

ПОЛУМОДУЛЯРНЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП: ЗАВЕРШЕНИЕ ОПИСАНИЯ*

Б. М. Верников, М. В. Волков

Введение

Данная статья является непосредственным продолжением [1, 2]. Основной целью этого цикла статей является описание многообразий полугрупп со слабо полумодулярной (вверх или вниз) решеткой подмногообразий и многообразий полугрупп с дезарговой решеткой подмногообразий. Соответствующие результаты были сформулированы в [1, теоремы 2 и 3], а их доказательство начато в [1, 2]. В данной статье доказательство будет завершено, одновременно мы завершаем описание многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Это описание было анонсировано вторым автором в [3], см. также [1, теорема 1]. Его доказательство «по модулю ниль-случая» опубликовано в [4, 5, 6, 7], а доказательство в ниль-случае начато в работах [1, 2]. Мы отсылаем заинтересованного читателя к [1] за более подробными комментариями. Отметим еще, что для понимания той части доказательств, которая излагается в данной работе, знакомство с работами [1, 2] не обязательно.

«По модулю» [1, 2] нам осталось проверить два утверждения, которые и являются основными результатами данной статьи. В их формулировках фигурируют три следующих набора перестановок

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00258), межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.045) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

множества $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$\Pi_1 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};$$

$$\Pi_2 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24)\};$$

$$\Pi_3 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34)\}.$$

Через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногобразий многообразия \mathcal{V} .

Теорема 0.1. Пусть \mathcal{V} – многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из следующих систем тождеств (где n – натуральное число):

$$xy = (xy)^{n+1}; \quad (m1)$$

$$xy = x^{n+1}y, (xy)^{n+1} = xy^{n+1}, xyzt = xyx^nzt; \quad (m2)$$

$$xy = xy^{n+1}, (xy)^{n+1} = x^{n+1}y, xyzt = xyt^nzt; \quad (m3)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx = yx^2 = x^{n+2}y \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m4)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx = yx^2, x^3yz = xy^3z, x^6 = x^7 \ (\pi \in \Pi_1); (m5)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx = yx^2, x^2y^2z = xy^2z^2 \ (\pi \in \Pi_1); (m6)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx = yx^2, x^3yz = xy^2z^2 \ (\pi \in \Pi_1); (m7)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx, xy^2 = yx^2 \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m8)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xy^2 = yxy \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m9)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = yxy, xy^2 = yx^2 \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m10)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xy^2 = xyx \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m11)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xy^2, xyx = yxy \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m12)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = yxy = yx^2 \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m13)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = xyx = yx^2, x^4y = yx^4 \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m14)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = yxy = yx^2, x^4y = yx^4 \ (\pi \in \Pi_1); \quad (m15)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xyx = x^2yx, x^3y = yx^3 \ (\pi \in \Pi_1); (m16)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, xy^2 = yx^2, xyx = xyx^2, x^3y = yx^3 \ (\pi \in \Pi_1); (m17)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = x^3y, xyx = yxy, x^3y = yx^3 \ (\pi \in \Pi_1); (m18)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, xy^2 = xy^3, xyx = yxy, x^3y = yx^3 \ (\pi \in \Pi_1); (m19)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = yx^2, xyx = yxy \ (\pi \in \Pi_2); \quad (m20)$$

$$xyzt = tzyx, x^2y = yx^2, xyx = yxy, x^2yz = y^2zx; \quad (m21)$$

$$xyzt = tzyx, x^2y = yx^2, xyx = yxy, x^2yz = yzyx; \quad (m22)$$

$$xyzt = tzyx, x^2y = yx^2, xyx = yxy, xyxz = yzyx; \quad (m23)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, x^3y = yx^3 \ (\pi \in \Pi_3); (m24)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, x^3y = yx^3 \ (\pi \in \Pi_3); (m25)$$

$$xyzt = ztxy, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzx; \quad (m26)$$

$$xyzt = ztxy, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = yxyz; \quad (m27)$$

$$xyzt = ztxy, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyzy = xzyz; \quad (m28)$$

$$xyzt = ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = yxzx; \quad (m29)$$

$$xyzt = ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = yxyz; \quad (m30)$$

$$\begin{aligned}
xyzt &= ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyzy = xzyz; & (m31) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = xyzx; & (m32) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzy; & (m33) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = zxyz; & (m34) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = yzyx; & (m35) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = x^3y, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzy; & (m36) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = xyzx; & (m37) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = yxzy; & (m38) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = zxyz; & (m39) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = yzyx; & (m40) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = xy^3, xyxz = yxzy; & (m41) \\
xyzt &= yxtz, x^2y = y^2x, xy^2 = (xy)^2; & (m42) \\
xyzt &= yxtz, x^2y = (xy)^2, xy^2 = yx^2; & (m43) \\
xyzt &= ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = (xy)^2, xyxz = yxzx; & (m44) \\
xyzt &= ztxy, x^2y = (xy)^2, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzx; & (m45) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = (xy)^2, xyxz = yxzy; & (m46) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = (xy)^2, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzy. & (m47)
\end{aligned}$$

Тогда решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова.

Теорема 0.2. Пусть \mathcal{V} – многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из следующих систем тождеств:

$$\begin{aligned}
x_1x_2x_3x_4 &= x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, yux = yxy \ (\pi \in \Pi_1); & (\ell1) \\
x_1x_2x_3x_4 &= x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, xy^2 = yx^2, yux = yxy \ (\pi \in \Pi_1); & (\ell2) \\
x_1x_2x_3x_4 &= x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2 \ (\pi \in \Pi_3); & (\ell3) \\
xyzt &= ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzx; & (\ell4) \\
xyzt &= ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = yxyz; & (\ell5) \\
xyzt &= ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyzy = xzyz; & (\ell6) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = xyzx; & (\ell7) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzy; & (\ell8) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = zxyz; & (\ell9) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = yzyx; & (\ell10) \\
xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, xyxz = yxzy. & (\ell11)
\end{aligned}$$

Тогда решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

Нумерация разделов в данной статье продолжает нумерацию разделов, начатую в работах [1, 2]. В данную статью входят разделы 5 и 6. Доказательство теорем 0.1 и 0.2 излагается в разделе 6. Оно основывается на технике, развитой авторами в работах [8, 9]. Нужные нам результаты этих работ воспроизведены в разделе 5.

5 Решетки нильмногообразий полугрупп и конгруэнции на G -множествах

Раздел делится на два подраздела. В подразделе 5.1 излагаются необходимые для дальнейшего результаты работы [8]. Эти результаты характеризуют строение решеток нильмногообразий в терминах конгруэнций на G -множествах. Необходимая информация о решетках конгруэнций G -множеств, бóльшая часть которой получена в [9], собрана в подразделе 5.2.

5.1 Решетки нильмногообразий

В данном подразделе под словом «полугруппа» понимается полугруппа с сигнатурным нулем. Тем не менее все сказанное ниже справедливо и для обычных полугрупповых многообразий, поскольку, как показано в [10], решетка нильмногообразий полугрупп с сигнатурным нулем изоморфна решетке нильмногообразий в обычной полугрупповой сигнатуре.

Прежде всего введем ряд обозначений. Всюду далее F – абсолютно свободная полугруппа над алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, элементы которого мы называем *буквами*, в то время как элементы F – *словами*. Символ \equiv обозначает равенство в F . Если $u \in F \setminus \{0\}$, то $\ell(u)$ – длина слова u , $c(u)$ – множество всех букв, входящих в запись u , и $n(u) = |c(u)|$. Запись $u = 0$ обозначает систему тождеств $ix = xi = u$, где $x \notin c(u)$; если такая система тождеств выполнена в некотором многообразии \mathcal{V} , то мы говорим, что *слово u равно 0 в \mathcal{V}* . Напомним еще, что полугруппа с нулем называется *нильполугруппой*, если каждый ее элемент в некоторой степени равен нулю, а *нильмногообразием* называется многообразие, состоящее из нильполугрупп.

Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, а m – натуральное число. Обозначим через $F_m(\mathcal{V})$ множество всех слов, зависящих в точности от букв x_1, x_2, \dots, x_m и не равных нулю в \mathcal{V} . Далее, пусть $W_m(\mathcal{V})$ – произвольное подмножество в $F_m(\mathcal{V})$ со следующим свойством: для каждого слова $u \in F_m(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно, слово $u^* \in W_m(\mathcal{V})$ такое, что в \mathcal{V} выполнено тождество $u = u^*$. Положим $W_m^0(\mathcal{V}) = W_m(\mathcal{V}) \cup \{0\}$. Множество $W_m(\mathcal{V})$ будем называть *большой трансверсалью*, а множество $W_m^0(\mathcal{V})$ – *большой 0-трансверсалью*.

Нам понадобится понятие G -множества. Пусть A – непустое множество, G – группа, а φ – гомоморфизм G в группу всех перестановок множества A . С каждым элементом $g \in G$ свяжем унарную операцию g^* на A , задаваемую правилом: $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$.

Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ называется G -множеством. Решетка конгруэнций G -множества A обозначается через $\text{Con}(A)$.

Через \mathbf{S}_m мы будем обозначать группу всех перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$. Если $u \in F \setminus \{0\}$, $c(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то через σu будем обозначать образ слова u при автоморфизме полугруппы F , индуцированном перестановкой σ , т. е. продолжающем отображение $x_i \mapsto x_{i\sigma}$ (мы считаем, что $i\sigma = i$ при $i > m$). Ясно, что если $u \in F_m(\mathcal{V})$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то и $\sigma u \in F_m(\mathcal{V})$, и потому мы можем рассматривать слово $(\sigma u)^*$.

Зафиксируем произвольную большую трансверсаль $W_m(\mathcal{V})$ в $F_m(\mathcal{V})$ и для каждой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_m$ зададим унарную операцию σ^* на множестве $W_m^0(\mathcal{V})$ следующим правилом:

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \text{ для всякого слова } u \in W_m(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma^*(0) \equiv 0.$$

Легко проверить (см. [8, лемма 1]), что множество $W_m^0(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_m\}$ является \mathbf{S}_m -множеством.

Обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию на F , отвечающую многообразию \mathcal{V} . Как хорошо известно, решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна главному коидеалу $[\nu]$ решетки всех вполне инвариантных конгруэнций на F . Для произвольной вполне инвариантной конгруэнции $\alpha \in [\nu]$ обозначим через α_m ограничение α на $W_m^0(\mathcal{V})$. Легко понять, что α_m – конгруэнция \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$ (см. [8, лемма 2]). Множество $C_m(\mathcal{V})$ всех конгруэнций вида α_m является подрешеткой в решетке $\text{Con}(W_m^0(\mathcal{V}))$ (см. [8, лемма 3]). Следующее утверждение является основным результатом работы [8].

Предложение 5.1. *Решетка подмногообразий произвольного нильмногообразия \mathcal{V} антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $C_m(\mathcal{V})$ по всем натуральным m .*

В случае когда \mathcal{V} удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению, строение решетки $C_m(\mathcal{V})$ можно уточнить. Пусть m и n – натуральные числа и $m \leq n$. Многообразию полугрупп \mathcal{V} назовем (n, m) -расщепляемым, если из выполнимости в \mathcal{V} тождества $u = v$, где $n(u) = m$, $\ell(u) = n$ и $\ell(v) > n$, вытекает, что в \mathcal{V} выполнено тождество $u = 0$. Многообразие, являющееся (n, m) -расщепляемым для всех $n \geq m$, назовем m -однородным. Наследственно m -однородным будем называть многообразие, все подмногообразия

которого t -однородны. Многообразия, которое наследственно t -однородно для всех натуральных t , будем называть *наследственно однородным*.

Обозначим через $W_{n,m}(\mathcal{V})$ множество всех слов из $W_m(\mathcal{V})$ длины n . Положим $W_{n,m}^0(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}$. Множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *трансверсалью*, а множество $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ – *0-трансверсалью*. Если t отлично от 1 и n , то $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *собственной трансверсалью*, а $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ – *собственной 0-трансверсалью*.

Легко проверить, что если многообразие \mathcal{V} (n, m) -расщепляемо (в частности, если оно t -однородно), то $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ и $W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются \mathbf{S}_m -подмножествами в $W_m^0(\mathcal{V})$ и соответственно в $W_m(\mathcal{V})$ (это вытекает, например, из доказательства леммы 1.1 в [11]). Следующие два факта доказаны в [8].

Предложение 5.2. *Если \mathcal{V} – наследственно t -однородное нильмногообразие, то решетка $C_m(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\text{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V}))$ по всем $n \geq t$.*

Следствие 5.1. *Если \mathcal{V} – наследственно однородное многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\text{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V}))$ по всем t и n таким, что $n \geq t$.*

5.2 Конгруэнции на G -множествах

Напомним, что G -множество A называется *транзитивным*, если для любых $x, y \in A$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $y = g^*(x)$. Пусть A – G -множество и $a \in A$. Множество $\text{Stab}_A(a) = \{g \in G \mid g^*(a) = a\}$ называется *стабилизатором* элемента a в A . Как обычно, через $\text{Sub}(G)$ будем обозначать решетку подгрупп группы G . Если x и y – элементы решетки L и $x \leq y$, то через $[x, y]$ обозначается интервал в L с наименьшим элементом x и наибольшим элементом y . Нам понадобится следующий хорошо известный факт (см., например, [12, лемма 4.20]).

Лемма 5.1. *Если G -множество A транзитивно и a – любой его элемент, то решетка $\text{Con}(A)$ изоморфна интервалу $[\text{Stab}_A(a), G]$ решетки $\text{Sub}(G)$.*

Обозначим решетки, изображенные на рис. 1 и 2, соответственно через M_k и $M_{k,n}$. Квазимногообразия, порожденные решетками M_k и $M_{k,n}$, обозначим через \mathbf{M}_k и $\mathbf{M}_{k,n}$ соответственно. Хорошо известно, что \mathbf{M}_k в действительности является многообразием (см., например, [13, теорема 5.1.29]).

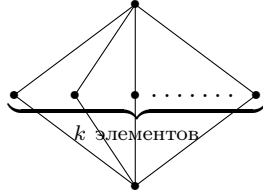


Рис. 1. Решетка M_k

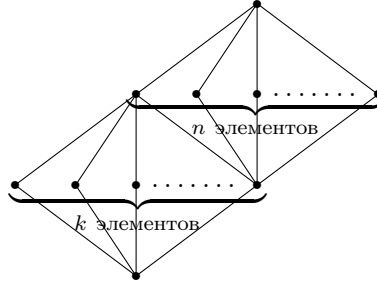


Рис. 2. Решетка $M_{k,n}$

Хорошо известно, что решетка подгрупп группы \mathbf{S}_3 изоморфна решетке M_4 . Поэтому из леммы 5.1 вытекает следующий факт, который многократно будет использоваться в дальнейшем.

Следствие 5.2. *Если $t \leq 3$, то решетка конгруэнций транзитивного \mathbf{S}_t -множества лежит в M_4 .*

Транзитивное G -подмножество G -множества A называется *орбитой* этого G -множества. Множество всех орбит G -множества A будем обозначать через $\text{Orb}(A)$. Пусть $\alpha \in \text{Con}(A)$, а B и C – различные орбиты в A . Скажем, что:

α *связывает* B и C , если $x\alpha y$ для некоторых элементов $x \in B$ и $y \in C$;

α *склеивает* B и C , если $x\alpha y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$.

Конгруэнцию α будем называть *жадной*, если она склеивает любые две орбиты, которые она связывает. Совокупность всех жадных конгруэнций G -множества A будем обозначать через $\text{GCon}(A)$. Нам понадобится следующий результат (см. [9, лемма 1.1 и предложение 1.2]).

Лемма 5.2. *Если A – произвольное G -множество, то $\text{GCon}(A)$ – подрешетка решетки $\text{Con}(A)$, изоморфная подпрямому произведению решеток конгруэнций всех орбит G -множества A и решетки эквивалентностей на множестве $\text{Orb}(A)$.*

Пусть $\text{Orb}(A) = \{A_i \mid i \in I\}$ и $\alpha \in \text{GCon}(A)$. Обозначим через α_i проекцию конгруэнции α на орбиту A_i , а через α^* – отношение эквивалентности на множестве $\text{Orb}(A)$, определяемое следующим образом: если $B, C \in \text{Orb}(A)$, то $B\alpha^*C$ тогда и только тогда, когда либо $B = C$, либо α связывает B и C . Как обычно, решетку

эквивалентностей на множестве X будем обозначать через $\text{Eq}(X)$. Изоморфное вложение решетки $G\text{Con}(A)$ в $\text{Eq}(\text{Orb}(A)) \times \prod_{i \in I} \text{Con}(A_i)$, найденное в [9], выглядит следующим образом: образом конгруэнции α является кортеж $(\alpha^*; \dots, \alpha_i, \dots)$.

Назовем *сегрегированным* G -множеством, все конгруэнции которого являются жадными. Следующие два утверждения доказаны в [9].

Предложение 5.3. *Пусть A – G -множество, \mathbf{L} – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее многообразие \mathbf{M}_3 . Решетка $\text{Con}(A)$ лежит в \mathbf{L} тогда и только тогда, когда A сегрегировано и имеет не более трех орбит, причем решетки конгруэнций всех орбит принадлежат \mathbf{L} .*

Предложение 5.4. *Решетка конгруэнций G -множества A полумодулярна вверх тогда и только тогда, когда решетки конгруэнций всех его орбит полумодулярны вверх и A сегрегировано.*

Нам будет полезно следующее очевидное достаточное условие сегрегированности G -множества.

Лемма 5.3. *Если G -множество содержит не более одной неоднородной орбиты, то оно сегрегировано.*

6 Доказательство теорем 0.1 и 0.2

Раздел делится на 12 подразделов. В подразделе 6.1 доказательство теорем 0.1 и 0.2 сводится к случаю нильногообразий. В подразделе 6.2 приводятся общие замечания, относящиеся к рассмотрению этого случая, вводится ряд обозначений и доказываются некоторые вспомогательные факты. Подразделы 6.3–6.11 посвящены конкретным нильногообразиям, задаваемым системами тождеств из теорем 0.1 и 0.2. В подразделе 6.12 доказываются некоторые следствия основных результатов.

6.1 Редукция к нильногообразиям

Пусть \mathcal{V} – многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств $(m1)$ – $(m47)$ или $(\ell1)$ – $(\ell11)$.

Если \mathcal{V} удовлетворяет системе тождеств $(m1)$, то дезарговость решетки $L(\mathcal{V})$ доказана в работе [7].

Из леммы 15 работы [6] вытекает

Лемма 6.1. *Если многообразие полугрупп \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств (m2) или (m3), то решетка $L(\mathcal{V})$ вложима в прямое произведение 4-элементной цепи и решетки $L(\mathcal{X})$ для некоторого вполне регулярного многообразия полугрупп \mathcal{X} , содержащегося в \mathcal{V} .*

Поскольку решетка всех вполне регулярных многообразий полугрупп дезаргова (см., например, [14]), из леммы 6.1 вытекает дезарговость решетки подмногообразий многообразия полугрупп, удовлетворяющего одной из систем тождеств (m2) или (m3).

Перейдем к рассмотрению случая, когда \mathcal{V} удовлетворяет системе тождеств (m4). Тождество вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}, \quad (6.1)$$

где π – нетривиальная перестановка из \mathbf{S}_n , называется *перестановочным*. Многообразие называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет перестановочному тождеству. Напомним еще, что через S^1 обозначается полугруппа, получаемая внешним присоединением единицы к полугруппе S . Нам понадобится следующая лемма, вытекающая из результатов работы [15], доказательства предложения 1 работы [4] и того факта, что в перестановочном многообразии полугрупп все моноиды коммутативны.

Лемма 6.2. *Если перестановочное многообразие полугрупп \mathcal{V} удовлетворяет квазитожеству*

$$e^2 = e \longrightarrow ex = xe, \quad (6.2)$$

то $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где \mathcal{A} – многообразие периодических абелевых групп, \mathcal{K} – многообразие, порожденное всеми лежащими в \mathcal{V} полугруппами вида N^1 , где N – нильполугруппа (если \mathcal{V} не содержит таких полугрупп, то \mathcal{K} тривиально), а \mathcal{M} – наибольшее нильмногообразие, содержащееся в \mathcal{V} .

Если u и v – полугрупповые слова, то запись $u \triangleleft v$ означает, что $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых (возможно, пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ξ полугруппы F . Напомним, что многообразие полугрупп называется *локально нильпотентным*, если всякая его конечнопорожденная полугруппа нильпотентна. Ясно, что всякое локально нильпотентное многообразие состоит из нильполугрупп. В дальнейшем мы будем часто использовать следующие четыре замечания о тождествах нильмногообразий. Первые два из этих замечаний очевидны, третье вытекает из леммы 1 работы [16], четвертое доказано в [17, лемма 1.3].

Лемма 6.3. Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие.

- (i) Если \mathcal{V} удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $c(u) \neq c(v)$, то \mathcal{V} удовлетворяет тождеству $u = 0$.
- (ii) Если \mathcal{V} удовлетворяет тождеству вида $x^n = x^m$, где $n < m$, то \mathcal{V} удовлетворяет тождеству $x^n = 0$.
- (iii) Если \mathcal{V} удовлетворяет тождеству вида $x_1 x_2 \cdots x_n = v$ такому, что $\ell(v) \neq n$, то \mathcal{V} удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$.
- (iv) Если \mathcal{V} локально нильпотентно и удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \triangleleft v$, то \mathcal{V} удовлетворяет тождеству $u = 0$.

Отметим, что каждая из систем тождеств (m4)–(m47) и (ℓ 1)–(ℓ 11) содержит перестановочное тождество. Хорошо известно, что всякое перестановочное нильмногообразие локально нильпотентно. Это позволяет нам в дальнейшем при рассмотрении нильмногообразий применять четвертое утверждение леммы 6.3 без специальных оговорок.

Через $\text{var } \Sigma$ мы обозначаем многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ , а через $\text{var } S$ – многообразие полугрупп, порожденное полугруппой S . Мы будем использовать далее следующие обозначения для конкретных многообразий полугрупп:

$$\begin{aligned} \mathcal{SL} &= \text{var}\{x^2 = x, xy = yx\}, & \mathcal{C} &= \text{var}\{x^2 = x^3, xy = yx\}, \\ \mathcal{M}_\omega &= \text{var}\{x^2 y = xyx = yx^2 = 0\}, & \mathcal{T} &= \text{var}\{x = y\}. \end{aligned}$$

В [5] доказана

Лемма 6.4. Решетка $L(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}_\omega)$ изоморфна подпрямому произведению решетки $L(\mathcal{M}_\omega)$ и 3-элементной цепи.

Пусть теперь \mathcal{V} – многообразие полугрупп, удовлетворяющее системе тождеств (m4), а \mathcal{M} – его наибольшее нильподмногообразие (которое существует, поскольку \mathcal{V} – периодическое многообразие).

Лемма 6.5. Решетка $L(\mathcal{V})$ изоморфна подпрямому произведению решетки $L(\mathcal{M})$ и некоторой дистрибутивной решетки.

Proof. Из того, что система тождеств (m4) содержит тождество $x^2 y = yx^2$, вытекает, что \mathcal{V} удовлетворяет квазитожеству (6.2). В силу леммы 6.2 $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где \mathcal{A} , \mathcal{K} и \mathcal{M} имеют указанный в этой лемме смысл. Предположим, что существует нильполугруппа N такая, что $N^1 \in \mathcal{V}$ и $|N| > 1$. В \mathcal{V} выполнено тождество $x^2 y = x^{n+2} y$. Подставляя в него 1

вместо y , мы получаем, что $x^2 = x^{n+2}$ в N^1 , а значит и в N . В силу второго утверждения леммы 6.3 N удовлетворяет тождеству $x^2 = 0$, и потому $x^2 = x^3$ в N^1 . Кроме того, полугруппа N^1 коммутативна в силу перестановочности \mathcal{V} . Таким образом, $N^1 \in \mathcal{C}$. Как хорошо известно, $\mathcal{C} = \text{var } C^1$, где C – 2-элементная нильполугруппа (см., например, [18]). Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathcal{K} = \mathcal{C}$. Учитывая, что одноэлементная полугруппа с внешне присоединенной единицей есть 2-элементная полурешетка, получаем, что в общем случае \mathcal{K} – одно из многообразий \mathcal{C} , \mathcal{SL} и \mathcal{T} . Кроме того, из вида системы (m4) и четвертого утверждения леммы 6.3 вытекает, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\omega$. Из предложения 2 работы [19] вытекает, что $L(\mathcal{V}) \cong L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{K} \vee \mathcal{M})$. Как хорошо известно, решетка многообразий периодических абелевых групп дистрибутивна. Поскольку $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\omega$, остается сослаться на лемму 6.4. \square

В силу леммы 6.5 для того, чтобы доказать дезарговость решетки $L(\mathcal{V})$, достаточно установить дезарговость решетки $L(\mathcal{M})$. При этом \mathcal{M} удовлетворяет тождествам $x^2y = yx^2 = 0$ (в силу четвертого утверждения леммы 6.3) и тождеству вида

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi} \quad (6.3)$$

для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$, а значит и системе тождеств (m5).

Таким образом, далее мы можем предполагать, что \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств (m5)–(m47) или (l1)–(l11). Введем обозначения для некоторых многообразий полугрупп: \mathcal{LZ} (соответственно \mathcal{RZ}) – многообразие всех полугрупп левых (правых) нулей; $\mathcal{P} = \text{var}\{xy = x^2y, x^2y^2 = y^2x^2\}$; \mathcal{P}^* – многообразие, двойственное к \mathcal{P} . Если u – слово, а x – буква, то через $\ell_x(u)$ обозначается число вхождений x в u , а через $h(u)$ (соответственно $t(u)$) – первая (последняя) буква в u . Нам понадобится следующая лемма, первые два утверждения которой хорошо известны и легко проверяемы, а третье доказано в [20].

Лемма 6.6. *Тождество $u = v$ выполнено*

- (i) *в многообразии \mathcal{C} тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и для всякой буквы $x \in c(u)$ либо $\ell_x(u), \ell_x(v) > 1$, либо $\ell_x(u) = \ell_x(v) = 1$;*
- (ii) *в многообразии \mathcal{LZ} тогда и только тогда, когда $h(u) \equiv h(v)$;*
- (iii) *в многообразии \mathcal{P} тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и либо $\ell_{t(u)}(u), \ell_{t(v)}(v) > 1$, либо $\ell_{t(u)}(u) = \ell_{t(v)}(v) = 1$ и $t(u) \equiv t(v)$.*

Следующее утверждение легко вытекает, например, из результатов [21].

Лемма 6.7. *Если \mathcal{M} – многообразие полугрупп, не содержащее \mathcal{SL} , то решетка $L(\mathcal{SL} \vee \mathcal{M})$ изоморфна прямому произведению решетки $L(\mathcal{M})$ и 2-элементной цепи.*

Лемма 6.8. *Если многообразие полугрупп \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств (m5)–(m47) или (l1)–(l11), то либо \mathcal{V} – нильмногообразие, либо решетка $L(\mathcal{V})$ изоморфна прямому произведению 2-элементной цепи и решетки $L(\mathcal{M})$ для некоторого нильмногообразия \mathcal{M} , содержащегося в \mathcal{V} .*

Proof. Из леммы 6.6 и двойственного утверждения без труда выводится, что многообразие, заданное любой из систем тождеств (m5)–(m47) и (l1)–(l11), не содержит многообразий \mathcal{LZ} , \mathcal{RZ} , \mathcal{P} и \mathcal{P}^* . Отсюда и из леммы 2 работы [4] вытекает, что \mathcal{V} удовлетворяет квазитожеству (6.2). Кроме того, каждая из систем (m5)–(m47) и (l1)–(l11) содержит перестановочное тождество. В силу леммы 6.2 $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где \mathcal{A} , \mathcal{K} и \mathcal{M} имеют указанный в этой лемме смысл. Легко убедиться в том, что каждая из систем (m5)–(m47) и (l1)–(l11) влечет тождество $x^6 = x^7$. Следовательно, многообразие \mathcal{A} тривиально. Далее, из леммы 6.6 легко вытекает, что $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{K}$. Как уже отмечалось выше, $\mathcal{C} = \text{var } C^1$, где C – 2-элементная нильполугруппа. Следовательно, многообразие \mathcal{K} либо тривиально, либо порождается одноэлементной полугруппой с внешне присоединенной единицей, т.е. 2-элементной полурешеткой. Иными словами, \mathcal{K} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} . В первом случае $\mathcal{V} = \mathcal{M}$ (в частности, \mathcal{V} – нильмногообразие), а во втором $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{M}$. Остается сослаться на лемму 6.7. \square

Пусть теперь \mathcal{V} – многообразие полугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств (m5)–(m47) или (l1)–(l11). В силу леммы 6.8 дезарговость решетки $L(\mathcal{V})$ эквивалентна дезарговости решетки $L(\mathcal{M})$. Следующий известный факт (см., например, [22, теорема 1.7.6]) показывает, что аналогичная эквивалентность имеет место и для полумодулярности вниз.

Лемма 6.9. *Подпрямое произведение полумодулярных вверх (вниз) решеток само является полумодулярной вверх (вниз) решеткой.*

Таким образом, всюду далее можно считать, что \mathcal{V} – нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств (m5)–(m47) или (l1)–(l11).

6.2 Нильмногообразия: предварительные замечания

Нам осталось доказать следующие два утверждения:

- (I) нильмногообразиие, удовлетворяющее одной из систем тождеств (m5)–(m47), имеет дезаргову решетку подмногообразий;
- (II) нильмногообразиие, удовлетворяющее одной из систем тождеств (l1)–(l11), имеет полумодулярную вниз решетку подмногообразий.

В действительности, как мы увидим ниже, справедливо утверждение более сильное, чем (I): если нильмногообразиие \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств (m5)–(m47), то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$ (это немедленно влечет утверждение (I), поскольку решетка $M_{4,3}$ дезаргова). В данном подразделе излагаются предварительные соображения, необходимые для доказательства (I) и (II).

Нам понадобится ряд обозначений. Предположим, что множество $C_m(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$, т.е. что $C_m(\mathcal{V})$ является подрешеткой в $\text{GCon}(W_m^0(\mathcal{V}))$. Тогда по лемме 5.2 решетка $C_m(\mathcal{V})$ изоморфна некоторой подрешетке C прямого произведения решеток конгруэнций орбит \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и решетки эквивалентностей на множестве всех его орбит. Проекцию C на решетку $\text{Eq}(\text{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})))$ обозначим через $E_m(\mathcal{V})$, а проекцию C на решетку конгруэнций орбиты U – через $C_m^U(\mathcal{V})$.

Любая конгруэнция $\alpha \in C_m(\mathcal{V})$ есть ограничение на $W_m^0(\mathcal{V})$ некоторой вполне инвариантной конгруэнции $\bar{\alpha}$ на полугруппе F , содержащей вполне инвариантную конгруэнцию на F , отвечающую многообразию \mathcal{V} . Пусть \mathcal{V}_α – подмногообразиие в \mathcal{V} , отвечающее $\bar{\alpha}$. Далее, пусть α^* – эквивалентность на множестве всех орбит \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$, соответствующая конгруэнции α при вложении $C_m(\mathcal{V})$ в прямое произведение решеток конгруэнций орбит \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и решетки эквивалентностей на множестве всех его орбит. Пусть U и V – различные орбиты в $W_m^0(\mathcal{V})$. Согласно комментарию к лемме 5.2, $U\alpha^*V$ тогда и только тогда, когда α связывает U и V , т.е. когда $u\alpha v$ для некоторых слов $u \in U$ и $v \in V$. Но тогда $u\bar{\alpha}v$, т.е. $u = v$ в \mathcal{V}_α . Обратно, если в \mathcal{V}_α выполнено тождество $u = v$, где $u, v \in W_m^0(\mathcal{V})$, то $u\alpha v$ и потому $U\alpha^*V$, где U – орбита, содержащая u , а V – орбита, содержащая v .

Запись $u \overset{\mathcal{V}}{\triangleleft} v$ будет означать, что $u \triangleleft w$ для некоторого слова w , равного v в многообразии \mathcal{V} . Пусть U и V – орбиты \mathbf{S}_m -множества $W_m(\mathcal{V})$. Ясно, что если $u \overset{\mathcal{V}}{\triangleleft} v$ для некоторых слов $u \in U$ и $v \in V$, то $u' \overset{\mathcal{V}}{\triangleleft} v'$ для любых $u' \in U$ и $v' \in V$. В этой ситуации будем писать $U \triangleleft V$. Далее, всегда можно считать, что произвольная орбита $U \neq \{0\}$ в $W_m(\mathcal{V})$ состоит из слов одинаковой длины. Будем обозначать эту длину через

$\ell(U)$.

Орбиту $\{0\}$ большой 0-трансверсали $W_m^0(\mathcal{V})$ будем обозначать через U_0 . Если $W_m(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, то одной из орбит этого \mathbf{S}_m -множества всегда является множество всех входящих в $W_m(\mathcal{V})$ слов длины m от букв x_1, x_2, \dots, x_m . Договоримся обозначать эту орбиту через U_1 . Заметим, что $U_1 \triangleleft U$ и $\ell(U_1) < \ell(U)$ для любой орбиты U \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$, отличной от U_0 и U_1 .

В следующей лемме первое утверждение очевидно, а второе и третье вытекают из третьего и четвертого утверждений леммы 6.3 соответственно.

Лемма 6.10. *Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, а m – натуральное число такое, что $W_m(\mathcal{V}) \neq \emptyset$ и каждая конгруэнция из $C_m(\mathcal{V})$ является жадной. Пусть $\alpha \in C_m(\mathcal{V})$, а $\text{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})) = \{U_0, U_1, \dots, U_k\}$.*

- (i) *Если $U_i \alpha^* U_0$ и $U_i \triangleleft U_j$ для некоторых $i, j \geq 1$, то $U_j \alpha^* U_0$.*
- (ii) *Если $U_1 \alpha^* U_i$ для некоторого $i \neq 1$, то α^* – универсальное отношение на $\text{Orb}(W_m^0(\mathcal{V}))$.*
- (iii) *Если \mathcal{V} локально нильпотентно, $U_i \alpha^* U_j$, $U_i \triangleleft U_j$ и $\ell(U_i) < \ell(U_j)$ для некоторых $i, j \geq 1$, $i \neq j$, то $U_i \alpha^* U_0$.*

В условиях леммы 6.10 обозначим через $E'_m(\mathcal{V})$ множество всех отношений эквивалентности α^* из $E_m(\mathcal{V})$ таких, что $\{U_1\}$ является α^* -классом. Ясно, что $E'_m(\mathcal{V})$ – подрешетка в $E_m(\mathcal{V})$. Из второго утверждения леммы 6.10 вытекает

Следствие 6.1. *Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, а m – натуральное число такое, что $W_m(\mathcal{V}) \neq \emptyset$ и каждая конгруэнция из $C_m(\mathcal{V})$ является жадной. Тогда решетка $E_m(\mathcal{V})$ получается внешним присоединением единицы к решетке $E'_m(\mathcal{V})$.*

Пусть по-прежнему $\text{Orb}(W_m^0(\mathcal{V})) = \{U_0, U_1, \dots, U_k\}$. Зафиксируем следующие обозначения для некоторых эквивалентностей на этом множестве:

ε – отношение равенства;

$\rho_{i_1 i_2 \dots i_r}$ – эквивалентность, единственным неоднородным классом которой является $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_r}\}$;

$\rho_{i_1 i_2 \dots i_r, j_1 j_2 \dots j_s}$ – эквивалентность, имеющая ровно два неоднородных класса: $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_r}\}$ и $\{U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_s}\}$;

$\Delta = \rho_{023 \dots k}$.

Ясно, что Δ – наибольший элемент решетки $E'_m(\mathcal{V})$.

Нам понадобится следующий факт, вытекающий из четвертого утверждения леммы 6.3.

Лемма 6.11. *Пусть \mathcal{V} – локально нильпотентное многообразие, а m – натуральное число. Если для любых двух неоднородных орбит U и V \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$ либо $\ell(U) < \ell(V)$ и $U \triangleleft V$, либо $\ell(V) < \ell(U)$ и $V \triangleleft U$, то каждая конгруэнция из $C_m(\mathcal{V})$ является жадной.*

Следующая лемма проверена в [8, лемма 11]:

Лемма 6.12. *Решетка $C_1(\mathcal{V})$ дистрибутивна, если \mathcal{V} – нильмногообразие.*

Из третьего утверждения леммы 6.3 вытекает, что произвольное нильмногообразие (n, n) -расщепляемо для всякого натурального n . В частности, множество $W_{n,n}^0(\mathcal{V})$ всегда является \mathbf{S}_n -множеством.

Лемма 6.13. *Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, удовлетворяющее тождеству вида (6.3) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$, а n – натуральное число. Тогда $\text{Con}(W_{n,n}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{M}_{3,4}$.*

Proof. Положим $W_n = W_{n,n}(\mathcal{V})$ и $W_n^0 = W_{n,n}^0(\mathcal{V})$. Можно считать, что $W_n \neq \emptyset$, так как в противном случае $W_n^0 = \{0\}$ и решетка $\text{Con}(W_n^0)$ одноэлементна. Ясно, что W_n является транзитивным \mathbf{S}_n -множеством. Следовательно, 0-трансверсаль W_n^0 состоит из двух орбит: $\{0\}$ и W_n , и потому ее сегрегированность вытекает из леммы 5.3. В силу предложения 5.3 осталось проверить, что $\text{Con}(W_n) \in \mathbf{M}_{3,4}$. Без ограничения общности можно считать, что W_n содержит слово $x_1x_2 \cdots x_n$. Обозначим через $\text{Perm}_n(\mathcal{V})$ множество всех перестановок $\pi \in \mathbf{S}_n$ таких, что в \mathcal{V} выполнено тождество (6.1). Ясно, что $\text{Perm}_n(\mathcal{V})$ – подгруппа в \mathbf{S}_n . Несложно проверяется, что $\text{Stab}_{W_n}(x_1x_2 \cdots x_n) = \text{Perm}_n(\mathcal{V})$ (см., например, доказательство следствия 1.7 в [17]). В силу леммы 5.1 $\text{Con}(W_n) \cong [\text{Perm}_n(\mathcal{V}), \mathbf{S}_n]$.

Обозначим через \mathbf{A}_n знакопеременную подгруппу в \mathbf{S}_n . Кроме того, для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ положим $\text{Stab}_n(i) = \{\sigma \in \mathbf{S}_n \mid i\sigma = i\}$. Ясно, что $\text{Stab}_n(i)$ – подгруппа в \mathbf{S}_n . Напомним, что по условию \mathcal{V} удовлетворяет тождеству вида (6.3) для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$. Если $n \geq 5$, то из результатов работы [23] вытекает, что $\text{Perm}_n(\mathcal{V})$ содержит одну из групп \mathbf{A}_n , $\text{Stab}_n(1)$ и $\text{Stab}_n(n)$. Как хорошо известно, все эти три группы являются максимальными собственными подгруппами в \mathbf{S}_n . Следовательно, в рассматриваемом случае $\text{Con}(W_n) \in \mathbf{M}_{3,4}$. В силу следствия 5.2 осталось рассмотреть случай, когда $n = 4$. Если $\pi \in \mathbf{S}_4$, то через $\text{gr}\{\pi\}$ мы будем обозначать

подгруппу в \mathbf{S}_4 , порожденную перестановкой π . По условию группа $\text{Perm}_4(\mathcal{V})$ содержит некоторую перестановку $\pi \in \Pi_1$. Следовательно, $\text{Con}(W_4)$ – интервал в решетке $[\text{gr}\{\pi\}, \mathbf{S}_4]$, где $\pi \in \Pi_1$. Введем следующие обозначения для подгрупп группы \mathbf{S}_4 :

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \text{gr}\{(ijk)\}, \text{ где } 1 \leq i < j < k \leq 4; \\ C_{ijkl} &= \text{gr}\{(ijkl)\}, \text{ где } \{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}; \\ P_{ij,kl} &= \text{gr}\{(ij)(kl)\}, \text{ где } \{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}; \\ T_{ij} &= \text{gr}\{(ij)\}, \text{ где } 1 \leq i < j \leq 4; \\ \mathbf{V}_4 & \text{ – четверная группа Клейна.} \end{aligned}$$

Ясно, что если $\pi \in \Pi_1$, то $\text{gr}\{\pi\}$ совпадает с одной из групп C_{ijk} и $P_{ij,kl}$. На рис. 3 и 4 изображены интервалы $[C_{ijk}, \mathbf{S}_4]$ и $[P_{ij,kl}, \mathbf{S}_4]$ соответственно (на рис. 3 $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$). Мы видим, что они лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Следовательно, $\text{Con}(W_4) \in \mathbf{M}_{3,4}$. \square

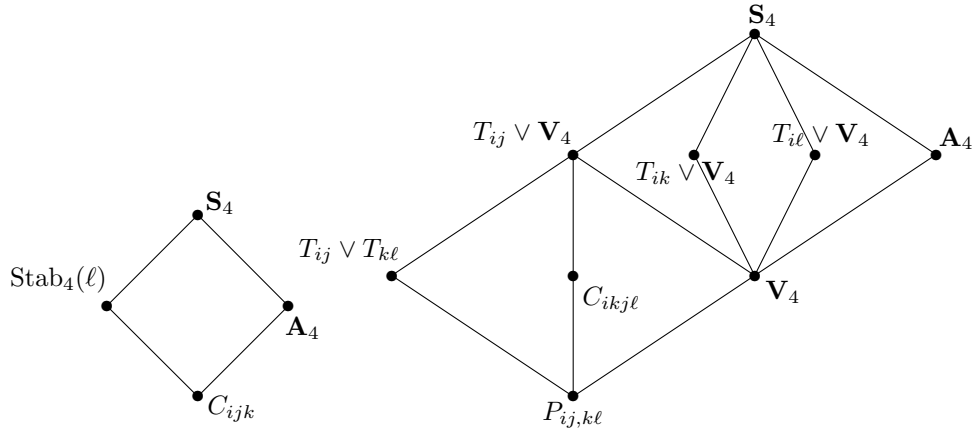


Рис. 3. Интервал $[C_{ijk}, \mathbf{S}_4]$

Рис. 4. Интервал $[P_{ij,kl}, \mathbf{S}_4]$

Если \mathbf{L} – квазимногообразие решеток, то через \mathbf{L}^∂ мы будем обозначать квазимногообразие, двойственное к \mathbf{L} . Все наши рассуждения в подразделах 6.3–6.11 будут опираться на следующие два утверждения.

Лемма 6.14. Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, а \mathbf{L} – квазимногообразие модулярных решеток, содержащее \mathbf{M}_3 . Предположим, что $\text{Con}(W_{n,n}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{L}^\partial$ для всякого натурального n , а для всякого натурального $t > 1$ выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:

- (i) многообразие \mathcal{V} наследственно t -однородно и для любого натурального $n > t$ либо $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \emptyset$, либо \mathbf{S}_m -множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ сегрегировано и содержит не более двух орбит, а решетки конгруэнций всех его орбит лежат в \mathbf{L}^∂ ;
- (ii) решетка $C_m(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$, и если $W_m(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, то решетки $E'_m(\mathcal{V})$ и $C_m^U(\mathcal{V})$ (где U – произвольная орбита \mathbf{S}_m -множества $W_m(\mathcal{V})$) лежат в \mathbf{L}^∂ .

Тогда $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$.

Proof. В силу предложения 5.1 нам достаточно показать, что $C_m(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}^\partial$ для всякого натурального m . Лемма 6.12 позволяет считать, что $m > 1$.

Предположим сначала, что выполнено условие (i). В силу предложения 5.2 в этом случае достаточно проверить, что $\text{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{L}^\partial$ для всякого $n \geq m$. По условию можно считать, что $n > m$. Кроме того, можно считать, что $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, поскольку в противном случае $W_{n,m}^0(\mathcal{V}) = \{0\}$ и решетка $\text{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V}))$ одноэлементна. 0-трансверсаль $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ является объединением трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{V})$ и одноэлементной орбиты $\{0\}$. Ясно, что добавление к G -множеству любого числа одноэлементных орбит сохраняет как сегрегированность исходного G -множества, так и квазитожества решеток конгруэнций его орбит. Кроме того, очевидно, что если $W_{n,m}(\mathcal{V})$ имеет не более двух орбит, то $W_{n,m}^0(\mathcal{V})$ имеет не более трех орбит. В силу предложения 5.3 из условия (i) вытекает, что в рассматриваемом случае $\text{Con}(W_{n,m}^0(\mathcal{V})) \in \mathbf{L}^\partial$.

Осталось рассмотреть случай, когда выполнено условие (ii). В этом случае $C_m(\mathcal{V})$ – подрешетка в $\text{GCon}(W_m^0(\mathcal{V}))$. Из леммы 5.2 вытекает, что $C_m(\mathcal{V})$ вкладывается в прямое произведение $E_m(\mathcal{V})$ и решеток вида $C_m^U(\mathcal{V})$, где U пробегает множество всех орбит \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$. В силу следствия 6.1 из того, что $E'_m(\mathcal{V})$ лежит в \mathbf{L}^∂ , вытекает, что и $E_m(\mathcal{V})$ лежит в \mathbf{L}^∂ . Из условия (ii) и того факта, что решетка конгруэнций орбиты $\{0\}$ одноэлементна, вытекает, что $C_m(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}^\partial$. \square

Лемма 6.15. Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие. Предположим, что решетка $\text{Con}(W_{n,n}^0(\mathcal{V}))$ полумодулярна вверх для всякого натурального n , а для всякого натурального $m > 1$ выполнено по крайней мере одно из следующих двух утверждений:

- (i) многообразие \mathcal{V} наследственно t -однородно и для любого натурального $n > t$ либо $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \emptyset$, либо \mathbf{S}_m -множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$

сегрегировано, а решетки конгруэнций всех его орбит полумодулярны вверх;

- (ii) решетка $C_m(\mathcal{V})$ состоит только из жадных конгруэнций \mathbf{S}_m -множества $W_m^0(\mathcal{V})$, и если $W_m(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, то решетки $E'_m(\mathcal{V})$ и $C_m^U(\mathcal{V})$ (где U – произвольная орбита \mathbf{S}_m -множества $W_m(\mathcal{V})$) полумодулярны вверх.

Тогда решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

Proof. Эта лемма проверяется абсолютно аналогично предыдущей. Надо только дополнительно учесть лемму 6.9 и вместо предложения 5.3 сослаться на предложение 5.4. \square

Перед тем как переходить к конкретным вычислениям, примем еще одно терминологическое соглашение. Пусть Σ – одна из систем тождеств (m5)–(m47) или (l1)–(l11). Очевидно, что многообразие $\text{var } \Sigma$ состоит из периодических полугрупп, и потому среди его нильподмногообразий есть наибольшее. В дальнейшем мы, допуская некоторую вольность, будем говорить «нильмногообразие, заданное системой Σ », имея в виду «наибольшее нильмногообразие, удовлетворяющее системе тождеств Σ ».

6.3 Система тождеств (m5)

Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, заданное системой тождеств (m5). В эту систему входит тождество $x^6 = x^7$. В силу второго утверждения леммы 6.3 во всяком нильмногообразии это тождество влечет $x^6 = 0$. Поэтому на протяжении данного подраздела можно считать, что \mathcal{V} – многообразие, заданное тождествами

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = yx = yx^2, x^3yz = xy^3z, x^6 = 0,$$

где $\pi \in \Pi_1$.

Будем говорить, что слова u и v подобны в многообразии \mathcal{X} , если существует слово w такое, что в \mathcal{X} выполнено тождество $u = w$ и v может быть получено из w переименованием переменных. Если u подобно v в \mathcal{X} , будем писать $u \stackrel{\mathcal{X}}{\approx} v$.

Подставляя yz вместо y и t вместо z в тождество $x^3yz = xy^3z$ и используя тождества $x^2y = yx = yx^2$, имеем $x^3yzt = x(yz)^3t = xy^3z^3t$. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 \mathcal{V} удовлетворяет тождеству

$$x^3yzt = 0. \tag{6.4}$$

Положим $W(\mathcal{V}) = \{u \in F \mid u \text{ не равно } 0 \text{ в } \mathcal{V} \text{ и } 1 < n(u) < \ell(u)\}$. Это обозначение будет использоваться и во всех последующих подразделах без специальных оговорок. Проведенные выше выкладки позволяют легко проверить, что всякое слово из $W(\mathcal{V})$ подобно в \mathcal{V} некоторому слову из множества

$$\{x_1^2 x_2^2 \cdots x_i^2 x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k, x^3 y, x^3 y^2, x^3 y z\}, \text{ где } k \geq 2, \text{ а } i = 1, 2, \dots, k.$$

Предположим, что в некотором подмногообразии \mathcal{X} многообразия \mathcal{V} выполнено тождество $u = v$, где $\ell(u) < \ell(v)$. Из сказанного выше легко вытекает, что либо $c(u) \neq c(v)$, либо $u \triangleleft v$, либо $u \stackrel{\mathcal{X}}{\approx} x^3 y z$, а $v \stackrel{\mathcal{X}}{\approx} x^2 y^2 z^2$. В силу первого и четвертого утверждений леммы 6.3 это означает, в частности, что \mathcal{V} наследственно m -однородно при $m \neq 3$.

Для произвольных натуральных чисел i и k таких, что $i \leq k$, положим

$$G_{k,i} = \{\sigma \in \mathbf{S}_k \mid j\sigma \leq i \text{ при } 1 \leq j \leq i \text{ и } j\sigma > i \text{ при } i < j \leq k\}.$$

Ясно, что $G_{k,i}$ – подгруппа в \mathbf{S}_k . Прямые вычисления позволяют установить, что непустыми собственными трансверсалами вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они (здесь и всюду ниже, перечисляя элементы трансверсалей, мы разделяем орбиты точкой с запятой):

$$W_{k+1,k} = \{x_i^2 x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_k \mid 1 \leq i \leq k\}, \text{ где } k \geq 2;$$

$$W_{4,2} = \{x^3 y, y^3 x; x^2 y^2\};$$

$$W_{5,2} = \{x^3 y^2, y^3 x^2\};$$

$$W_{5,3} = \{x^3 y z; x^2 y^2 z, x^2 z^2 y, y^2 z^2 x\};$$

$$W_{6,3} = \{x^2 y^2 z^2\};$$

$$W_{k+i,k} = \{x_{1\sigma}^2 x_{2\sigma}^2 \cdots x_{i\sigma}^2 x_{(i+1)\sigma} x_{(i+2)\sigma} \cdots x_{k\sigma} \mid \sigma \text{ пробегает систему различных представителей правых смежных классов группы } \mathbf{S}_k \text{ по подгруппе } G_{k,i}\}, \text{ где } k \geq 4, \text{ а } i = 2, 3, \dots, k.$$

Сегрегированность всех этих трансверсалей вытекает из леммы 5.3. Кроме того, очевидно, что все трансверсали содержат не более двух орбит. Проверим, что решетки конгруэнций всех орбит всех трансверсалей лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Для всех трансверсалей, кроме $W_{k+i,k}$ при $k \geq 4$, это вытекает из следствия 5.2. Пусть теперь $k \geq 4$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $W = W_{k,i}$. Положим $w_{k,i} \equiv x_1^2 x_2^2 \cdots x_i^2 x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_k$. Очевидно, что

трансверсаль W транзитивна, $w_{k,i} \in W$ и $\text{Stab}_W(w_{k,i}) = G_{k,i}$. Интервал $[G_{k,i}, \mathbf{S}_k]$ решетки $\text{Sub}(\mathbf{S}_k)$ содержит не более трех элементов (см. [17, лемма 1.1]). Остается воспользоваться леммой 5.1. Итак, если $m \neq 3$, то выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$.

Осталось рассмотреть случай $m = 3$. Положим $W_3 = W_3^0(\mathcal{V})$, $C_3 = C_3(\mathcal{V})$ и $E'_3 = E'_3(\mathcal{V})$. Ясно, что W_3 состоит из следующих шести орбит:

$$U_0 = \{0\}, U_1 = \{xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx\}, U_2 = \{x^2yz, y^2xz, z^2xy\}, \\ U_3 = \{x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\}, U_4 = \{x^2y^2z^2\}, U_5 = \{x^3yz\}.$$

Очевидно, что выполнена посылка леммы 6.11. В силу этой леммы C_3 состоит из жадных конгруэнций. В силу следствия 5.2 решетки конгруэнций всех орбит лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Осталось проверить, что $E'_3 \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Пусть α – конгруэнция из C_3 такая, что $\alpha^* \in E'_3$. Предположим, что $U_3\alpha^*U_5$. Тогда в \mathcal{V}_α выполнено тождество $x^2y^2z = x^3yz$. Умножая это тождество справа на z и учитывая, что в \mathcal{V} выполнено тождество (6.4), получаем, что в этом случае $U_4\alpha^*U_0$. Заметим еще, что $U_2 \triangleleft U_i$ и $\ell(U_2) < \ell(U_i)$ для $i = 3, 4, 5$, а также что $U_3 \triangleleft U_4$ и $\ell(U_3) < \ell(U_4)$. Используя лемму 6.10, легко понять, что решетка E'_3 имеет вид, показанный на рис. 5. В частности, эта решетка лежит в $\mathbf{M}_{3,4}$.

Итак, при $m = 3$ выполнено условие (ii) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$.

В силу лемм 6.13 и 6.14 $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

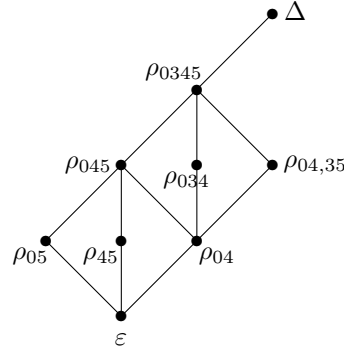


Figure 5: Решетка E'_3 для системы (m5)

6.4 Система тождеств (m6)

В систему тождеств (m6) входит тождество $x^2y^2z = xy^2z^2$. Подставляя в него x^2 вместо x , получаем $x^4y^2z = x^2y^2z^2$. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 это означает, что в \mathcal{V} выполнено тождество $x^2y^2z^2 = 0$. Поэтому на протяжении данного подраздела можно считать, что многообразие \mathcal{V} задано тождествами

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, \quad x^2y = yx = yx^2, \quad x^2y^2z = xy^2z^2, \quad x^2y^2z^2 = 0,$$

где $\pi \in \Pi_1$.

Напомним, что тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если $\ell_x(u) = \ell_x(v)$ для всякой буквы x . В силу тождеств $x^2y = yx = yx^2$ в \mathcal{V} выполняются все непрерывные уравновешенные тождества. Учитывая это обстоятельство и подставляя zt вместо z в тождество $x^2y^2z = xy^2z^2$, получаем, что \mathcal{V} удовлетворяет тождествам $x^2y^2zt = xy^2(zt)^2 = y^2z^2t^2x$. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 в \mathcal{V} выполнено тождество $x^2y^2zt = 0$. С помощью этого тождества легко проверить, что каждое слово из множества $W(\mathcal{V})$ подобно в \mathcal{V} некоторому слову из множества

$$\{x_1^2x_2x_3 \cdots x_k, x_1^3x_2x_3 \cdots x_k, x^2y^2, x^3y^2, x^2y^2z\}, \quad \text{где } k \geq 2.$$

Теперь очевидно, что если $u, v \in W(\mathcal{V})$ и $\ell(u) < \ell(v)$, то либо $c(u) \neq c(v)$, либо $u \triangleleft v$. Из первого и четвертого утверждений леммы 6.3 вытекает, что \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 1$.

Прямые вычисления показывают, что непустыми собственными трансверсальями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются множества $W_{k+1,k}$, $W_{k+2,k}$ (где $k \geq 2$), $W_{5,2}$ и только они, причем $W_{k+1,k}$ (при $k \geq 2$), $W_{4,2}$ и $W_{5,2}$ имеют тот же вид, что и в подразделе 6.3, а $W_{k+2,k}$ при $k \geq 3$ выглядит следующим образом:

$$W_{5,3} = \{x^3yz, y^3xz, z^3xy; x^2y^2z\};$$

$$W_{k+2,k} = \{x_i^3x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_k \mid 1 \leq i \leq k\}, \quad \text{если } k \geq 4.$$

В силу следствия 5.2 решетки конгруэнций всех орбит трансверсалей $W_{4,2}$, $W_{5,2}$ и $W_{5,3}$ лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Трансверсали $W_{k+1,k}$ и $W_{k+2,k}$ транзитивны. Ясно, что стабилизатор любого элемента в каждой из двух последних трансверсалей равен $\text{Stab}_1(k)$. Из леммы 5.1 и того факта, что $\text{Stab}_1(k)$ является максимальной собственной подгруппой в \mathbf{S}_k , вытекает, что решетки $\text{Con}(W_{k+1,k})$ и $\text{Con}(W_{k+2,k})$ содержат не более двух элементов (в частности, лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$).

Итак, решетки конгруэнций всех орбит всех собственных трансверсалией вида $W_{n,m}$ лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Кроме того, очевидно, что все эти трансверсалии имеют не более двух орбит, а в силу леммы 5.3 все трансверсалии сегрегированы. Мы показали, что для всех $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$. В силу лемм 6.13 и 6.14 $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.5 Система тождеств (m7)

Пусть теперь \mathcal{V} – нильмногообразие, заданное системой тождеств (m7). Этот случай разбирается вполне аналогично предыдущему. Поэтому мы позволим себе пропустить все выкладки, носящие рутинный характер, и ограничимся их результатами. В рассматриваемом случае многообразие \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 1$, а непустыми собственными трансверсалиями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются трансверсалии $W_{k+1,k}$ (где $k \geq 2$), $W_{4,2}$, $W_{5,2}$, $W_{5,3}$ и только они, причем первые три из них имеют тот же вид, что и в подразделе 6.3, а $W_{5,3} = \{x^3yz, y^3xz, z^3xy\}$. Как и в предыдущем подразделе, из сказанного легко выводится, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.6 Системы тождеств (m8)–(m15)

Для удобства дальнейших ссылок, сформулируем в виде леммы следующий факт, легко вытекающий из леммы 6.3.

Лемма 6.16. *Если нильмногообразие перестановочно и удовлетворяет одному из тождеств $x^2y = y^2x$, $xy^2 = yx^2$ и $x^2y = xy^2$, то оно удовлетворяет также тождеству*

$$x^2y^2 = 0. \quad (6.5)$$

Proof. Подставив в каждое из трех тождеств, указанных в посылке, x^2 вместо x , получим тождества $x^4y = y^2x^2$, $x^2y^2 = yx^4$ и $x^4y = x^2y^2$. Во всех трех случаях применимо четвертое утверждение леммы 6.3. \square

Как и в предыдущем подразделе, мы позволим себе ограничиться сводкой полученных результатов. Все они проверяются прямыми рутинными вычислениями с систематическим использованием лемм 6.3 и 6.16. Заметим, что мы можем не рассматривать системы тождеств (m9), (m11) и (m15), поскольку они двойственны к системам (m8), (m10) и (m14) соответственно. Итак, пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств (m8), (m10) и (m12)–(m14). Тогда \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 1$ и непустыми

собственными трансверсалиями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$\begin{aligned}
W_{3,2} &= \begin{cases} \{x^2y, y^2x; xy^2\} & \text{для систем } (m8) \text{ и } (m10); \\ \{xyx; xy^2, yx^2\} & \text{для системы } (m12); \\ \{x^2y, y^2x\} & \text{для систем } (m13) \text{ и } (m14); \end{cases} \\
W_{4,3} &= \begin{cases} \{xyxz\} & \text{для системы } (m12) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz; yxzx\} & \text{для системы } (m12) \text{ при } \pi = (13)(24); \\ \{xyxz, yxyz, zxzy\} & \text{для системы } (m12) \text{ при } \pi = (14)(23); \end{cases} \\
W_{k+1,k} &= \{x_i^2x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_k \mid 1 \leq i \leq k\} \text{ для системы } (m8) \text{ при} \\
&\quad \pi \in \{(134), (234), (12)(34)\}, \text{ причем } k \geq 3 \text{ при } \pi = (234) \text{ и} \\
&\quad k = 3 \text{ при } \pi \in \{(134), (12)(34)\}.
\end{aligned}$$

Как и в двух предыдущих подразделах, получаем, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.7 Системы тождеств $(\ell 1)$ и $(\ell 2)$

Поскольку системы тождеств $(\ell 1)$ и $(\ell 2)$ двойственны друг к другу, достаточно рассмотреть первую из них. Итак, предположим, что \mathcal{V} – нильмногообразиие, заданное системой тождеств $(\ell 1)$.

В силу леммы 6.16 в \mathcal{V} выполнено тождество (6.5). Поэтому далее в данном подразделе можно считать, что \mathcal{V} – многообразие, заданное тождествами

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, \quad x^2y = y^2x, \quad xyx = yxy, \quad x^2y^2 = 0,$$

где $\pi \in \Pi_1$.

Несложные вычисления показывают, что \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 1$ и непустыми собственными трансверсалиями вида $W_{n,m}$ являются следующие множества и только они:

$$\begin{aligned}
W_{3,2} &= \{x^2y; xyx; xy^2, yx^2\} \text{ при всех } \pi \in \Pi_1; \\
W_{4,2} &= \{xy^3, yx^3\}, \text{ если } \pi = (234); \\
W_{4,3} &= \begin{cases} \{xyz^2, yxz^2, xzy^2\}, & \text{если } \pi = (124); \\ \{xyz^2, yxz^2, zxy^2\}, & \text{если } \pi = (234); \\ \{xyz^2, xzy^2, yzx^2; xyxz\}, & \text{если } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz; yxzx\}, & \text{если } \pi = (13)(24); \\ \{xy^2z; xyxz, xzxy, yzyx\}, & \text{если } \pi = (14)(23). \end{cases}
\end{aligned}$$

Из следствия 5.2 вытекает, что решетки конгруэнций всех орбит этих трансверсалией полумодулярны вверх. А в силу леммы 5.3 все трансверсали сегрегированы. Мы показали, что для всех $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.15. Леммы 6.13 и 6.15 показывают, что решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

6.8 Системы тождеств (m16)–(m23)

Здесь мы также позволим себе опустить все выкладки и ограничиться сводкой полученных результатов. Как и ранее, все они проверяются прямыми рутинными вычислениями с систематическим использованием лемм 6.3 и 6.16. Заметим только, что мы можем не рассматривать системы тождеств (m17) и (m19), поскольку они двойственны системам (m16) и (m18) соответственно. Кроме того, рассмотрение двух последних систем сильно упрощается тем очевидным фактом, что каждая из них влечет систему ($\ell 1$). Это позволяет при рассмотрении систем (m16) и (m18) использовать результаты, полученные в предыдущем подразделе.

Итак, пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств (m16), (m18) и (m20)–(m23). Тогда \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 1$ и непустыми собственными трансверсалиями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyz^2, xzy^2, yzx^2\} & \text{для системы (m16) при } \pi = (12)(34); \\ \{xy^2z\} & \text{для системы (m16) при } \pi = (14)(23); \\ \{xyz^2, xzy^2, yzx^2; \\ \quad xyxz\} & \text{для системы (m18) при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz; yxzx\} & \text{для систем (m18), (m20) при } \pi = (13)(24); \\ \{xyxz, xzxy, yzyx\} & \text{для системы (m18) при } \pi = (14)(23); \\ \{xyxz\} & \text{для системы (m20) при } \pi = (12)(34); \\ \{x^2yz; xyxz\} & \text{для систем (m21) и (m23);} \\ \{x^2yz\} & \text{для системы (m22);} \end{cases}$$

$$W_{3,2} = \begin{cases} \{x^2y, y^2x; yxy\} & \text{для систем (m16) и (m20)–(m23);} \\ \{xyx; xy^2, yx^2\} & \text{для системы (m18).} \end{cases}$$

$$W_{4,2} = \{x^3y\} \text{ для системы (m20) при } \pi = (13)(24).$$

Точно так же, как и в подразделах 6.3–6.6, из этих данных вытекает, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.9 Системы тождеств $(\ell 3)$ – $(\ell 11)$

Пусть \mathcal{V} – нильмногообразиие, заданное одной из систем тождеств $(\ell 3)$ – $(\ell 11)$. В силу леммы 6.16 в \mathcal{V} выполнено тождество (6.5). Мы не будем рассматривать здесь систему тождеств $(\ell 6)$, поскольку она двойственна к системе $(\ell 5)$. Таким образом, в этом подразделе можно считать, что \mathcal{V} – многообразиие, заданное либо системой тождеств

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xy^2 = yx^2, x^2y^2 = 0, \quad (6.6)$$

где $\pi \in \Pi_3$, либо системой тождеств (6.6) при $\pi = (13)(24)$ вместе с одним из тождеств

$$xyxz = yxzx, xuyz = yxuz,$$

либо системой тождеств (6.6) при $\pi = (14)(23)$ вместе с одним из тождеств

$$xuyz = xuzx, xuyz = yxuz, xuyz = zxuz, xuyz = yzux, xuyz = yxuz.$$

Непосредственно проверяется, что \mathcal{V} наследственно m -однородно при $m > 2$, а если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем $(\ell 3)$ при $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\}$, $(\ell 5)$ и $(\ell 7)$ – $(\ell 10)$, то \mathcal{V} и наследственно 2-однородно.

Простые вычисления показывают, что непустыми собственными трансверсалиями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ являются следующие множества и только они:

$$\begin{aligned} W_{3,2} &= \{x^2y; xy^2; xux, yux\} \text{ для всех систем;} \\ W_{4,2} &= \{(xy)^2\} \text{ для систем } (\ell 3) \text{ при } \pi = (12)(34), (\ell 4) \text{ и } (\ell 11); \\ W_{4,3} &= \begin{cases} \{xyxz, xzxy, yxyz, yzux, \\ \quad zxzy, zyzx; xy^2z\} & \text{для системы } (\ell 3) \text{ при } \pi = (12)(34); \\ \{xyxz, yxyz, zxzy; xy^2z\} & \text{для систем } (\ell 4) \text{ и } (\ell 7); \\ \{xyxz; xy^2z; xyzx, xzyz, \\ \quad yxzx\} & \text{для системы } (\ell 5); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz; xy^2z\} & \text{для систем } (\ell 8) \text{ и } (\ell 9); \\ \{xyxz; xy^2z; xyzx, yxzy, \\ \quad zxzy\} & \text{для системы } (\ell 10); \\ \{xyxz, xzxy, yxyz, yzux, \\ \quad zxzy, zyzx; xy^2z; xyzx\} & \text{для системы } (\ell 11). \end{cases} \end{aligned}$$

Из следствия 5.2 вытекает, что решетки конгруэнций всех орбит этих трансверсалей полумодулярны вверх, а в силу леммы 5.3 сами

трансверсали сегрегированы. Если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем $(\ell 3)$ при $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\}$, $(\ell 5)$ и $(\ell 7)$ – $(\ell 10)$, то из сказанного вытекает, что для всякого $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.15. В силу леммы 6.15 в указанном случае решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

Остается рассмотреть системы $(\ell 3)$ при $\pi = (12)(34)$, $(\ell 4)$ и $(\ell 11)$. Итак, в оставшейся части этого подраздела \mathcal{V} – многообразие, заданное одной из следующих систем тождеств:

$$\begin{aligned}xyz t &= y x t z, x^2 y = y^2 x, x y^2 = y x^2, x^6 = 0; \\xyz t &= z t x y, x^2 y = y^2 x, x y^2 = y x^2, x y x z = y x z x, x^6 = 0; \\xyz t &= t z y x, x^2 y = y^2 x, x y^2 = y x^2, x y z x = y x z y, x^6 = 0.\end{aligned}$$

Из сказанного выше вытекает, что для всякого $m > 2$ выполнено условие (i) леммы 6.15.

Осталось рассмотреть случай $m = 2$. Пусть для краткости $W_2 = W_2^0(\mathcal{V})$, $C_2 = C_2(\mathcal{V})$ и $E'_2 = E'_2(\mathcal{V})$. Из сказанного выше ясно, что W_2 состоит из следующих шести орбит:

$$\begin{aligned}U_0 &= \{0\}, U_1 = \{xy, yx\}, U_2 = \{x^2y\}, \\U_3 &= \{xy^2\}, U_4 = \{xyx, yxy\}, U_5 = \{(xy)^2\}.\end{aligned}$$

Из леммы 6.11 вытекает, что решетка C_2 состоит из жадных конгруэнций. Очевидно, что решетки конгруэнций всех орбит содержат не более двух элементов, и потому все их подрешетки полумодулярны вверх. Следовательно, решетка $C_m^{U_i}(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх при $1 \leq i \leq 5$. Осталось убедиться в том, что решетка E'_2 полумодулярна вверх.

Пусть α – конгруэнция из C_2 такая, что $\alpha^* \in E'_2$. Предположим, что $U_2\alpha^*U_4$. Тогда в \mathcal{V}_α выполнено тождество $x^2y = xyx$. Умножая его справа на y и учитывая (6.5), получаем, что $(xy)^2 = 0$ в \mathcal{V}_α , т.е. $U_5\alpha^*U_0$. Аналогично проверяется, что если $U_3\alpha^*U_4$, то $U_5\alpha^*U_0$. Кроме того, отметим, что $U_4 \triangleleft U_5$ и $\ell(U_4) < \ell(U_5)$. Используя лемму 6.10, легко понять, что решетка E'_2 имеет вид, показанный на рис. 6. Прямой перебор всех пар элементов этой решетки позволяет убедиться в том, что она полумодулярна вверх. Но, учитывая, что эта решетка имеет довольно сложный вид, мы приведем рассуждение, позволяющее резко сократить упомянутый перебор. Напомним, что E'_2 – подрешетка решетки $\text{Eq}(\text{Orb}(W_2))$. Для краткости обозначим последнюю решетку через \overline{E}_2 . Глядя на рис. 6, легко понять, что если $\xi, \lambda \in E'_2$ и ξ покрывает λ в E'_2 , то ξ получается из λ объединением некоторых двух λ -классов. Отсюда вытекает, что ξ покрывает λ и в решетке \overline{E}_2 (см., например, [24,

лемма IV.4.1(iii)). Пусть теперь $\mu, \nu \in E'_2$ и μ покрывает $\mu \wedge \nu$ в E'_2 . В силу сказанного μ покрывает $\mu \wedge \nu$ и в \overline{E}_2 . Как хорошо известно, решетка эквивалентностей на произвольном множестве полумодулярна вверх (см., например, [24, теорема IV.4.2]). Следовательно, $\mu \vee \nu$ покрывает ν в \overline{E}_2 . Но тогда, очевидно, $\mu \vee \nu$ покрывает ν и в E'_2 . Мы показали, что решетка E'_2 полумодулярна вверх. Таким образом, при $m = 2$ выполнено условие (ii) леммы 6.15. В силу лемм 6.13 и 6.15 решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз.

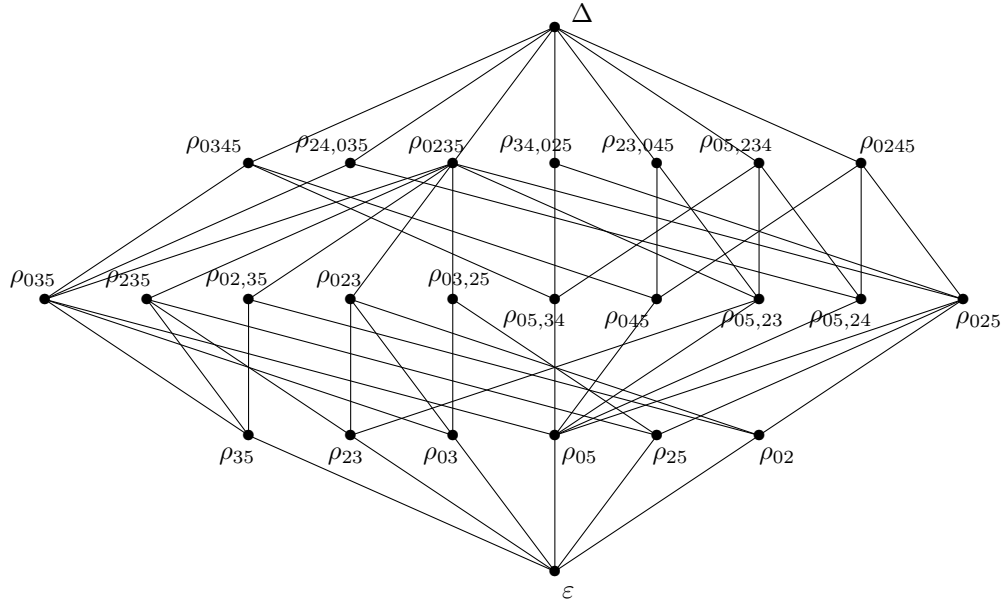


Figure 6: Решетка E'_2 для систем (ℓ_3) при $\pi = (12)(34)$, (ℓ_4) и (ℓ_{11})

Теорема 0.2 полностью доказана. Тем самым мы завершили доказательство теоремы 3 работы [1].

6.10 Системы тождеств (m_{24}) – (m_{41})

Поскольку системы (m_{24}) , (m_{26}) – (m_{28}) и (m_{32}) – (m_{36}) двойственны к системам (m_{25}) , (m_{29}) – (m_{31}) и (m_{37}) – (m_{41}) соответственно, достаточно рассмотреть системы (m_{25}) , (m_{29}) – (m_{31}) и (m_{37}) – (m_{41}) . Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, заданное одной из этих систем. В силу четвертого утверждения леммы 6.3 каждая из систем (m_{25}) , (m_{29}) – (m_{31}) и (m_{37}) – (m_{41}) влечет тождество $xy^2 = 0$, а значит и тождество $x^3y = yx^3$. Итак,

на протяжении этого подраздела можно считать, что \mathcal{V} – многообразие полугрупп, заданное либо системой тождеств

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, x^2y = y^2x, xy^2 = 0, \quad (6.7)$$

где $\pi \in \Pi_3$, либо системой тождеств (6.7) при $\pi = (13)(24)$ вместе с одним из тождеств

$$xuxz = yxzx, xuxz = yxuz, xuzy = xzyz,$$

либо системой тождеств (6.7) при $\pi = (14)(23)$ вместе с одним из тождеств

$$xuxz = xuzx, xuxz = yxzy, xuxz = zxuz, xuxz = yzux, xuzx = yxzy.$$

Ясно, что системы тождеств (m25), (m29), (m30), (m31), (m37), (m38), (m39), (m40) и (m41) влекут системы (l3), (l4), (l5), (l6), (l7), (l8), (l9), (l10) и (l11) соответственно. В силу результатов подраздела 6.9, если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем (m25) при $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\}$, (m30), (m31) и (m37)–(m40), то \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 1$, а если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем (m25) при $\pi = (12)(34)$, (m29) и (m41), то \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 2$. Сравнение вида собственных трансверсалий $W_{n,m}$ из подраздела 6.9 и систем тождеств (m25), (m29)–(m31) и (m37)–(m41) показывает, что непустыми собственными трансверсалиями вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$ будут следующие множества и лишь они:

$$W_{3,2} = \{x^2y; xux, yxy\} \text{ для всех систем;}$$

$$W_{4,2} = \{(xy)^2\} \text{ для систем (m25) при } \pi = (12)(34), (m29) \text{ и } (m41);$$

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xuxz, xzxy, yxuz, yzux, \\ \quad zxy, zyzx\} & \text{для системы (m25) при } \pi = (12)(34); \\ \{xuxz, yxuz, zxzy\} & \text{для систем (m29) и (m37);} \\ \{xuxz; xuzy, xzyz, yxzx\} & \text{для системы (m30);} \\ \{xuxz, xzxy, yxuz\} & \text{для систем (m38) и (m39);} \\ \{xuxz; xuzx, yxzy, zxuz\} & \text{для системы (m40);} \\ \{xuxz, xzxy, yxuz, yzux, \\ \quad zxy, zyzx; xuzx\} & \text{для системы (m41).} \end{cases}$$

Все эти трансверсали содержат не более двух орбит. Сегрегированность трансверсалий вытекает из леммы 5.3, а принадлежность решеток

конгруэнций их орбит квазимногообразию $\mathbf{M}_{3,4}$ – из следствия 5.2. Итак, если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем (m25) при $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\}, (m30), (m31)$ и (m37)–(m40), то для всякого натурального $m > 1$ выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$. В силу лемм 6.13 и 6.14 в указанном случае $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

Остается рассмотреть системы (m25) при $\pi = (12)(34), (m29)$ и (m41). Итак, в оставшейся части этого подраздела \mathcal{V} – многообразие полугрупп, заданное одной из следующих систем тождеств:

$$\begin{aligned}xyzt &= yxtz, x^2y = y^2x, xy^2 = 0; \\xyzt &= ztxy, x^2y = y^2x, xy^2 = 0, xyxz = yxzx; \\xyzt &= tzyx, x^2y = y^2x, xy^2 = 0, xyzx = yxzy.\end{aligned}$$

Из сказанного выше вытекает, что для всякого $m > 2$ выполнено условие (i) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$.

Осталось рассмотреть случай $m = 2$. Пусть для краткости $W_2 = W_2^0(\mathcal{V}), C_2 = C_2(\mathcal{V})$ и $E'_2 = E'_2(\mathcal{V})$. В силу леммы 6.16 в \mathcal{V} выполнено тождество (6.5). Из сказанного выше ясно, что W_2 состоит из следующих пяти орбит:

$$U_0, U_1 = \{xy, yx\}, U_2 = \{x^2y\}, U_3 = \{xyx, yxy\}, U_4 = \{(xy)^2\}.$$

Из леммы 6.11 вытекает, что решетка C_2 состоит из жадных конгруэнций. Кроме того, очевидно, что решетки конгруэнций всех орбит лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Осталось убедиться в том, что $E'_2 \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Пусть α – конгруэнция из C_2 такая, что $\alpha^* \in E'_2$. Предположим, что $U_2\alpha^*U_3$. Тогда в \mathcal{V}_α выполнено тождество $x^2y = yx$. Умножая это тождество справа на y и учитывая, что в \mathcal{V} выполнено тождество (6.5), получаем, что в этом случае $U_4\alpha^*U_0$. Заметим еще, что $U_3 \triangleleft U_4$ и $\ell(U_3) < \ell(U_4)$. Используя лемму 6.10, легко понять, что решетка E'_2 имеет вид, показанный на рис. 7. В частности, эта решетка лежит в $\mathbf{M}_{3,4}$.

Итак, при $m = 2$ выполнено условие (ii) леммы 6.14 при $\mathbf{L} = \mathbf{M}_{4,3}$. В силу лемм 6.13 и 6.14 $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

6.11 Системы тождеств (m42)–(m47)

В работе [8] показано, что если нильмногообразие \mathcal{V} удовлетворяет системе тождеств (m47), то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Системы (m42)–(m46) разбираются вполне аналогично. Поэтому мы не будем приводить здесь никаких вычислений, но для полноты картины укажем их

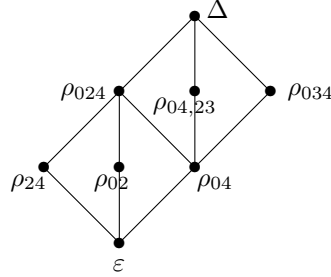


Figure 7: Решетка E'_2 для систем $(m25)$ при $\pi = (12)(34)$, $(m29)$ и $(m41)$

результаты. Достаточно рассмотреть системы тождеств $(m43)$, $(m45)$ и $(m47)$, поскольку они двойственны к системам $(m42)$, $(m44)$ и $(m46)$ соответственно.

Пусть \mathcal{V} – нильмногообразие, заданное одной из систем тождеств $(m43)$, $(m45)$ и $(m47)$. Тогда \mathcal{V} наследственно m -однородно для всякого $m > 2$ и есть лишь одна непустая собственная трансверсаль вида $W_{n,m} = W_{n,m}(\mathcal{V})$, где $m > 2$, а именно трансверсаль

$$W_{4,3} = \begin{cases} \{xyxz, xzxy, yxuz, yzux, xzzy, zyzx\} & \text{для системы } (m43); \\ \{xyxz, yxuz, xzzy\} & \text{для системы } (m45); \\ \{xyxz, xzxy, yxuz, yzux, xzzy, zyzx; xyxz\} & \text{для системы } (m47). \end{cases}$$

Далее, многообразие \mathcal{V} не является 2-однородным. Положим $W_2 = W_2^0(\mathcal{V})$, $C_2 = C_2(\mathcal{V})$ и $E'_2 = E'_2(\mathcal{V})$. Большая 0-трансверсаль W_2 состоит из следующих пяти орбит:

$$U_0 = \{0\}, U_1 = \{xy, yx\}, U_2 = \{xy^2\}, U_3 = \{xyx, yxy\}, U_4 = \{(xy)^2\},$$

решетка C_2 состоит только из жадных конгруэнций этого \mathbf{S}_2 -множества, а решетка E'_2 имеет такой же вид, как одноименная решетка, изображенная на рис. 7. Проверка того факта, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$, завершается теперь вполне аналогично тому, как это было сделано в предыдущем подразделе.

Теорема 0.1 полностью доказана. Тем самым мы завершили доказательство теоремы 2 работы [1] и теорем 1–3 работы [3].

6.12 Следствия

Напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нем тривиальны. Доказанная только что теоремы 2

работы [1] устанавливает, в частности, что в решетках многообразий полугрупп модулярность влечет существенно более сильное (в абстрактных решетках) тождество дезарговости. Как мы увидим ниже (см. следствие 6.2), в комбинаторном случае справедливо значительно более сильное утверждение. Чтобы доказать его, нам понадобится следующее

Предложение 6.1. *Пусть \mathbf{L} – нетривиальное квазимногообразие модулярных решеток. Решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп \mathcal{V} принадлежит \mathbf{L} тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) \mathcal{V} удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:

$$xy = (xy)^2; \quad (6.8)$$

$$xy = x^2y, (xy)^2 = xy^2, xyzt = yxzt; \quad (6.9)$$

$$xy = xy^2, (xy)^2 = x^2y, xyzt = xytzt; \quad (6.10)$$

(ii) $\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_\omega$ и $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{L}$;

(iii) $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{F} – одно из многообразий \mathcal{SL} и \mathcal{T} , а \mathcal{N} – нильмногообразие такое, что $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.

Proof. Необходимость. Ясно, что решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна. Отсюда, в силу теоремы 2 работы [1], вытекает, что \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств (m1)–(m47). Легко понять, что в классе комбинаторных многообразий системы тождеств (m1), (m2) и (m3) влекут системы тождеств (6.8), (6.9) и (6.10) соответственно. Если \mathcal{V} удовлетворяет системе тождеств (m4), то из доказательства леммы 6.5 и комбинаторности многообразия \mathcal{V} вытекает, что \mathcal{V} удовлетворяет одному из условий (ii) и (iii) доказываемого предложения. Наконец, если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств (m5)–(m47), то из доказательства леммы 6.8 вытекает, что \mathcal{V} удовлетворяет условию (iii) доказываемого предложения.

Достаточность. Если \mathcal{V} удовлетворяет системе тождеств (6.8), то решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна [25]. Предположим, что \mathcal{V} удовлетворяет системе тождеств (6.9). Легко понять, что \mathcal{V} комбинаторно. В силу леммы 6.1 решетка $L(\mathcal{V})$ вкладывается в прямое произведение 4-элементной цепи и решетки подмногообразий некоторого вполне регулярного многообразия, содержащегося в \mathcal{V} . Ясно, что всякое комбинаторное вполне регулярное многообразие состоит из связок, а, как хорошо известно, решетка всех многообразий связок дистрибутивна (см., например, [18]). Следовательно, и решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна.

Поскольку система тождеств (6.10) двойственна к (6.9), всякое многообразие, удовлетворяющее (6.10), также имеет дистрибутивную решетку подмногообразий. Любое нетривиальное квазимногообразие решеток содержит все дистрибутивные решетки. Следовательно, если \mathcal{V} удовлетворяет условию (i) доказываемого предложения, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$. Если же \mathcal{V} удовлетворяет одному из условий (ii) и (iii), то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$ в силу лемм 6.4 и 6.7 соответственно. \square

Следствие 6.2. *Решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп модулярна тогда и только тогда, когда она принадлежит квазимногообразию $\mathbf{M}_{4,3}$.*

Proof. Необходимость. Пусть \mathcal{V} – комбинаторное многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Тогда \mathcal{V} удовлетворяет одному из условий (i)–(iii) предложения 6.1, где в условиях (ii) и (iii) \mathbf{L} – многообразие всех модулярных решеток. Применяя предложение 6.1 в случае, когда \mathbf{L} – многообразие всех дистрибутивных решеток, мы получаем, что многообразия, удовлетворяющие условию (i) этого предложения, имеют дистрибутивную решетку подмногообразий (как уже отмечалось выше, для многообразия, заданного системой тождеств (6.8), этот факт доказан в [25]). Из теоремы 2 работы [1] и результатов, полученных в подразделах 6.3–6.6, 6.8, 6.10 и 6.11, вытекает, что если нильмногообразие имеет модулярную решетку подмногообразий, то эта решетка принадлежит $\mathbf{M}_{4,3}$. Учитывая леммы 6.4 и 6.7 получаем, что если \mathcal{V} удовлетворяет одному из условий (ii) и (iii) предложения 6.1, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

Достаточность очевидна. \square

Обозначим через \mathbf{ARG} многообразие всех дезарговых решеток, а через \mathbf{Eq}_4 , $\mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}}$ и \mathbf{E} – многообразия, порожденные соответственно решеткой эквивалентностей на 4-элементном множестве, решеткой $M_{4,3}$ и решеткой, изображенной на рис. 6. В силу теоремы 2 работы [1] в решетках многообразий полугрупп слабая полумодулярность вверх влечет дезарговость. Сравнение теорем 2 и 3 работы [1] показывает, что аналог этого утверждения для слабой полумодулярности вниз не имеет места. Возникает вопрос: существует ли нетривиальное решеточное тождество, выполненное во всех слабо полумодулярных вниз решетках многообразий полугрупп? Положительный ответ на него дает

Следствие 6.3. *Если \mathcal{V} – многообразие полугрупп со слабо полумодулярной вниз решеткой подмногообразий, то решетка $L(\mathcal{V})$ принадлежит многообразию $\mathbf{ARG} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial \vee \mathbf{E}^\partial$. Если при этом многообразие \mathcal{V} комбинаторно, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial \vee \mathbf{E}^\partial$.*

Proof. В силу теоремы 3 работы [1] \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств $(m1)$ – $(m15)$, $(m20)$ – $(m23)$ и $(\ell1)$ – $(\ell11)$. Если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств $(m1)$ – $(m15)$ или $(m20)$ – $(m23)$, то, в силу теоремы 2 работы [1], $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{ARG}$; если при этом \mathcal{V} комбинаторно, то, в силу следствия 6.2, $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств $(\ell1)$ – $(\ell11)$. В силу леммы 6.8 можно считать, что \mathcal{V} — нильмногообразие. Рассмотрения, проведенные в подразделах 6.7 и 6.9, в сочетании со следствием 5.1 и леммой 5.2 показывают, что если \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств $(\ell1)$ – $(\ell3)$ и $(\ell5)$ – $(\ell10)$ (где в системе $(\ell3)$ π — одна из перестановок (123) , (124) , (134) и (234)), то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial$. Пусть, наконец, \mathcal{V} удовлетворяет одной из систем тождеств $(\ell3)$ при $\pi = (12)(34)$, $(\ell4)$ и $(\ell11)$. Рассмотрения, проведенные в подразделе 6.9, в сочетании с предложением 5.2, леммой 5.2, следствием 6.1 и леммой 6.12, показывают, что $C_m(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial$ при $m \neq 2$ и $C_2(\mathcal{V}) \in \mathbf{E}^\partial$. В силу предложения 5.1, $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial \vee \mathbf{E}^\partial$. \square

Отметим, что $\mathbf{ARG} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial \vee \mathbf{E}^\partial$ — собственное многообразие решеток в силу результатов работы [26]; иными словами, в $\mathbf{ARG} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial \vee \mathbf{E}^\partial$ выполнено некоторое нетривиальное решеточное тождество.

Каждое из многообразий $\mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}}$, \mathbf{Eq}_4^∂ и \mathbf{E}^∂ , а значит и их объединение $\mathbf{M}_{4,3}^{\text{var}} \vee \mathbf{Eq}_4^\partial \vee \mathbf{E}^\partial$, порождается конечной решеткой. Хорошо известно, что всякое подмногообразие многообразия, порождаемого конечной решеткой, само порождено конечной решеткой [24, лемма V.2.3] и потому имеет конечный базис тождеств [24, теорема V.3.4]. Поэтому из теоремы 2 работы [1] и следствий 6.2 и 6.3 вытекает

Следствие 6.4. *Если решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп слабо полумодулярна вверх или слабо полумодулярна вниз, то эта решетка имеет конечный базис тождеств.*

References

- [1] Верников Б. М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. (Математика и механика. Вып. 4). С. 16–42.
- [2] Волков М. В. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества // Там же. С. 43–61.
- [3] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.

- [4] ВОЛКОВ М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 48–58.
- [5] ВОЛКОВ М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Там же. 1992. № 7. С. 3–8.
- [6] ВОЛКОВ М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Там же. № 8. С. 21–29.
- [7] VOLKOV M. V., ERSHOVA T. A. The lattice of varieties of semigroups with completely regular square // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G. V. Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.
- [8] ВЕРНИКОВ Б. М., ВОЛКОВ М. В. Структура решеток многообразий нильполугрупп // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. № 18. (Математика и механика. Вып. 3). С. 34–52.
- [9] VERNIKOV B. M. On congruences of G -sets // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol. 38, № 3. P. 603–613.
- [10] NELSON E. The lattice of equational classes of semigroups with zero // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, № 4. P. 531–534.
- [11] ВЕРНИКОВ Б. М., ВОЛКОВ М. В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып. 1). С. 13–33.
- [12] MCKENZIE R. N., MCNULTY G. F., TAYLOR W. F. Algebras. Lattices. Varieties. Vol. 1. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole, 1987.
- [13] ГОРБУНОВ В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн., 1999.
- [14] PASTIJN F. J. The lattice of completely regular semigroup varieties // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1990. Vol. 49, № 1. P. 24–42.
- [15] HEAD T. J. The lattice of varieties of commutative monoids // Nieuw Arch. Wiskunde. 1968. Vol. 16. P. 203–206.
- [16] САПИР М. В., СУХАНОВ Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1981. № 4. С. 48–55.
- [17] VERNIKOV B. M., VOLKOV M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.
- [18] EVANS T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.
- [19] ВЕРНИКОВ Б. М. О многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: УрГУ, 1988. С. 41–52.
- [20] ГОЛУБОВ Э. А., САПИР М. В. Фinitно аппроксимируемые многообразия полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1982. № 11. С. 21–29.
- [21] МЕЛЬНИК И. И. О многообразиях и решетках многообразий полугрупп // Исслед. по алгебре. Вып. 2. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970. С. 47–57.

- [22] STERN M. Semimodular lattices. Theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [23] POLLÁK GY. On the consequences of permutation identities // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. Vol. 34. P. 323–333.
- [24] ГРЕТЦЕР Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
- [25] GERHARD J. A. Semigroups with an idempotent power. II. The lattice of equational subclasses of $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. 1977. Vol. 14, № 4. P. 375–388.
- [26] DEAN R. A., EVANS T. A remark on varieties of lattices and semigroups // Proc. Am. Math. Soc. 1969. Vol. 21, № 2. P. 394–396.

Статья поступила 21.03.2001 г.