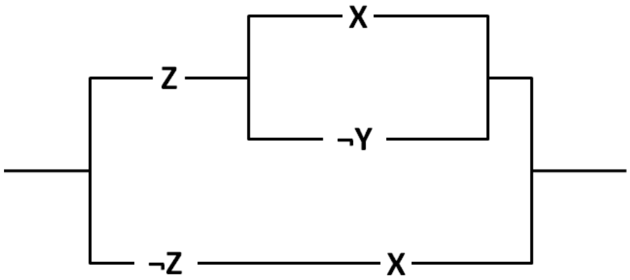
1. Равносильны ли формулы $F_1 = (X \Leftrightarrow Y) \land (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ и $F_2 = \neg X \lor Y$
2. Существует ли формула F такая, что $G = (\neg X \lor F \Rightarrow Y) \lor (\neg X \Leftrightarrow \neg Y)$ является тождественно истинной?

3а) Является ли формула G логическим следствием формул F_1, F_2 если $F_1 = \neg X \lor (\neg Y \lor Z \to X \land \neg Z)$, $F_2 = (X \lor \neg Z) \Leftrightarrow Y$, $G = Z \to \neg X \lor Y$?

3б) Является ли формула G логическим следствием формул F_1, F_2, F_3 если $F_1 = X \to (\neg Y \lor Z)$, $F_2 = (X \lor Y) \leftrightarrow \neg Z$, $F_3 = X \to \neg Y$, $G = Y \lor Z$?

4. Привести формулу $(\neg X \lor \neg Y) \leftrightarrow (Y \to Z)$ к ДНФ и КНФ при помощи законов логики высказываний, а также к СДНФ и СКНФ (если возможно). Привести ее к минимальной ДНФ двумя способами: при помощи карт Карно и при помощи минимального покрытия k-гранями булева куба.

5а) Упростить релейно-контактную схему, если это возможно.



5б) Построить наименьшую контактную схему, открывающую дверь при нажатии кнопок директора и хотя бы одного из заместителей, либо всех кнопок заместителей (всего у директора три заместителя). Записать соответствующую формулу логики высказываний.

6. Доказать методом резолюций, что формула G является логическим следованием формул F_1, F_2, где

$$F_1 = W \lor Z \to X \land Y, \qquad F_2 = X \to (Y \lor Z), \qquad G = X \to Y.$$

7. Выяснить, является ли полной система функций $\{\lor, \to\}$.
Дополнительно: является ли эта система независимой?
8. Найти многочлен Жегалкина, равносильный формуле $(X \lor Y \to \neg Z) \to X$.
Выразить через $\neg, \land, \lor$ булеву функцию $(XYV \oplus Z)(XY \oplus Z \oplus V)(Y \oplus Z)$.
Найти соответствующую минимальную ДНФ при помощи карт Карно.
9. Проверить логическое следование при помощи ФЛВ:
"*Если завтра будет жарко, то я надену шорты, если карман будет*

пришит. Завтра будет жарко, а карман не будет пришит. Следует ли отсюда, что я не надену шорты?"

10а) Доказать, что булевы функции 0,1 принадлежат замыканию класса $\{f(x,y),\neg\}$, где $f(x,y) = x \oplus \bar{y}$.

10б) Сведением к известным полным классам доказать полноту класса $\{\leftrightarrow,\wedge,0\}$.

11. Найдите формулу $F(A,C)$, зависящую только от A и C и являющуюся логическим следованием указанных формул: $\neg A \vee B, \neg B \wedge \neg C, C \to A$.

Решение задач

Приведем теорию, необходимую для решения задач 1,2,3,4.

Определение 1. **Формула логики высказываний** (ФЛВ) − выражение одного из двух видов:
1) атомарная формула;
2) $(F \wedge G), (F \vee G), (\neg F), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ − формулы логики высказываний.

Определение 2. Формулы F и G называются **равносильными**, если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значения истинности $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ совпадают.
Обозначение: $F \equiv G$ или $F = G$.

Определение 3. Формула F называется **тождественно истинной (тавтологией),** если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значение истинности $\varphi(F)$ равно 1 (т.е. $F \equiv 1$).

Определение 4. Формула F называется **тождественно ложной (противоречием),** если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значение истинности $\varphi(F)$ равно 0 (т.е. $F \equiv 0$).

Определение 5. Формула G называется логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если для любой интерпретации φ из того, что все значения $\varphi\ (F_1)$, $\varphi(F_2)$,…, $\varphi(F_n)$, истинны, следует, что значение $\varphi(G)$, истинно.

Теорема 1. Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ тогда и только тогда, когда $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow G \equiv 1$ (или, что тоже самое), $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G \equiv 0$, т.е. множество $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ невыполнимо.

Законы логики высказываний

$F \wedge 1 \equiv F$

$F \vee 1 \equiv 1$

$F \wedge 0 \equiv 0$

$F \vee 0 \equiv F$

Идемпотентность:

$F \wedge F \equiv F$

$F \vee F \equiv F$

Коммутативность:

$F \wedge G \equiv G \wedge F$

$F \vee G \equiv G \vee F$

Ассоциативность:

$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$

$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$

Дистрибутивность:

11) $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

12) $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$

Законы поглощения:

13) $F \land (F \lor H) \equiv F$

14) $F \lor (F \land H) \equiv F$

Закон противоречия:

15) $F \land \neg F \equiv 0$

Закон исключенного третьего:

16) $F \lor \neg F \equiv 1$

Законы де Моргана:

17) $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$

18) $\neg (F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$

Закон двойного отрицания:

19) $\neg\neg F \equiv F$

Выражение импликации:

20) $F \rightarrow G \equiv \neg F \lor G$

Выражение эквиваленции:

21) $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F)$

Задача 1

Равносильны ли формулы $\mathrm{F}_1 = (\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{Y}) \wedge (\neg\mathrm{Y} \Rightarrow \neg\mathrm{X})$ и $\mathrm{F}_2 = \neg\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}$

Решение:

Преобразуем формулы F_1 и F_2 при помощи законов ФЛВ:

$$F_1 = (X \Leftrightarrow Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow \neg X) \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Leftarrow Y) \wedge (\neg Y \Rightarrow \neg X) \equiv$$

$$\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (\neg\neg Y \vee \neg X) \equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \wedge (Y \vee \neg X) \equiv$$

[первая и последняя скобки эквивалентны]$\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)$

$$F_2 = \neg X \vee Y$$

Покажем, что $F_1 \neq F_2$. Для интерпретации φ такой, что $\varphi(X) = 0, \varphi(Y) = 1$, очевидно, что $\varphi(F_1) = 0, \varphi(F_2) = 1$.

Неравносильность F_1 и F_2 можно проверить при помощи таблицы истинности:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \Leftrightarrow Y$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$	F_1	F_2
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Задача 2

Существует ли формула F такая, что $G = (\neg X \vee F \Rightarrow Y) \vee (\neg X \Leftrightarrow \neg Y)$ является тождественно истинной?

Решение:

	X	Y	F	G
1	0	0	0,1	1
2	0	1	0,1	1
3	1	0	0	1
4	1	1	0,1	1

1) X = 0, Y = 0 => $G = (\neg 0 \vee F \to 0) \vee (\neg 0 \leftrightarrow \neg 0) = (1 \to 0) \vee 1 = 1$ для любого значения F.
2) X = 0, Y = 1 => $G = (\neg 0 \vee F \to 1) \vee (\neg 0 \leftrightarrow \neg 1) = (1 \to 1) \vee (1 \leftrightarrow 0) = 1$ для любого значения F.
3) X = 1, Y = 0 => $G = (\neg 1 \vee F \to 0) \vee (\neg 1 \leftrightarrow \neg 0) = (F \to 0) \vee (0 \leftarrow 1) = (F \to 0) \vee 0 = (F \to 0) = \neg F$
4) X = 1, Y = 1 => $G = (\neg 1 \vee F \to 1) \vee (\neg 1 \leftrightarrow \neg 1) = (F \to 1) \vee 1 = 1$ для любого значения F.
3) G = 1 <=> F = 0
Значит, такая функция F существует, например функция F = 0.
<u>Проверка</u>: $G = (\neg X \vee 0 \to Y) \vee (\neg X \leftrightarrow \neg Y) = (\neg X \to Y) \vee (\neg X \leftrightarrow \neg Y) = (X \vee Y) \vee ((\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y)) = X \vee Y \vee (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) =$ поглощение $= X \vee Y \vee (\neg X \wedge \neg Y) =$ дистрибутивность $= X \vee ((Y \vee \neg X) \wedge (Y \vee \neg Y)) = X \vee ((Y \vee \neg X) \wedge 1) = X \vee (Y \text{ v } \neg X) = X \vee \neg X \vee Y = (1 \vee Y) = 1$

Задача 3а

Является ли формула G логическим следствием формул F_1, F_2 если
$F_1 = \neg X \vee (\neg Y \vee Z \rightarrow X \wedge \neg Z)$, $F_2 = (X \vee \neg Z) \Leftrightarrow Y$, $G = Z \rightarrow \neg X \vee Y$?

Решение

F_1, F_2 |= G означает, что для любой интерпретации φ если $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = 1$, то $\varphi(G) = 0$. Кроме того F_1, F_2 |= G $\Leftrightarrow$ $F_1 \wedge F_2 \rightarrow G$ - тождественно истинна $\Leftrightarrow$ $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \neg G$ - тождественна ложь $\Leftrightarrow$ множетво $\{F_1, F_2, \neg G\}$ невыполнимо.
Пусть $F_1 = F_2 = 1$ и $G = 0$.
$G = 0 \Rightarrow Z = 1$ и $\neg X \vee Y = 0 \Rightarrow Z = 1, X = 1, Y = 0 \Rightarrow F_1 = 0 \vee (1 \rightarrow 0) = 0$
Мы пришли в противоречие с тем, что $F_1 = 1$. Значит $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ - противоречие (тождественная ложь). (Это то же самое, что множество $\{F_1, F_2, \neg G\}$ невыполнимо.) Таким образом, F_1, F_2 |= G.
Ответ: да, является.

Задача 3б

Является ли формула G логическим следствием формул F_1, F_2, F_3 если
$F_1 = X \rightarrow (\neg Y \vee Z)$, $F_2 = (X \vee Y) \leftrightarrow \neg Z$, $F_3 = X \rightarrow \neg Y$, $G = Y \vee Z$?

Решение

Пусть $F_1 = F_2 = F_3$ и $G = 0$.
Возьмем $X = 1$, тогда из $F_3 = 1$ имеем $Y = 0$. Подставим в G:
$G = 0 \vee Z = Z$; $G = 0 \Rightarrow Z = 0$. Подставим $X = 1, Y = 0, Z = 0$ в F_1, F_2 и F_3:

$F_1 = 1 \rightarrow (\neg 0 \vee 0) = 1 \rightarrow 1 = 1;$

$F_2 = ((1 \vee 0) \leftrightarrow \neg 0) = (1 \leftrightarrow 1) = 1;$

$F_3 = (1 \rightarrow \neg 0) = 1.$

Таким образом, мы нашли интерпретацию φ такую, что $\varphi(X)=1$, $\varphi(Y)=0$, $\varphi(Z)=0$ и при этом $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = 1$, а $\varphi(G) = 0$.
Ответ: нет, не является.

Задача 4

Привести формулу $(\neg X \vee \neg Y) \leftrightarrow (Y \to Z)$ к ДНФ и КНФ при помощи законов логики высказываний, а также к СДНФ и СКНФ (если возможно). Привести ее к минимальной ДНФ двумя способами: при помощи карт Карно и при помощи минимального покрытия k-гранями булева куба.

Решение

1. *Приведем к ДНФ и КНФ при помощи законов логики высказываний*

Алгоритм приведения к ДНФ:

1.1) Приведем к ДНФ.

Исключим эквиваленцию и импликацию

$$(\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}) = [\text{Импликация}] =$$
$$= (\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}) = [\text{Эквиваленция}] =$$
$$= [(\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \to (\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z})] \wedge [(\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}) \to (\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y})] = [\text{Импликация}] =$$
$$= [\neg(\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \vee (\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z})] \wedge [\neg(\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y})]$$

1) Занесем отрицание к атомарным формулам по законам де Моргана

$$[\neg(\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \vee (\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z})] \wedge [\neg(\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y})] =$$
$$= [(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) \vee (\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z})] \wedge [(\boldsymbol{Y} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y})]$$

2) Применим законы дистрибутивности

$$[(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) \vee \neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}] \wedge [(\boldsymbol{Y} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee \neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}] =$$

- $[(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) \vee \neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}] = [(\boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \wedge (\boldsymbol{Y} \vee \neg \boldsymbol{Y})] \vee \boldsymbol{Z} = [(\boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \wedge \mathbf{1}] \vee \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \vee \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}$
- $[(\boldsymbol{Y} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee \neg \boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y}] = [(\boldsymbol{Y} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{Y})] \vee \neg \boldsymbol{X} = [\mathbf{1} \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{Y})] \vee \neg \boldsymbol{X} = (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{Y}) \vee \neg \boldsymbol{X} = \neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{Y} \vee \neg \boldsymbol{X}$

$$= [\boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{Z}] \wedge [\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{Y} \vee \neg \boldsymbol{X}] = \neg \boldsymbol{Y} \vee [(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Z}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X})] =$$

- $[(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Z}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X})] = [\boldsymbol{X} \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X})] \vee [\boldsymbol{Z} \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X})] = [\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{X}] \vee [\boldsymbol{Z} \wedge \neg \boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{Z} \wedge \neg \boldsymbol{X}] = [\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z} \vee \mathbf{0}] \vee [\mathbf{0} \vee \boldsymbol{Z} \wedge \neg \boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z})$

$$= \neg \boldsymbol{Y} \vee (\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z}) - \text{ ДНФ}$$

1.2) Приведем к КНФ.

Раскроем скобки и получим КНФ

$$\neg \boldsymbol{Y} \vee (\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z})$$
$$= \neg \boldsymbol{Y} \vee [(\boldsymbol{X} \vee \neg \boldsymbol{X}) \wedge (\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Z}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{Z})] =$$
$$= \neg \boldsymbol{Y} \vee [\mathbf{1} \wedge (\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Z}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X}) \wedge \mathbf{1}] =$$
$$\neg \boldsymbol{Y} \vee [(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Z}) \wedge (\neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X})] = (\neg \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Z}) \wedge (\neg \boldsymbol{Y} \vee \neg \boldsymbol{Z} \vee \neg \boldsymbol{X})$$

2. *Найдем СДНФ и СКНФ*

Построим таблицу истинности для ДНФ

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg Z$	$X \wedge \neg Z$	$\neg X \wedge Z$	$\neg Y \vee (X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Z)$
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

СДНФ: $(X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0) \vee (X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^1) \vee (X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^1) \vee (X^1 \wedge Y^0 \wedge Z^0) \vee (X^1 \wedge Y^0 \wedge Z^1) \vee (X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^0) = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$

СКНФ: $(X^1 \vee Y^0 \vee Z^1) \wedge (X^0 \vee Y^0 \vee Z^0) = (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$

3. *Приведем формулу к минимальной ДНФ при помощи карт Карно*

Рассмотрим карту формулы

	Y	$\neg Y$	$\neg Y$	Y
X	0	1	1	1
$\neg X$	1	1	1	0
	Z		$\neg Z$	

Покроем закрашенную область прямоугольником 2×2 (желтый цвет)
Прямоугольнику соответствует формула $\neg Y$.

	Y	$\neg Y$	$\neg Y$	Y
X	0	1	1	1
$\neg X$	1	1	1	0
	Z		$\neg Z$	

Второму блоку (зеленый цвет) соответствует $X \wedge \neg Z$.

	Y	$\neg Y$	$\neg Y$	Y
X	0	1	1	1
$\neg X$	1	1	1	0
	Z		$\neg Z$	

Затем выделим область (голубой цвет), ей соответствует $\neg X \wedge Z$.

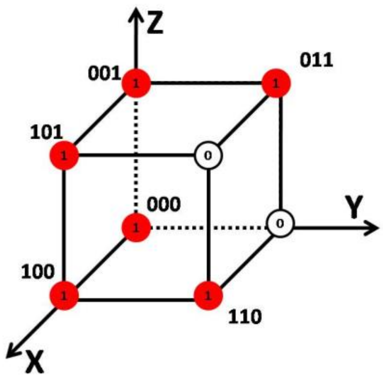
	Y	$\neg Y$	$\neg Y$	Y
X	0	1	1	1
$\neg X$	1	1	1	0
	Z		$\neg Z$	

Объединим выделенные области и получим **сокращенную** ДНФ

$$\neg Y \vee (X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Z)$$

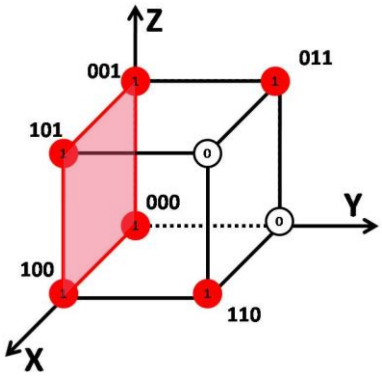
Поскольку нельзя удалить ни один блок (желтый, зеленый или голубой) так, чтобы при этом не «оголилась» ни одна клетка с 1 (серая клетка), то эта ДНФ является также и **минимальной**.

4. *Приведем формулу* $(\neg X \vee \neg Y) \leftrightarrow (Y \to Z)$ *к минимальной ДНФ при помощи минимального покрытия k-гранями трехмерного булева куба, используя алгоритм Квайна.*



Отметим на булевом кубе (красным цветом) те вершины, **в которых функция равна 1**. Это вершины (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0).

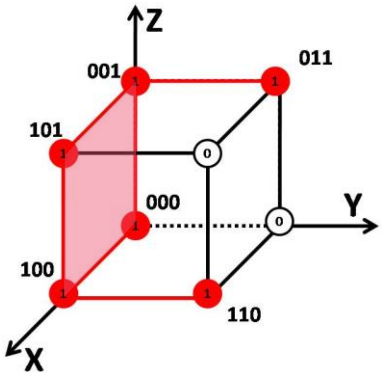
Объединим вершины (0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,0,1), лежащие на одной грани (это 2-грань), соответствующей конъюнкции $\neg \boldsymbol{Y}$ **(вершины, в которых конъюнкция равна 1).**



Добавим ребра (это 1-грани), соответствующие конъюнкциям

$$(\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \text{ и } (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z})$$

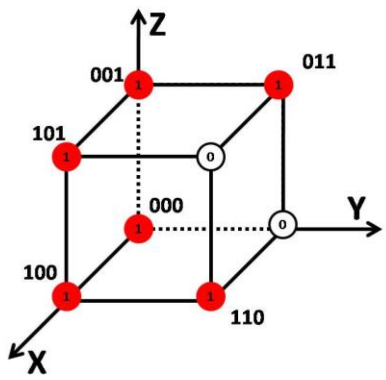
Они содержит пару вершин $(1,0,0), (1,1,0)$ и пару вершин $(1,0,0), (1,1,0)$ соответственно. В этих вершинах эти конъюнкции равны 1.



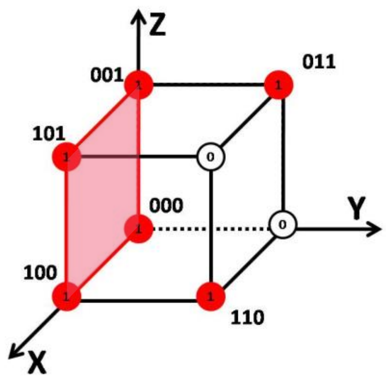
Сокращенная ДНФ равна объединению этих конъюнкций:

$$\neg \boldsymbol{Y} \vee (\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z})$$

Эта ДНФ является также и **минимальной**, поскольку ни одну конъюнкцию нельзя исключить. Если исключить ребро или грань, соответствующую этой конъюнкции, то красные вершины куба, которые принадлежали этому ребру или грани, не покроет никакая другая грань или ребро.



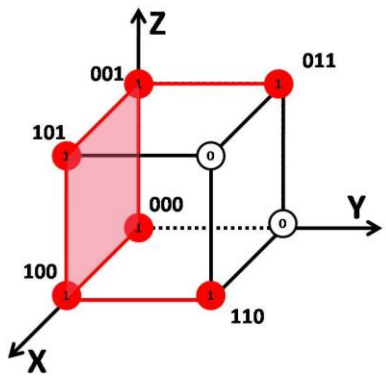
Объединим вершины (0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,0,1), лежащие на одной грани (это 2-грань), соответствующей конъюнкции $\neg \boldsymbol{Y}$ **(вершины, в которых конъюнкция равна 1)**



Добавим ребра (это 1-грани), соответствующие конъюнкциям

$$(\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \text{ и } (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z})$$

Они содержит пару вершин (1,0,0), (1,1,0) и пару вершин (1,0,0), (1,1,0) соответственно. В этих вершинах эти конъюнкции равны 1.



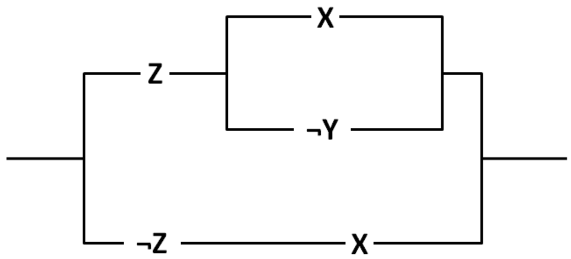
Сокращенная ДНФ равна объединению этих конъюнкций:

$$\neg \boldsymbol{Y} \vee (\boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Z}) \vee (\neg \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Z})$$

Эта ДНФ является также и **минимальной**, поскольку ни одну конъюнкцию нельзя исключить. Если исключить ребро или грань, соответствующую этой конъюнкции исключить, то «оголятся» красные вершины куба, которые не покроет никакая другая грань или ребро.

Задача 5а

Упростить релейно-контактную схему, если это возможно



Решение

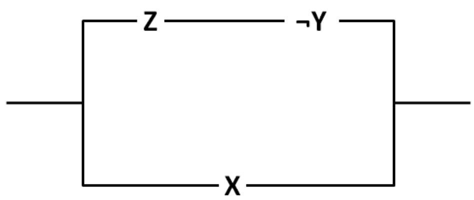
Схеме соответствует формула

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{Z} \land (\boldsymbol{X} \lor \neg \boldsymbol{Y})) \lor (\neg \boldsymbol{Z} \land \ \boldsymbol{X})$$

Упростим формулу

$$\boldsymbol{F} = \big(\boldsymbol{Z} \land (\boldsymbol{X} \lor \neg \boldsymbol{Y})\big) \lor (\neg \boldsymbol{Z} \land \boldsymbol{X}) = \big((\boldsymbol{Z} \land \boldsymbol{X}) \lor (\boldsymbol{Z} \land \neg \boldsymbol{Y})\big) \lor (\neg \boldsymbol{Z} \land \boldsymbol{X})$$
$$= (\boldsymbol{Z} \land \boldsymbol{X}) \lor (\boldsymbol{Z} \land \neg \boldsymbol{Y}) \lor (\neg \boldsymbol{Z} \land \boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{Z} \land \neg \boldsymbol{Y}) \lor (\boldsymbol{Z} \lor \neg \boldsymbol{Z}) \land \boldsymbol{X}$$
$$= (\boldsymbol{Z} \land \neg \boldsymbol{Y}) \lor \mathbf{1} \land \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{Z} \land \neg \boldsymbol{Y}) \lor \boldsymbol{X}$$

Видно, что построенная формула имеет наименьшее число литералов среди всех формул, ей равносильных. Следовательно, соответствующая контактная схема будет иметь наименьшее число контактов. Построим эту схему.



Задача 5б

Построить наименьшую контактную схему, открывающую дверь при нажатии кнопок директора и хотя бы одного из заместителей, либо всех кнопок заместителей (всего у директора три заместителя). Записать соответствующую формулу логики высказываний.

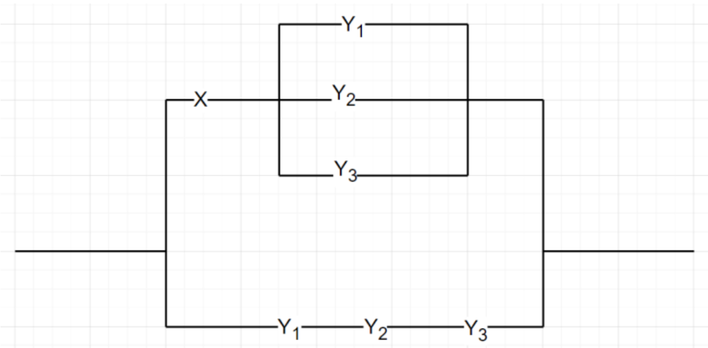
Решение

Напишем соответствующую формулу. Пусть X - переменная, соответствующая контакту кнопке директора, $Y_i - i$-го знаменателя, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Тогда формула $F = (X \land Y_1) \lor (X \land Y_2) \lor (X \land Y_3) \lor (Y_1 \land Y_2 \land Y_3)$.

Видно, что данная формула является минимальной ДНФ. Но она не содержит наименьшее число литералов (т.е. схема, ей соответствует, не содержит наименьшее число контактов). Очевидно, для $G = X \wedge (Y_1 \vee Y_2 \vee Y_3) \vee (Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3)$ справедливо $F \equiv G$ и G содержит меньше литералов, чем F. Видно, что меньше литералов уже не сделать.

Значит, искомая схема:



Задача 6

Доказать методом резолюций, что формула $\boldsymbol{G}$ является логическим следованием формул $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}$, где

$$\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{W} \vee \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}, \qquad \boldsymbol{F_2} = \mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}), \boldsymbol{G} = \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}.$$

Решение

1) Приводим $F_1, F_2, \neg G$ к КНФ

$$F_1 = W \vee Z \rightarrow X \wedge Y = (\neg W \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y) =$$
$$= [\neg W \vee (X \wedge Y)] \wedge [\neg Z \vee (X \wedge Y)] =$$
$$= (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee Y) \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee Y)$$

$$F_2 = X \rightarrow (Y \vee Z) = \neg X \vee Y \vee Z$$

$$\neg G = \neg(X \rightarrow Y) = \neg(\neg X \vee Y) = X \wedge \neg Y$$

2) Все получившиеся дизъюнкты собираем во множество S

$$S \equiv \{\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y\}$$

3) Ищем вывод □ из S

$\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y$

$\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y;\ \neg X \vee Z$

$\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y;\ \neg X \vee Z; Z$

$\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y;\ \neg X \vee Z;\ Z;\ \neg Z$

$\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y;\ \neg X \vee Z;\ Z;\ \neg Z$

$\neg W \vee X;\ \neg W \vee Y;\ \neg Z \vee X;\ \neg Z \vee Y;\ \neg X \vee Y \vee Z;\ X; \neg Y;\ \neg X \vee Z;\ Z;\ \neg Z;\ \square.$

Множество S невыполнимо $\Rightarrow \{F_1, F_2, \neg G\}$ невыполнимо

Следовательно, $F_1, F_2 \vDash G$.

Задача 7

Выяснить, является ли полной система функций $\{\vee, \rightarrow\}$.
Дополнительно: является ли эта система независимой?

Решение

Составим таблицу истинности для функций $\boldsymbol{F_1 = x_1 \vee x_2}$, $\boldsymbol{F_2 = x_1 \rightarrow x_2}$:

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_2}$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Теорема Поста. *Произвольный класс (система) БФ является полным тогда и только тогда, когда он содержит БФ, не сохраняющую 0, БФ, не сохраняющую 1, не самодвойственную БФ, немонотонную БФ, нелинейную БФ.*

Через T_0 обозначим класс всех функций, сохраняющих 0. Через T_1 обозначим класс всех функций, сохраняющих 1. Класс всех монотонных функций обозначим буквой M. Класс всех самодвойственных функций обозначим буквой S. Класс всех линейных функций обозначим буквой L.

	$\boldsymbol{T_0}$	$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{L}$
$\boldsymbol{F_1}$	+	+	-	+	-
$\boldsymbol{F_2}$	-	+	-	-	-

$\boldsymbol{T_0}$: $F_2(0,0) = 1$, функция F_2 не сохраняет 0.
$\boldsymbol{T_1}$: $F_1(1,1) = 1$, $F_2(1,1) = 1$ функции сохраняют 1.
Следовательно, система функций $\{\vee, \rightarrow\}$ **не является полной.**

Покажем, что она является **независимой**. Предположим противное: она не является независимой. Следовательно, одна функция выражается при помощи суперпозиции через другую. Пусть F_2 выражается через F_1. Функция F_1 принадлежит классу T_0, а класс T_0 является замкнутым классом, т.е. замкнутым относительно суперпозиций. Значит F_2 тоже принадлежит классу T_0, а это не так. Следовательно, функция F_2 не выражается через функцию F_1. Аналогично можно показать, что функция F_1 не выражается через функцию F_2.
<u>Ответ</u>: система не является полной, но является независимой.

Задача 8

Найти многочлен Жегалкина, равносильный формуле $(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} \to \neg \boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{X}$. Выразить через ¬,∧,∨ булеву функцию $(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{XY} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{V})(\boldsymbol{Y} \oplus \boldsymbol{Z})$. Найти соответсвующую минимальную ДНФ при помощи карт Карно.

Решение

1. *Найдем многочлен Жегалкина, равносильный формуле*

Приведем формулу к ДНФ

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} \to \neg \boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{X} &= \neg(\neg(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \vee \neg \boldsymbol{Z}) \vee \boldsymbol{X} = \neg\big((\neg \boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Y}) \vee \neg \boldsymbol{Z}\big) \vee \boldsymbol{X} \\ &= (\neg(\neg \boldsymbol{X} \wedge \neg \boldsymbol{Y}) \wedge \boldsymbol{Z}) \vee \boldsymbol{X} = \big((\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \wedge \boldsymbol{Z}\big) \vee \boldsymbol{X} \\ &= [\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{X}] \wedge [\boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{X}] = [\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}] \wedge [\boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{X} \vee (\boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{Z})\end{aligned}$$

Получим многочлен Жегалкина

$$\boldsymbol{X} \vee (\boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{Z}) = [\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{XYZ}$$

2. *Выразим через* ¬,∧,∨ *булеву функцию*

Упростим

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{XY} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{V})(\boldsymbol{Y} \oplus \boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z})[\boldsymbol{XY}(\boldsymbol{Y} \oplus \boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Y} \oplus \boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y} \oplus \boldsymbol{Z})] = \\ &= (\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z})[(\boldsymbol{XYY} \oplus \boldsymbol{XYZ}) \oplus (\boldsymbol{ZY} \oplus \boldsymbol{ZZ}) \oplus (\boldsymbol{YV} \oplus \boldsymbol{ZV})] = [\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}] \\ &= (\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{XY} \oplus \boldsymbol{XYZ} \oplus \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{YV} \oplus \boldsymbol{ZV}) = \\ &= (\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{XY} \oplus \boldsymbol{XYZ} \oplus \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{YV} \oplus \boldsymbol{ZV}) = \\ &= \boldsymbol{XY}(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{XYZ}(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{ZY}(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z}) \\ &\qquad \oplus \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{YV}(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z}) \oplus \boldsymbol{ZV}(\boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{Z}) = \\ &= \boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{XYZ} \oplus \boldsymbol{XYZV} \oplus \boldsymbol{XYZ} \oplus \boldsymbol{XYZV} \oplus \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{XYZV} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{XYV} \oplus \boldsymbol{YZV} \oplus \boldsymbol{XYZV} \oplus \boldsymbol{ZV} \\ &= [\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}] = \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{YZV} \oplus \boldsymbol{ZV} = \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{ZV} \oplus \boldsymbol{YZV}\end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{YZ} \oplus \boldsymbol{ZV} \oplus \boldsymbol{YZV} &= [\boldsymbol{AC} \oplus \boldsymbol{BC} = (\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{VZ}(\boldsymbol{1} \oplus \boldsymbol{Y}) \oplus \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{1} \oplus \boldsymbol{Y}) \\ &= (\boldsymbol{1} \oplus \boldsymbol{Y})(\boldsymbol{VZ} \oplus \boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{1} \oplus \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{1}) = [\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{1} = \neg \mathbf{A}] \\ &= \neg \boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{Z} \wedge \neg \boldsymbol{V}\end{aligned}$$

3. *Найдем минимальную ДНФ при помощи карт Карно*

Рассмотрим карту формулы $\neg \boldsymbol{Y} \wedge \boldsymbol{Z} \wedge \neg \boldsymbol{V}$

	$\boldsymbol{Z}$	$\neg\boldsymbol{Z}$	$\neg\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}$
$\boldsymbol{Y}$				
$\neg\boldsymbol{Y}$				
	$\boldsymbol{V}$		$\neg\boldsymbol{V}$	

Выделим ячейки, перекрывающие область.

	Z	$\neg Z$	$\neg Z$	Z
Y				
$\neg Y$				
	V		$\neg V$	

Выделенному блоку соответствует формула $\neg Y \land Z \land \neg V$.

Минимальная ДНФ: $\neg Y \land Z \land \neg V$.

Задача 9

Проверить логическое следование при помощи ФЛВ.
Если завтра будет жарко, то я надену шорты, если карман будет пришит. Завтра будет жарко, а карман не будет пришит. Следует ли отсюда, что я не надену шорты?

Решение

Простые высказывания
$\boldsymbol{A}$ – *«Завтра будет жарко»*
$\boldsymbol{B}$ – *«Я надену шорты»*
$\boldsymbol{C}$ – *«Карман будет пришит»*
Тогда
$\boldsymbol{F_1 = A \to (C \to B)}$ – *«Если завтра будет жарко, то я надену шорты, если карман будет пришит»*
$\boldsymbol{F_2 = A \land \neg C}$ – *«Завтра будет жарко, а карман не будет пришит»*
$\boldsymbol{G = \neg B}$ – *«Я не надену шорты»*

Можно проверить, есть ли логическое следствие формулы $\boldsymbol{G}$ из формул $\boldsymbol{F_1, F_2}$ так, как мы это делали в задаче 3. Но можно предложить другой способ.

<u>Теорема</u> *Формула $\boldsymbol{G}$ является логическим следствием формул $\boldsymbol{F_1, F_2}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{F_1 \land F_2 \to G \equiv 1}$.*

Проверим тождественную истинность формулы $\boldsymbol{F_1 \land F_2 \to G}$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F_1 \land F_2 \to G = \big(A \to (C \to B)\big) \land (A \land \neg C) \to \neg B =}\\
&\boldsymbol{= \big(\neg A \lor (\neg C \lor B)\big) \land (A \land \neg C) \to \neg B =}\\
&\boldsymbol{= \neg[(\neg A \lor \neg C \lor B) \land (A \land \neg C)] \lor \neg B =}\\
&\boldsymbol{= (A \land C \land \neg B) \lor \neg A \lor C \lor \neg B =} \text{ [Закон поглощения] } \boldsymbol{=}\\
&\boldsymbol{= \neg A \lor C \lor \neg B \not\equiv 1}
\end{aligned}$$

При $\boldsymbol{A = B = 1, C = 0}$:
$$\boldsymbol{F_1 \land F_2 \to G = \neg A \lor C \lor \neg B = 0 \lor 0 \lor 0 = 0}$$
<u>Ответ</u>: рассуждение нелогично.

Задача 10а

Доказать, что булевы функции 0,1 принадлежат замыканию класса $\{f(x, y), \neg\}$, где $f(x, y) = x \oplus \bar{y}$.

Решение

Чтобы доказать, что булевы функции 0,1 принадлежат замыканию класса $\{ f(x,y), \neg\}$, нужно выразить функции 0,1 через функции $f(x,y)$, $\neg$ при помощи взятия суперпозиции и переименовании переменных:

$1 = x \oplus \neg x = f(x,x)$

$0 = \neg 1 = \neg f(x,x)$

Задача 10б

Сведением к известным полным классам доказать полноту класса $\{\leftrightarrow, \wedge, 0\}$.

Решение

Сведём класс $K = \{\leftrightarrow, \wedge, 0\}$ к классу $L = \{\neg, \wedge\}$. Для этого выразим функции из L через функции из K при помощи суперпозиции и переименования переменных. Любую булеву функцию можно выразить через функции класса L (потому, что L – полный), и значит можно будет выразить через функции класса K. Отсюда будет следовать, что класс K полный. Поскольку $\wedge \in$ K, то нам нужно выразить только $\neg$ через $\leftrightarrow, \wedge, 0$:

$$\neg x = (x \leftrightarrow 0)$$

Задача 11

Найдите формулу $F(A, C)$, зависящую только от A и C и являющуюся логическим следствием указанных формул: $\neg A \vee B, \neg B \wedge \neg C, C \to A$

Решение

Найдём такую формулу $F = F(A, C)$, что формула $G = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg C) \wedge (C \to A) \to F$ - тождественно истинна. Используем решение задачи 2

Упростим G:

$G = (\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge (\neg C \vee A) \to F \equiv$поглощение$\equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg B \wedge \neg C \to F \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)) \wedge \neg C \to F \equiv \neg C \to F \equiv C \vee F$

B	A	C	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	0,1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0,1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0,1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0,1	1

Имеем 4 таких функции

1) $F = A^0 \wedge C^0 \vee A^1 \wedge C^0 \equiv$ (дистрибутибутивность $\equiv$ $(\neg A \vee A) \wedge \neg C = 1 \wedge \neg C \equiv \neg C$

Проверка: $G = C \vee F = C \vee \neg C \equiv 1$

A	C	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

2) $F = A^0 \wedge C^0 \vee A^0 \wedge C^1 \vee A^1 \wedge C^0 \equiv (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv$ дистрибутибутивность $\equiv \neg A \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv \neg A \vee (A \vee \neg C) \equiv$ дистрибутивность $\equiv (A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg C) = \neg A \vee \neg C$

Проверка: $G = C \vee F = C \vee \neg A \vee \neg C \equiv 1$

Проверка: G=C∨ F = C∨ ¬C≡1

A	C	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3) Аналогично получаем: $F = \text{A} \vee \neg\text{C}$

Проверка: $G = C \vee F = \text{C} \vee \text{A} \vee \neg\text{C} \equiv 1$

A	C	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

2) и 3) можно было проще получить, используя СКНФ:
$F = A^0 \vee C^0 \equiv \neg\text{A} \vee \neg\text{C}$ и $F \equiv A^1 \vee C^0 \equiv A \vee \neg C$

4) $F = 1$

Проверка: $G = C \vee \text{F} = \text{C} \vee 1 \equiv 1$

A	C	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ответ: F ∈ {1, ¬C , A∨ ¬C , ¬A∨ ¬C }

II способ:

Приведём к СКНФ формулу
$H = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg C) \wedge (C \rightarrow A)$ =см. I способ=$\neg C =$
$(A^1 \vee C^0) \wedge (A^0 \vee C^0) \equiv (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$

A	C	H
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Нам нужно найти все такие формулы $F = F(A, C)$, что $(H \rightarrow F) \equiv 1$.
Понятно, что в СКНФ формулы F должны тогда встречаться только элементарные дизъюнкции, которые встречаются в СКНФ формулы H. И ещё F может быть равна тождественно истинной формуле.
Значит, $F \equiv 1$, или $F = (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \equiv \neg C$, или $F = A \vee \neg C$, или $F = \neg A \vee \neg C$.
Получили тот же ответ.