ПОЛУМОДУЛЯРНЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП: ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ*

Б. М. Верников

Введение

В работе [1] М. В. Волковым было анонсировано полное описание многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Доказательство этого результата «по модулю ниль-случая» опубликовано в работах [2, 3, 4, 5]. Доказательство в ниль-случае подробно изложено только в [6].

Данная работа является первой в цикле из трех статей, в которых рассматриваются многообразия полугрупп, решетки подмногообразий которых удовлетворяют нескольким естественным условиям, в некотором смысле близким к модулярности. Одним из важных обобщений модулярности является условие полумодулярности (см., например, недавнюю монографию [7], а также гл. 4 в [8] или гл. 3 в [9]). Наш интерес к рассмотрению этого условия применительно к решеткам многообразий полугрупп усиливается тем обстоятельством, что полумодулярность возникает при рассмотрении некоторых других ограничений на полугрупповые многообразия (см., например, [10]). Мы дадим полное описание многообразий полугрупп со (слабо) полумодулярной вверх или (слабо) полумодулярной вниз решеткой подмногообразий. В частности, будет показано, что в решетках многообразий полугрупп слабая полумодулярность вверх, полумодулярность вверх и модулярность эквивалентны, а слабая полумодулярность вниз и полумодулярность вниз эквивалентны между собой, но не эквивалентны модулярности.

Еще одно рассматриваемое нами условие является усилением модулярности. Речь идет о тождестве дезарговости. Наряду с дистрибутивностью и модулярностью, дезарговость относится к числу наиболее известных и важных решеточных тождеств (см., например, [8, 11]). Известно, что всякая дезаргова решетка модулярна, причем в решетке многообразий решеток интервал между многообразием всех дезарговых решеток и многообразием всех модулярных решеток континуален. Тождество дезарговости появлялось в ряде работ, посвященных решеткам многообразий полугрупп (см., например,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №01-01-00258) и межвузовской научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» Министерства образования Российской Федерации (проект №04.01.059).

[5, 12, 13, 14, 15]). Многообразия, рассматривавшиеся в работах [5, 12, 13, 14], имеют индекс $\leqslant 2$ в том смысле, что все нильполугруппы в них нильпотентны индекса $\leqslant 2$. Из результатов работ [2, 3, 4, 5] и их доказательств легко вытекает, что решетка подмногообразий произвольного многообразия индекса $\leqslant 2$ дезаргова тогда и только тогда, когда она модулярна. Вопрос об эквивалентности этих двух свойств для произвольного многообразия полугрупп сведен в этих работах к случаю многообразий нильполугрупп. Одним из основных результатов данного цикла работ является положительный ответ на этот вопрос. С учетом упомянутого выше результата М. В. Волкова это дает полное описание многообразий полугрупп с дезарговой решеткой подмногообразий.

В процессе доказательства указанных результатов мы дадим полное описание многообразий нильполугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. При этом будет показано, что в решетках комбинаторных многообразий полугрупп (в частности, в решетках нильмногообразий) модулярность эквивалентна некоторым существенно более сильным решеточным тождествам, чем дезарговость.

Описание многообразий полугрупп с полумодулярной решеткой подмногообразий было анонсировано в [16], а описание многообразий полугрупп с дезарговой решеткой подмногообразий — в [17].

Во всех трех работах цикла принята сквозная нумерация параграфов. В §1 приводятся необходимые определения и обозначения и формулируются основные результаты работы. Доказательству этих результатов посвящены §2–4 и 6. Более подробно содержание каждого из этих параграфов охарактеризовано в конце §1. В §5 воспроизводятся результаты работ [18, 19], необходимые для той части доказательства, которая излагается в §6. Настоящая статья содержит §1 и 2. Во вторую статью цикла, написанную М. В. Волковым и публикуемую в этом же выпуске журнала, входят §3 и 4, а в третью статью, которая будет опубликована позже, — §5 и 6.

1 Предварительные сведения и формулировки результатов

Через $\mathbf{S}_n$ будем обозначать группу перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Подгруппу группы $\mathbf{S}_n$, порожденную перестановкой $\pi \in \mathbf{S}_n$, будем обозначать через $\mathrm{gr}\{\pi\}$. Зафиксируем обозначения для трех конкретных подмножеств группы $\mathbf{S}_4$:

$$\Pi_1 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};$$
$$\Pi_2 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24)\};$$
$$\Pi_3 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34)\}.$$

Кроме того, через Ψ_n обозначается множество всех транспозиций из $\mathbf{S}_n$.

Многообразие полугрупп называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет нетривиальному *перестановочному* тождеству, т. е. тождеству вида

$$x_1x_2 \cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}$$

для некоторой нетривиальной перестановки $\pi \in \mathbf{S}_n$. Число n называется *длиной* этого тождества.

Напомним, что полугруппа называется *вполне регулярной*, если она является объединением групп. Многообразие называется *вполне регулярным*, если оно состоит из вполне регулярных полугрупп. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *многообразием индекса* n (где n — натуральное число), если все нильполугруппы из $\mathcal{V}$ нильпотентны ступени $\leqslant n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. Многообразие, содержащее полугруппу, нильпотентную ступени $> n$, будем называть *многообразием индекса* $> n$.

Как хорошо известно, произвольное многообразие полугрупп конечного индекса является *периодическим*, т. е. состоит из периодических полугрупп. Далее, всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ содержит наибольшее групповое подмногообразие, наибольшее вполне регулярное подмногообразие и наибольшее нильподмногообразие. Обозначим эти подмногообразия через $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$, $\mathrm{CR}(\mathcal{V})$ и $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$ соответственно. Через S^1 мы будем обозначать полугруппу, получаемую внешним присоединением единицы к полугруппе S, а через $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V})$ — подмногообразие в $\mathcal{V}$, порожденное всеми полугруппами из $\mathcal{V}$ вида N^1, где N — нильполугруппа (если $\mathcal{V}$ не содержит полугрупп указанного вида, то $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V})$ — тривиальное многообразие).

Через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, через $\operatorname{var}\Sigma$ — многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ, а через $\operatorname{var} S$ — многообразие полугрупп, порожденное полугруппой S. Мы используем также общепринятое обозначение $u = 0$ для записи системы тождеств $uw = wu = u$, где w пробегает множество всех полугрупповых слов.

В дальнейшем нам придется иметь дело с большим числом конкретных многообразий полугрупп. Приведем здесь список обозначений для этих многообразий:

$\mathcal{A}_n = \operatorname{var}\{x^n y = y,\, xy = yx\}$, где n — натуральное число и $n > 1$;
$\mathcal{B} = \operatorname{var}\{x^2 = x\}$;
$\mathcal{C} = \operatorname{var}\{x^2 = x^3,\, xy = yx\}$;
$\mathcal{C}_\omega = \operatorname{var}\{x^2 = 0,\, xy = yx\}$;
$\mathcal{CSA}_p = \operatorname{var}\{x^2yx = xyx^2,\, x(yx)^p = x\}$, где p — простое число;
$\mathcal{CZM} = \operatorname{var}\{xyz = x^2 = 0,\, xy = yx\}$;

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{LRB} = \mathrm{var}\{x^2 = x,\, xyx = xy\};\\
&\mathcal{LSNB} = \mathrm{var}\{x^2 = x,\, xyz = xyzxz\};\\
&\mathcal{LZ} = \mathrm{var}\{xy = x\};\\
&\mathcal{LZM} = \mathrm{var}\{xyz = xy\};\\
&\mathcal{M}_3 = \mathrm{var}\{xyz = x^2 = 0\};\\
&\mathcal{M}_4^0 = \mathrm{var}\{xyzt = x^3 = 0,\, xy = yx,\, xyx = yxy\};\\
&\mathcal{M}_4^1[(12)] = \mathrm{var}\{xyzt = x^2y = 0,\, xyz = yxz,\, xyx = yxy\};\\
&\mathcal{M}_4^1[(13)] = \mathrm{var}\{xyzt = x^2 = 0,\, xyz = zyx,\, xyx = yxy\};\\
&\mathcal{M}_4^1[(23)] = \mathrm{var}\{xyzt = xy^2 = 0,\, xyz = xzy,\, xyx = yxy\};\\
&\mathcal{M}_4^2[(12)] = \mathrm{var}\{xyzt = xyx = 0,\, xyz = yxz,\, x^2y = y^2x\};\\
&\mathcal{M}_4^2[(13)] = \mathrm{var}\{xyzt = xyx = 0,\, xyz = zyx,\, x^2y = xy^2\};\\
&\mathcal{M}_4^2[(23)] = \mathrm{var}\{xyzt = xyx = 0,\, xyz = xzy,\, xy^2 = yx^2\};\\
&\mathcal{M}_\omega = \mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\};\\
&\mathcal{P} = \mathrm{var}\{xy = x^2y,\, x^2y^2 = y^2x^2\};\\
&\mathcal{P}^* = \mathrm{var}\{xy = xy^2,\, x^2y^2 = y^2x^2\};\\
&\mathcal{Q} = \mathrm{var}\{xy = x^2y,\, xyz^2 = yxz^2,\, xyx = yx^2\};\\
&\mathcal{Q}^* = \mathrm{var}\{xy = xy^2,\, x^2yz = x^2zy,\, xyx = x^2y\};\\
&\mathcal{RRB} = \mathrm{var}\{x^2 = x,\, xyx = yx\};\\
&\mathcal{RSNB} = \mathrm{var}\{x^2 = x,\, xyz = xzxyz\};\\
&\mathcal{RZ} = \mathrm{var}\{xy = y\};\\
&\mathcal{RZM} = \mathrm{var}\{xyz = yz\};\\
&\mathcal{SI} = \mathrm{var}\{xy = (xy)^2\};\\
&\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x^2 = x,\, xy = yx\};\\
&\mathcal{T} = \mathrm{var}\{x = y\};\\
&\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}.
\end{aligned}
$$

Далее эти обозначения используются без специальных оговорок.

Также без специальных оговорок мы будем использовать тот общеизвестный факт, что многообразия $\mathcal{A}_p$, где p — простое число, $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и только они являются минимальными нетривиальными многообразиями полугрупп (см., например, [20]).

Говорят, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ *покрывает* элемент y этой решетки, если $y < x$ и не существует элемента z такого, что $y < z < x$. Решетка L называется (*слабо*) *полумодулярной вверх*, если для любых $x, y \in L$ из того, что x покрывает $x \wedge y$ (соответственно x и y покрывают $x \wedge y$), вытекает, что $x \vee y$ покрывает y. Двойственно определяются (*слабо*) *полумодулярные вниз* решетки.

Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий будем для краткости называть *модулярными*. В аналогичном смысле мы будем говорить о (*слабо*) *полумодулярных вверх*, (*слабо*) *полумодулярных вниз* и *дезарговых* многообразиях.

Модулярные многообразия полугрупп охарактеризованы в [6] тремя способами: на языке тождеств, на языке структурных свойств полугрупп и на языке «запрещенных подмногообразий». Следуя терминологии, предложенной в обзоре [21], мы будем называть эти три способа описания многообразий с некоторым свойством *эквациональным, структурным* и *индикаторным* описанием соответственно. Воспроизведем указанные результаты из [6].

Теорема 1.1 ((эквациональный вариант)). *Многообразие полугрупп модулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одной из следующих систем тождеств (где n — натуральное число):*

$xy = (xy)^{n+1}$; $(m1)$
$xy = x^{n+1}y$, $(xy)^{n+1} = xy^{n+1}$, $xyzt = xyx^n zt$; $(m2)$
$xy = xy^{n+1}$, $(xy)^{n+1} = x^{n+1}y$, $xyzt = xyt^n zt$; $(m3)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xyx = yx^2 = x^{n+2}y$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m4)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xyx = yx^2$, $x^3yz = xy^3z$, $x^6 = x^7$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m5)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xyx = yx^2$, $x^2y^2z = xy^2z^2$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m6)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xyx = yx^2$, $x^3yz = xy^2z^2$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m7)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xyx$, $xy^2 = yx^2$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m8)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = yxy$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m9)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy$, $xy^2 = yx^2$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m10)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xyx$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m11)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xy^2$, $xyx = yxy$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m12)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy = yx^2$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m13)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xyx = xy^2$, $x^4y = yx^4$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m14)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy = xy^2$, $x^4y = yx^4$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m15)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xyx = x^2yx$, $x^3y = yx^3$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m16)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $xy^2 = yx^2$, $xyx = xyx^2$, $x^3y = yx^3$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m17)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = x^3y$, $xyx = yxy$, $x^3y = yx^3$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m18)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $xy^2 = xy^3$, $xyx = yxy$, $x^3y = yx^3$ $(\pi \in \Pi_1)$; $(m19)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$ $(\pi \in \Pi_2)$; $(m20)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$, $x^2yz = y^2zx$; $(m21)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$, $x^2yz = yzyx$; $(m22)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$, $xyxz = yzyx$; $(m23)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $x^3y = yx^3$ $(\pi \in \Pi_3)$; $(m24)$
$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $x^3y = yx^3$ $(\pi \in \Pi_3)$; $(m25)$
$xyzt = ztxy$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzx$; $(m26)$
$xyzt = ztxy$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxyz$; $(m27)$
$xyzt = ztxy$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyzy = xzyz$; $(m28)$
$xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yxzx$; $(m29)$
$xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yxyz$; $(m30)$
$xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyzy = xzyz$; $(m31)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = xyzx$; $(m32)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzy$; $(m33)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = zxyz$; $(m34)$
$xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yzyx$; $(m35)$

$xyzt = tzyx,\ x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy;$ $(m36)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = xyzx;$ $(m37)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yxzy;$ $(m38)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = zxyz;$ $(m39)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyxz = yzyx;$ $(m40)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3,\ xyzx = yxzy;$ $(m41)$
$xyzt = yxtz,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2;$ $(m42)$
$xyzt = yxtz,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2;$ $(m43)$
$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyxz = yxzx;$ $(m44)$
$xyzt = ztxy,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx;$ $(m45)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2,\ xyzx = yxzy;$ $(m46)$
$xyzt = tzyx,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy.$ $(m47)$

Теорема 1.1 ((структурный вариант)). *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ модулярно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

M1) *квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ — вполне регулярная полугруппа;*

M2) *$\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие такое, что множество всех идемпотентов произвольной полугруппы $S \in \mathcal{E}$ образует подполугруппу в S, удовлетворяющую тождеству $xyz = xyxz$;*

M3) *$\mathcal{V} = \mathcal{D}^* \vee \mathcal{E}^*$, где $\mathcal{D}^*$ — одно из многообразий $\mathcal{P}^*$ и $\mathcal{Q}^*$, а $\mathcal{E}^*$ — вполне регулярное многообразие такое, что множество всех идемпотентов произвольной полугруппы $S \in \mathcal{E}^*$ образует подполугруппу в S, удовлетворяющую тождеству $xyz = xzyz$;*

M4) *$\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{A}$ — многообразие периодических абелевых групп, $\mathcal{K}$ — одно из многообразий $\mathcal{C}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{M}$ удовлетворяет системе тождеств $x^2y = xyx = yx^2 = 0$, $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$ для некоторой перестановки $\pi \in \Pi_1$;*

M5) *$\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{T}$, а $\mathcal{N}$ — многообразие нильполугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств* $(m5)$–$(m47)$.

Теорема 1.1 ((индикаторный вариант)). *Многообразие полугрупп модулярно тогда и только тогда, когда оно не содержит:*

J1) *многообразий вида $\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{Q}^* \vee \mathcal{X}^*$, где $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{CSA}_p$, $\mathcal{LSNB}$, $\mathcal{RRB}$ и $\mathcal{RZM}$, а $\mathcal{X}^*$ — одно из многообразий $\mathcal{CSA}_p$, $\mathcal{LRB}$, $\mathcal{LZM}$ и $\mathcal{RSNB}$;*

J2) *многообразий вида $\mathcal{M}_3 \vee \mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — минимальное неабелево многообразие периодических групп или одно из многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$;*

J3) *многообразий вида $\mathcal{M} \vee \mathcal{Z}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{M}_4^0$, $\mathcal{M}_4^1[\pi]$ и $\mathcal{M}_4^2[\pi]$, где $\pi \in \Psi_3$, а $\mathcal{Z}$ — одно из многообразий $\mathcal{A}_p$, где p — простое число, и $\mathcal{C}$;*

J4) *многообразий, заданных одной из следующих систем тождеств:*

$$xyzt = x^2y = 0; \qquad (j1)$$
$$xyzt = xy^2 = 0; \qquad (j2)$$
$$xyzt = xyx = 0; \qquad (j3)$$
$$xyzt = x^3 = 0,\ x^2y = xy^2; \qquad (j4)$$
$$xyzt = x^3 = 0,\ x^2y = yxy; \qquad (j5)$$
$$xyzt = x^3 = 0,\ xy^2 = xyx; \qquad (j6)$$
$$xyzt = x^3 = 0,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyx = yxy; \qquad (j7)$$
$$xyzt = x^3 = 0,\ x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}\ (\pi \in \Psi_3); \qquad (j8)$$
$$x_1x_2\cdots x_5 = x^2 = xyx = 0,\ x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}\ (\pi \in \Psi_4); \qquad (j9)$$
$$x_1x_2\cdots x_5 = x^2 = 0,\ xyzt = ztxy; \qquad (j10)$$
$$x_1x_2\cdots x_5 = x^2 = 0,\ xyzt = tzyx,\ xyxz = xzxy; \qquad (j11)$$
$$x_1x_2\cdots x_5 = x^2 = 0,\ xyzt = tzyx,\ xyxz = yxyz; \qquad (j12)$$
$$x_1x_2\cdots x_5 = x^2 = 0,\ xyzt = tzyx,\ xyxz = zyzx; \qquad (j13)$$
$$x_1x_2\cdots x_5 = x^3 = 0,\ xyzt = tzyx,\ x^2y = yx^2,\ xyx = yxy; \qquad (j14)$$
$$x_1x_2\cdots x_6 = x^4 = x^3y^2 = 0,\ xy = yx. \qquad (j15)$$

Ясно, что многообразия, перечисленные в индикаторном варианте теоремы 1.1, немодулярны, но все их собственные подмногообразия модулярны. Многообразия с этим свойством называются *почти модулярными.* Отметим, что множество таких многообразий континуально: это вытекает из п. J2 индикаторного варианта теоремы 1.1 и того факта, что существует континуум минимальных неабелевых многообразий периодических групп [22].

Сформулируем основные результаты данного цикла статей.

Теорема 1.2. *Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх;*

б) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх;*

в) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна;*

г) *решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова.*

Теорема 1.3. *Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз;*

б) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз;*

в) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одной из систем тождеств $(m1)$–$(m15)$, $(m20)$–$(m23)$ (где n — натуральное число), либо одной из следующих систем тождеств:*

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xyx = yxy\ (\pi \in \Pi_1); \qquad (\ell1)$$
$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ xy^2 = yx^2,\ xyx = yxy\ (\pi \in \Pi_1); \qquad (\ell2)$$
$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2\ (\pi \in \Pi_3); \qquad (\ell3)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzx; \qquad (\ell4)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxyz; \qquad (\ell5)$$
$$xyzt = ztxy,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyzy = xzyz; \qquad (\ell6)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = xyzx; \qquad (\ell7)$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yxzy; \qquad (\ell8)$$

$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = zxyz; \tag{$\ell9$}$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = yzyx; \tag{$\ell10$}$$
$$xyzt = tzyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy; \tag{$\ell11$}$$

г) *выполнено либо одно из условий* M1–M4 *структурного варианта теоремы* 1.1, *либо условие*

  L5) $\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{F}$ — *одно из многообразий* $\mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{T}$, *а* $\mathcal{N}$ — *многообразие нильполугрупп, удовлетворяющее одной из систем тождеств* $(m5)$–$(m15)$, $(m20)$–$(m23)$, $(\ell1)$–$(\ell11)$;

д) $\mathcal{V}$ *не содержит многообразий, указанных в пп.* J1–J3 *индикаторного варианта теоремы* 1.1, *и многообразий, заданных системами тождеств* $(j1)$–$(j6)$, $(j8)$–$(j15)$.

Мы видим, что класс всех (слабо) полумодулярных вниз многообразий шире класса модулярных многообразий. Однако сравнение условия «д» теоремы 1.3 с индикаторным вариантом теоремы 1.1 показывает, насколько узок «зазор» между этими двумя классами: континуальное множество почти модулярных многообразий содержит ровно одно многообразие (а именно многообразие $\mathrm{var}(j7)$), являющееся слабо полумодулярным вниз. Иными словами, справедливо

Следствие 1.1. *Для многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$, *не содержащего многообразие* $\mathrm{var}(j7)$, *следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *слабо полумодулярна вверх;*
б) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *слабо полумодулярна вниз;*
в) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вверх;*
г) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вниз;*
д) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *модулярна;*
е) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *дезаргова.*

В частности, шесть условий, перечисленных в следствии 1.1, эквивалентны для коммутативных многообразий (отметим, что этот факт был анонсирован еще в [23]) и для многообразий индекса $\leqslant 2$. Последнее дает положительный ответ на вопрос 3.9«б» из «Свердловской тетради» [24]. Отметим еще, что теоремы 1.2 и 1.3 решают задачу 3.9«а» из «Свердловской тетради».

Из доказательства теоремы 1.2 вытекает еще одно весьма неожиданное следствие. Чтобы сформулировать его, напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если оно не содержит нетривиальных групп. Ясно, что всякое многообразие нильполугрупп комбинаторно. Оказывается, что в решетках подмногообразий комбинаторных многообразий модулярность эквивалентна некоторым существенно более сильным тождествам, чем дезарговость. Обозначим через $M_{4,3}$ решетку, изображенную на рис. 1, а через $\mathbf{M}_{4,3}$ — многообразие, порожденное этой решеткой. Отметим, что решетка $M_{4,3}$ дезаргова.

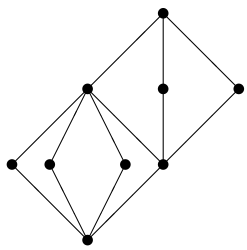

Figure 1: Решетка $M_{4,3}$

Легко понять, что многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ имеет всего семь подмногообразий. С другой стороны, хорошо известно, что многообразие всех модулярных решеток имеет континуум подмногообразий (см., например, [8, 11]). Тем не менее справедливо

Следствие 1.2. *Решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп модулярна тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию* $\mathbf{M}_{4,3}$.

Доказательство следствия 1.2 будет дано в §6 (в третьей статье цикла).

Мы будем доказывать теоремы 1.2 и 1.3 параллельно, и фактически можно говорить об их едином доказательстве. В §2 мы покажем, что слабо полумодулярное вверх (вниз) многообразие не содержит ни одного из многообразий, перечисленных в индикаторном варианте теоремы 1.1 (соответственно в условии «д» теоремы 1.3). В §3 доказывается импликация д) $\longrightarrow$ г) теоремы 1.3, а также устанавливается, что слабо полумодулярное вверх многообразие должно удовлетворять одному из условий структурного варианта теоремы 1.1. Параграф 4 посвящен проверке импликации г) $\longrightarrow$ в) теоремы 1.3 и доказательству того, что в слабо полумодулярном вверх многообразии выполняется одна из систем тождеств эквационального варианта теоремы 1.1. Наконец, в §6 доказываются импликация в) $\longrightarrow$ б) теоремы 1.3 и дезарговость многообразий, удовлетворяющих одной из упомянутых систем тождеств. Этого достаточно для доказательства как теорем 1.2 и 1.3, так и всех трех вариантов теоремы 1.1.

2 Индикаторное описание: необходимость

В этом параграфе доказывается, что слабо полумодулярное вверх (вниз) многообразие не содержит ни одного из многообразий, перечисленных в индикаторном варианте теоремы 1.1 (соответственно, в условии «д» теоремы 1.3). Поскольку классы всех слабо полумодулярных вверх и всех слабо полумодулярных вниз многообразий замкнуты относительно взятия подмногообразий, для этого достаточно установить, что все многообразия, указанные в индикаторном варианте теоремы 1.1, за исключением $\mathrm{var}(j7)$, не являются ни слабо полумодулярными вверх, ни слабо полумодулярными вниз и что многообразие $\mathrm{var}(j7)$ не является слабо полумодулярным вверх.

Параграф делится на пять пунктов. В п. 2.1 указана общая схема проверки того, что многообразия из пп. J1, J2 и J3 индикаторного варианта теоремы 1.1 не являются слабо полумодулярными ни вверх, ни вниз. Эта схема реализована в пп. 2.2, 2.3 и 2.4 для многообразий из пп. J1, J2 и J3 индикаторного варианта теоремы 1.1 соответственно. В п. 2.5 доказаны нужные нам свойства многообразий из п. J4.

Отметим, что в пп. 2.1–2.4 мы опираемся на технику, развитую в работах [2, 4], а в п. 2.5 — на результаты работ [19, 25].

2.1 Общая схема доказательства для ненильпотентных многообразий

Зафиксируем обозначения для некоторых множеств многообразий:

$$\begin{aligned}
&M = \{\mathcal{M}_4^0, \mathcal{M}_4^1[\pi], \mathcal{M}_4^2[\pi] \mid \pi \in \Psi_3\};\\
&X_1 = \{\mathcal{CSA}_p, \mathcal{LSNB}, \mathcal{RRB}, \mathcal{RZM} \mid p \text{ — простое число}\};\\
&X_2 = \{\mathcal{G}, \mathcal{LZ}, \mathcal{P} \mid \mathcal{G} \text{ — минимальное неабелево многообразие}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{периодических групп}\};\\
&X_3 = \{\mathcal{A}_p, \mathcal{C} \mid p \text{ — простое число}\};\\
&X = X_1 \cup X_2 \cup X_3.
\end{aligned}$$

Для любой пары многообразий $\mathcal{M} \in M$ и $\mathcal{X} \in X_3$ положим

$$\mathcal{M}_{\mathcal{X}}^0 = \mathrm{Nil}(\mathcal{M} \vee \mathcal{X}),\ \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^1 = \mathcal{M}_\omega \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^0 \text{ и } \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^2 = \mathcal{M} \vee \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^1.$$

Зафиксируем многообразие $\mathcal{M} \in M$. Ясно, что для всякого $\mathcal{X} \in X_3$ имеют место включения $\mathcal{M} \vee \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^2 \vee \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^0 \vee \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M} \vee \mathcal{X}$, и потому

$$\mathcal{M} \vee \mathcal{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^2 \vee \mathcal{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^0 \vee \mathcal{X}. \tag{1}$$

Через $\overline{\mathcal{V}}$ будем обозначать объединение всех собственных подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$. Далее, для всякого многообразия $\mathcal{X} \in X$ определим многообразия $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$ следующим образом:

если $\mathcal{X} \in X_1$, то $\mathcal{Y} = \mathcal{Q}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{P}$ и $\mathcal{Z}' = \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$;

если $\mathcal{X} \in X_2$, то $\mathcal{Y} = \mathcal{M}_3$, $\mathcal{Z} = \mathcal{CZM}$ и $\mathcal{Z}' = \mathcal{ZM}$;

если $\mathcal{X} \in X_3$, то $\mathcal{Y} = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^0$, $\mathcal{Z} = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^2$ и $\mathcal{Z}' = \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^1$, где $\mathcal{M}$ — произвольное, но фиксированное многообразие из множества M.

В этих обозначениях многообразия из пп. J1–J3 индикаторного варианта теоремы 1.1 суть, с точностью до двойственности, многообразия вида $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X} \in X$.

Дальнейшие рассмотрения иллюстрирует рис. 2. Пусть $\mathcal{X} \in X$. Отметим некоторые взаимосвязи между многообразиями $\mathcal{X}$, $\overline{\mathcal{X}}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$. Ясно, что $\overline{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$. Более того, несложно проверяется, что это включение всегда является собственным (см. пп. 2.2–2.4). Далее, ясно, что $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$. Эти включения также являются собственными (это очевидно для $\mathcal{X} \in X_1 \cup X_2$ и будет доказано в п. 2.4 для $\mathcal{X} \in X_3$). В дальнейшем решающую роль будет играть то обстоятельство, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{Y}$ (и потому $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = \mathcal{X} \vee \mathcal{Z}$). Это включение немедленно вытекает из лемм 2 и 3

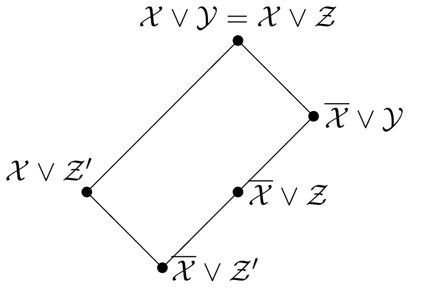

Figure 2: Интервал $[\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}',\, \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}]$

работы [4] для $\mathcal{X} \in X_1$, из леммы 1 работы [2] для $\mathcal{X} \in X_2$ и из (1) для $\mathcal{X} \in X_3$.

Если x и y — элементы решетки L и $x \leqslant y$, то через $[x,\, y]$ обозначается интервал в L с наименьшим элементом x и наибольшим элементом y. Справедливо следующее

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{X} \in X$, а многообразия $\overline{\mathcal{X}}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$ имеют указанный выше смысл. Тогда*

0) $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}' \subset \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z} \subset \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$*;*

1) $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$ *покрывает* $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$*;*

2) $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ *покрывает* $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$*;*

3) *интервал* $[\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}',\, \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}]$ *решетки* $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})$ *конечен.*

Предложение 2.1 доказывается в пп. 2.2, 2.3 и 2.4 для $\mathcal{X} \in X_1$, $\mathcal{X} \in X_2$ и $\mathcal{X} \in X_3$ соответственно. Здесь мы покажем, как из предложения 2.1 выводится, что многообразие $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ не является ни слабо полумодулярным вверх, ни слабо полумодулярным вниз. Легко проверить, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}' \nsubseteq \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$. Из этого факта и утверждения 1 предложения 2.1 вытекает, что

$$(\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}') \wedge (\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}) = \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}' \quad \text{и} \quad (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}') \wedge (\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}) = \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'.$$

Теперь утверждение 1 показывает, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$ покрывает $(\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}') \wedge (\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z})$. Но из утверждения 0 предложения 2.1 и того легко проверяемого факта, что $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$, вытекает, что $(\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}') \vee (\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{X} \vee \mathcal{Z} = \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ не покрывает $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$. С другой стороны, в силу утверждения 2 предложения 2.1, $(\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}') \vee (\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ покрывает $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$, но по утверждению 0 $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$ не покрывает $(\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}') \wedge (\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}) = \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$. Итак, интервал $[\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}',\, \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}]$ не является ни полумодулярным вверх, ни полумодулярным вниз. Хорошо известно, что конечная решетка слабо полумодулярна вверх (вниз) тогда и только тогда, когда она полумодулярна вверх (соответственно вниз) — см., например, теорему 3.7 в [9]. В силу утверждения 3 предложения 2.1 интервал $[\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}',\, \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}]$ не является ни слабо полумодулярным вверх, ни слабо полумодулярным вниз. Учитывая, что слабая полумодулярность (как вверх, так и вниз) наследуется интервалами решетки, получаем, что многообразие $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ также не является ни слабо полумодулярным вверх, ни слабо полумодулярным вниз.

2.2 Ненильпотентные многообразия индекса 2

В этом пункте предложение 2.1 будет доказано в случае, когда $\mathcal{X} \in X_1$. Для того чтобы читателю было легче следить за выкладками, мы изобразили на рис. 3 решетки подмногообразий всех многообразий $\mathcal{X} \in X_1$ и многообразия $\mathcal{Q}$. Все эти решетки хорошо известны. Описание решетки $L(\mathcal{CSA}_p)$ вытекает, например, из результатов [26], а вид решеток $L(\mathcal{LSNB})$ и $L(\mathcal{RRB})$ — из описания решетки всех многообразий связок (см., например, [20]). Решетка $L(\mathcal{RZM})$ вычисляется непосредственно, а описание решетки $L(\mathcal{Q})$ легко следует из леммы 14 работы [4] (см. также лемму 2.3 ниже).

В частности, из рис. 3 видно, что $\overline{\mathcal{CSA}_p} = \mathcal{A}_p \vee \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$, $\overline{\mathcal{LSNB}} = \mathcal{LRB} \vee \mathcal{RZ}$, $\overline{\mathcal{RRB}} = \mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}$ и $\overline{\mathcal{RZM}} = \mathcal{RZ} \vee \mathcal{ZM}$. Многообразия $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$, $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$, $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$, $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ для всех $\mathcal{X} \in X_1$ указаны в табл. 1.

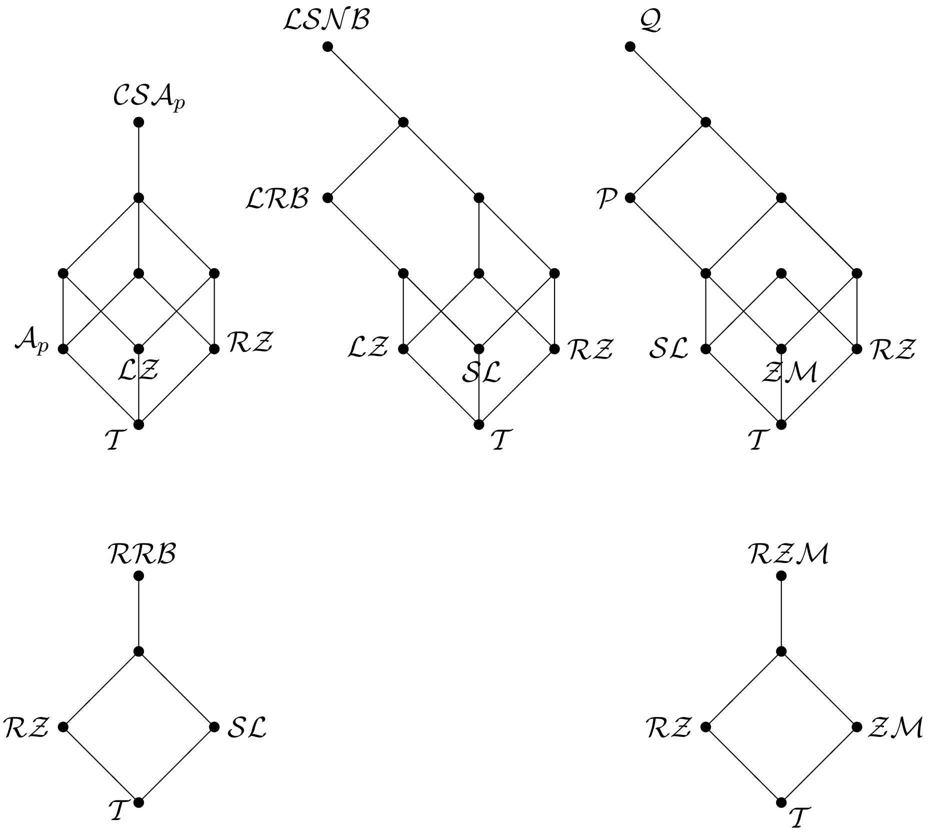

Figure 3: Решетки $L(\mathcal{CSA}_p)$, $L(\mathcal{LSNB})$, $L(\mathcal{Q})$, $L(\mathcal{RRB})$ и $L(\mathcal{RZM})$

Пусть $\mathcal{X} \in X_1$. Утверждение 0 предложения 2.1 очевидно. Докажем утверждения 1–3.

Утверждение 1. Положим

$$\mathcal{U} = \begin{cases} \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}, & \text{если } \mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p; \\ \mathcal{ZM}, & \text{если } \mathcal{X} \in \{\mathcal{LSNB}, \mathcal{RRB}\}; \\ \mathcal{SL}, & \text{если } \mathcal{X} = \mathcal{RZM}. \end{cases}$$

Таблица 1

$\mathcal{X}$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$	$\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$	$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$
$\mathcal{CSA}_p$	$\mathcal{A}_p \vee \mathcal{LZ} \vee$ $\vee \mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee$ $\vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{SL} \vee$ $\vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{A}_p \vee \mathcal{LZ} \vee$ $\vee \mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$	$\mathcal{A}_p \vee \mathcal{LZ} \vee$ $\vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{Q}$
$\mathcal{LSNB}$	$\mathcal{LRB} \vee$ $\vee \mathcal{RZ} \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{LSNB} \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{LRB} \vee \mathcal{P} \vee$ $\vee \mathcal{RZ}$	$\mathcal{LRB} \vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{LSNB} \vee \mathcal{Q}$
$\mathcal{RRB}$	$\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee$ $\vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{RRB} \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \vee \mathcal{RRB}$
$\mathcal{RZM}$	$\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee$ $\vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{RZ}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$

Из табл. 1 видно, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}' = \mathcal{U} \vee \mathcal{X}$ и $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}' = \mathcal{U} \vee \overline{\mathcal{X}}$ для всех $\mathcal{X} \in X_1$. Ясно, что $\mathcal{U} \wedge \mathcal{X} = \mathcal{T}$. Поскольку $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$ и $\mathcal{X}$ покрывает $\overline{\mathcal{X}}$, остается сослаться на следующие два хорошо известных факта.

Лемма 2.1 ([27]). *Пусть $\mathcal{F}$ — многообразие полугрупп. Если $\mathcal{F} \wedge \mathcal{SL} = \mathcal{T}$, то $L(\mathcal{F} \vee \mathcal{SL}) \cong L(\mathcal{F}) \times L(\mathcal{SL})$.*

Лемма 2.2 ([28]). *Пусть $\mathcal{F}$ — многообразие полугрупп. Если $\mathcal{F} \wedge \mathcal{ZM} = \mathcal{T}$, то $L(\mathcal{F} \vee \mathcal{ZM}) \cong L(\mathcal{F}) \times L(\mathcal{ZM})$.*

Утверждение 2. Здесь нам понадобятся три вспомогательных утверждения. Пусть $\mathcal{F}$ — многообразие полугрупп. Следуя [4], обозначим через $\widetilde{\mathcal{F}}$ наибольшее из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, содержащееся в $\mathcal{F}$. Следующее утверждение вытекает из леммы 14 работы [4] и леммы 4 работы [29].

Лемма 2.3. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{F}$ удовлетворяет тождеству*

$$xy = x^{n+1}y \tag{2}$$

для некоторого натурального n и $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{RZM}$, то $\mathcal{F} = \mathrm{CR}(\mathcal{F}) \vee \widetilde{\mathcal{F}}$.

Из доказательства леммы 15 работы [4] вытекает

Лемма 2.4. *Если многообразия полугрупп $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ удовлетворяют тождеству (2) для некоторого n, то $\mathrm{CR}(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) = \mathrm{CR}(\mathcal{F}_1) \vee \mathrm{CR}(\mathcal{F}_2)$.*

Лемма 2.5. *Если $\mathcal{F}$ — многообразие полугрупп, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$ и $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{P}$, то $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$.*

Proof. Ясно, что многообразие $\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$ удовлетворяет тождеству $xy = x^2y$. В силу леммы 7 работы [4] $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{SI}$. Из утверждения, двойственного к лемме 4.1 работы [5], вытекает теперь, что $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \vee \mathcal{RZM}$. В [30] показано, что решетка $L(\mathcal{SI})$ дистрибутивна. Поскольку $\mathcal{B} \vee \mathcal{RZM} \subseteq \mathcal{SI}$, имеем $\mathcal{F} = (\mathcal{B} \vee \mathcal{RZM}) \wedge \mathcal{F} = (\mathcal{B} \wedge \mathcal{F}) \vee (\mathcal{RZM} \wedge \mathcal{F}) \subseteq (\mathcal{B} \wedge \mathcal{F}) \vee \mathcal{RZM}$. Далее, используя лемму 2.4, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \wedge \mathcal{F} = \mathrm{CR}(\mathcal{B} \wedge \mathcal{F}) \subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}) = \\ = \mathrm{CR}(\mathcal{Q}) \vee \mathrm{CR}(\mathcal{RZM}) = (\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}) \vee \mathcal{RZ} = \mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}) \vee \mathcal{RZM} = \mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$. Лемма доказана. $\square$

Из табл. 1 видно, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}' = \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$ для всех $\mathcal{X} \in X_1$. Пусть $\mathcal{F} \in [\mathcal{SL} \vee \mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{Q} \vee \mathcal{X}]$. Предположим сначала, что $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{CSA}_p$, $\mathcal{LSNB}$ и $\mathcal{RRB}$. По лемме 2.3 $\mathcal{F} = \mathrm{CR}(\mathcal{F}) \vee \widetilde{\mathcal{F}}$, а по лемме 2.4 $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}) = \mathrm{CR}(\mathcal{Q}) \vee \mathcal{X} = \mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{X}$. Если $\mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p$, то $\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{SL}$ и $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{SL}$. Если же $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LSNB}$ или $\mathcal{RRB}$, то $\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} = \mathcal{X}$ и $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{X}$. В обоих случаях противоположное включение очевидно. Таким образом, $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) = \mathcal{CSA}_p \vee \mathcal{SL}$, если $\mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p$, и $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) = \mathcal{X}$, если $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LSNB}$ и $\mathcal{RRB}$. Ясно, что $\mathcal{ZM} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$. Если $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{ZM}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$ при $\mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p$ и $\mathcal{F} = \mathcal{X} \vee \mathcal{ZM} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$ в случае, когда $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LSNB}$ и $\mathcal{RRB}$. Мы видим, что в любом случае $\mathcal{F} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} \vee \mathcal{ZM}$. Предположим теперь, что $\widetilde{\mathcal{F}} \neq \mathcal{ZM}$ и потому $\widetilde{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{Q} \vee \mathcal{X} \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{P} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{X} = \mathcal{P} \vee \mathcal{X} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{X}$ при $\mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p$ и $\mathcal{Q} \vee \mathcal{X} \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{P} \vee \mathcal{X} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{X}$ в случае, когда $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LSNB}$ и $\mathcal{RRB}$ Таким образом, в любом случае $\mathcal{F} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{X}$.

Пусть, наконец, $\mathcal{X} = \mathcal{RZM}$. Поскольку $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{RZM}$, мы получаем, что $\mathcal{F} \in [\mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}, \mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}]$. Если $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{P}$, то $\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM} = \mathcal{P} \vee \mathcal{RZM} \subseteq \mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$; если же $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{P}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$, в силу леммы 2.5.

Утверждение 3. Предположим сначала, что $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{CSA}_p$, $\mathcal{LSNB}$ и $\mathcal{RRB}$. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q} \vee \mathcal{X}$. По лемме 2.3 $\mathcal{F} = \mathrm{CR}(\mathcal{F}) \vee \widetilde{\mathcal{F}}$, а по лемме 2.4 $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{Q} \vee \mathcal{X}) = \mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{X}$. Это означает, что $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{X}$ при $\mathcal{X} = \mathcal{CSA}_p$ и $\mathrm{CR}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{X}$ в случае, когда $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LSNB}$ и $\mathcal{RRB}$. Поскольку решетка $L(\mathcal{X})$ конечна, лемма 2.1 показывает, что и решетка $L(\mathrm{CR}(\mathcal{F}))$ конечна. Учитывая, что $\widetilde{\mathcal{F}} \in \{\mathcal{T}, \mathcal{ZM}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$, мы получаем, что $\mathcal{F}$ принадлежит конечному множеству многообразий и потому решетка $L(\mathcal{Q} \vee \mathcal{X})$ конечна.

Пусть теперь $\mathcal{X} = \mathcal{RZM}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$. Предположим, что $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{RZM}$. Как и выше, из лемм 2.3 и 2.4 вытекает, что $\mathcal{F} = \mathrm{CR}(\mathcal{F}) \vee \widetilde{\mathcal{F}}$ и

$$\begin{aligned} \mathrm{CR}(\mathcal{F}) &\subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}) = \mathrm{CR}(\mathcal{Q}) \vee \mathrm{CR}(\mathcal{RZM}) = \\ &= (\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}) \vee \mathcal{RZ} = \mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL}. \end{aligned}$$

Поскольку решетка $L(\mathcal{RZ} \vee \mathcal{SL})$ конечна и $\widetilde{\mathcal{F}} \in \{\mathcal{T}, \mathcal{ZM}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$, мы видим, что для $\mathcal{F}$ есть только конечное число возможностей. Пусть теперь $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{RZM}$. Если $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{P}$, то $\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM} \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{P} \vee \mathcal{RZM} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$. Если же $\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{P}$, то $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$, в силу леммы 2.5, а значит, $\mathcal{F}$ — одно из многообразий $\mathcal{RZM}$ и $\mathcal{RZM} \vee \mathcal{SL}$, в силу леммы 2.1. Таким образом, многообразие $\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM}$ имеет только конечное число подмногообразий, не содержащих $\mathcal{RZM}$, и только три подмногообразия, содержащих $\mathcal{RZM}$. Мы видим, что решетка $L(\mathcal{Q} \vee \mathcal{RZM})$ конечна.

2.3 Ненильпотентные многообразия индекса 3

В этом пункте будет доказано предложение 2.1 при $\mathcal{X} \in X_2$. Хорошо известно, что $\overline{\mathcal{LZ}} = \mathcal{T}$ и $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$ (см., например, рис. 3). Зафиксируем минимальное неабелево многообразие периодических групп $\mathcal{G}$. Ясно, что

$\overline{\mathcal{G}} \neq \mathcal{G}$, поскольку в противном случае $\mathcal{G}$ было бы абелевым. В частности, отсюда вытекает, что $\mathcal{G}$ покрывает $\overline{\mathcal{G}}$. Далее, $\overline{\mathcal{G}} \neq \mathcal{T}$, поскольку в противном случае $\mathcal{G} = \mathcal{A}_p$ для некоторого простого p, т. е. $\mathcal{G}$ абелево. Итак, $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{A}_n$ для некоторого $n > 1$.

Многообразия $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$, $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$, $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$, $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ для всех $\mathcal{X} \in X_2$ указаны в табл. 2. Хорошо известно и легко проверяется, что решетки $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{M}_3)$ и $L(\mathcal{M}_3 \vee \mathcal{P})$ имеют вид, изображенный на рис. 4.

Таблица 2

$\mathcal{X}$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$	$\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$	$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$
$\mathcal{G}$	$\mathcal{A}_n \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{A}_n \vee \mathcal{CZM}$	$\mathcal{A}_n \vee \mathcal{M}_3$	$\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3$
$\mathcal{LZ}$	$\mathcal{ZM}$	$\mathcal{LZ} \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{CZM}$	$\mathcal{M}_3$	$\mathcal{LZ} \vee \mathcal{M}_3$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{CZM} \vee \mathcal{SL}$	$\mathcal{M}_3 \vee \mathcal{SL}$	$\mathcal{M}_3 \vee \mathcal{P}$

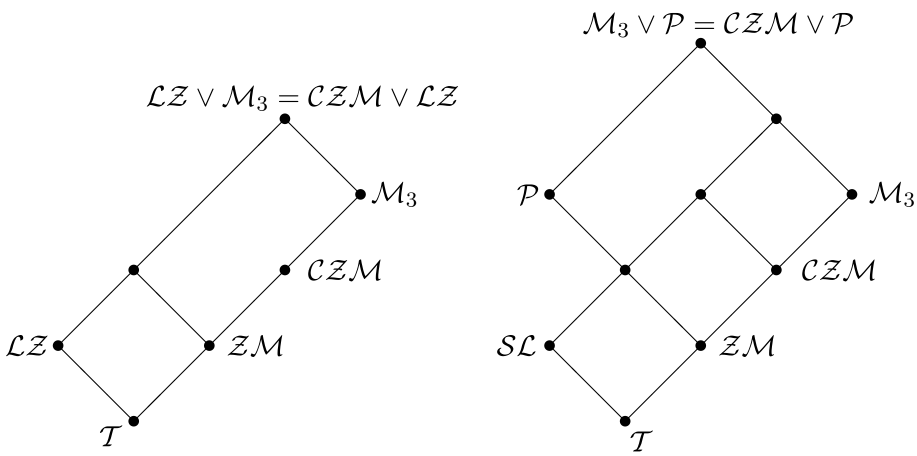

Figure 4: Решетки $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{M}_3)$ и $L(\mathcal{M}_3 \vee \mathcal{P})$

Сравнение табл. 2 с рис. 4 показывает, что предложение 2.1 справедливо в случае, когда $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{P}$. (Впрочем, тот факт, что многообразия $\mathcal{LZ} \vee \mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_3 \vee \mathcal{P}$ не являются слабо полумодулярными ни вверх, ни вниз, непосредственно вытекает из рис. 4.) Очевидно также, что утверждение 0 предложения 2.1 выполнено при $\mathcal{X} = \mathcal{G}$. Докажем утверждения 1–3 этого предложения при $\mathcal{X} = \mathcal{G}$.

Утверждение 1. Согласно табл. 2 нужно доказать, что $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$ покрывает $\mathcal{A}_n \vee \mathcal{ZM}$. Так как $\mathcal{G}$ покрывает $\mathcal{A}_n$, это следует из леммы 2.2.

Утверждение 2. Нам понадобятся две леммы. Первая из них хорошо известна.

Лемма 2.6. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{F}$ не содержит неодноэлементных связок, то* $\mathcal{F} = \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$.

Лемма 2.7 ((см. лемму 2 в [31])). *Если $\mathcal{F}$ — комбинаторное многообразие полугрупп, а $\mathcal{H}$ — многообразие периодических групп, то* $\mathrm{Gr}(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

Как видно из табл. 2, мы должны проверить, что $\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3$ покрывает $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$. Возьмем многообразие $\mathcal{F}$ такое, что $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3$. В силу леммы 2.6 $\mathcal{F} = \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$. Используя лемму 2.7, мы получаем, что

$$\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3) = \mathcal{G},$$

т. е. $\mathrm{Gr}(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$. Далее, ясно, что $\mathcal{ZM} \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$. Если $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) = \mathcal{ZM}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$. В противном случае $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{CZM}$ и

$$\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3 \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \vee \mathcal{CZM} = \mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3,$$

т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3$.

Утверждение 3. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3$. По лемме 2.6 $\mathcal{F} = \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$ и в силу леммы 2.7 $\mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3) = \mathcal{G}$. Ясно, что $\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3$ удовлетворяет тождествам $x^{s+1}yz = xyz$ и $x^{s+2} = x^2$, где s — экспонента многообразия $\mathcal{G}$. В силу леммы 1 работы [32] всякая нильполугруппа, удовлетворяющая тождеству вида $x_1x_2 \cdots x_n = u$, где u — слово длины $> n$, удовлетворяет также тождеству $x_1x_2 \cdots x_n = 0$. Кроме того, очевидно, что в любой нильполугруппе тождество вида $x^r = x^s$, где $r < s$, влечет тождество $x^r = 0$. Следовательно, $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3) \subseteq \mathcal{M}_3$. Решетка $L(\mathcal{M}_3)$ конечна (см., например, рис. 4). Решетка $L(\mathcal{G})$ также конечна, поскольку решетка $L(\mathcal{A}_n)$ конечна и $|L(\mathcal{G})| = |L(\mathcal{A}_n)|+1$. Значит, и решетка $L(\mathcal{G} \vee \mathcal{M}_3)$ конечна.

2.4 Ненильпотентные многообразия индекса > 3

В этом пункте мы докажем предложение 2.1 в случае, когда $\mathcal{X} \in X_3$. Зафиксируем многообразие $\mathcal{M} \in M$. Мы можем считать, что $\mathcal{Y} = \mathcal{M}^0_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{Z}' = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$. Хорошо известно, что $\overline{\mathcal{A}}_p = \mathcal{T}$ и $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_\omega \vee \mathcal{SL}$ (см., например, [20]). Из очевидных включений $\mathcal{C}_\omega \subseteq \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_\omega \subseteq \mathcal{M}_\omega$ вытекает, что

$$\mathcal{C}_\omega \subseteq \mathcal{M}_\omega \wedge \mathrm{Nil}(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}) = \mathcal{M}_\omega \wedge \mathcal{M}^0_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}}.$$

Итак,

$$\mathcal{C}_\omega \subseteq \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}}. \tag{3}$$

Многообразия $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$, $\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$, $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$, $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ для всех $\mathcal{X} \in X_3$ указаны в табл. 3.

Таблица 3

$\mathcal{X}$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}'$	$\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}'$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$	$\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$	$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$
$\mathcal{A}_p$	$\mathcal{M}^1_{\mathcal{A}_p}$	$\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{A}_p}$	$\mathcal{M}^2_{\mathcal{A}_p}$	$\mathcal{M}^0_{\mathcal{A}_p}$	$\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}^0_{\mathcal{A}_p}$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \vee \mathcal{SL}$	$\mathcal{C} \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}}$	$\mathcal{M}^2_{\mathcal{C}} \vee \mathcal{SL}$	$\mathcal{M}^0_{\mathcal{C}} \vee \mathcal{SL}$	$\mathcal{C} \vee \mathcal{M}^0_{\mathcal{C}}$

Приступим к непосредственной проверке предложения 2.1 при $\mathcal{X} \in X_3$.

Утверждение 0. Прежде всего, проверим, что $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z} \subset \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Y}$. В силу табл. 3 и леммы 2.1 достаточно показать, что $\mathcal{M}^2_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{M}^0_{\mathcal{X}}$.

Поскольку $\mathcal{M} \in M$, в $\mathcal{M}$ выполнено одно из тождеств

$$x^2y = xy^2,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yx^2,\ xyx = yxy.$$

Обозначим это тождество через $u = v$. Очевидно, тождество $u = 0$ не выполнено в $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{M}_\omega$, тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$. Следовательно, многообразие $\mathcal{M}^2_{\mathcal{X}} = \mathcal{M} \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, но не удовлетворяет тождеству $u = 0$. Кроме того, $u = v$ не выполнено в $\mathcal{X}$, поскольку $\mathcal{X} \in X_3$. В силу (1) $\mathrm{Nil}(\mathcal{M}^2_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X}) = \mathrm{Nil}(\mathcal{M} \vee \mathcal{X}) = \mathcal{M}^0_{\mathcal{X}}$. Остается применить следующую лемму, обобщающую леммы 1 и 8 из [2].

Лемма 2.8. *Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие нильполугрупп, удовлетворяющее тождеству $u = v$, но не тождеству $u = 0$, а $\mathcal{F}$ — многообразие полугрупп, не удовлетворяющее тождеству $u = v$. Тогда $\mathcal{N} \subset \mathrm{Nil}(\mathcal{N} \vee \mathcal{F})$.*

Proof. Пусть A (соответственно B) — свободная полугруппа счетного ранга в многообразии $\mathcal{N}$ (соответственно $\mathcal{F}$), а D — фактор-полугруппа Риса полугруппы $A \times B$ по ее идеалу $\{0\} \times B$. Ясно, что $D \in \mathrm{Nil}(\mathcal{N} \vee \mathcal{F})$. Обозначим через F абсолютно свободную полугруппу счетного ранга. Существуют гомоморфизмы $\alpha\colon\ F \longrightarrow A$ и $\beta\colon\ F \longrightarrow B$ такие, что $\alpha(u) \neq 0$ и $\beta(u) \neq \beta(v)$. Ясно, что $\alpha(v) \neq 0$. Определим гомоморфизм $\gamma\colon\ F \longrightarrow A \times B$ правилом: $\gamma(w) = (\alpha(w), \beta(w))$ для всех $w \in F$. Тогда $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ и $\gamma(u), \gamma(v) \notin \{0\} \times B$. Следовательно, тождество $u = v$ не выполнено в D. Поскольку $\mathcal{N}$ удовлетворяет этому тождеству, мы получаем $\mathcal{N} \subset \mathrm{Nil}(\mathcal{N} \vee \mathcal{F})$. □

Проверим теперь, что $\overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}' \subset \overline{\mathcal{X}} \vee \mathcal{Z}$. В силу табл. 3 и леммы 2.1 достаточно заметить, что $\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}}$. В самом деле, если $\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} = \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}} = \mathcal{M} \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$, то $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{M}_\omega$, но $\mathcal{M}_\omega$ не содержит ни одного многообразия из множества M.

Утверждение 1. Согласно табл. 3 мы должны проверить, что $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{A}_p}$ покрывает $\mathcal{M}^1_{\mathcal{A}_p}$ и $\mathcal{C} \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}}$ покрывает $\mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \vee \mathcal{SL}$. В первом случае достаточно принять во внимание, что $\mathcal{M}^1_{\mathcal{A}_p} \subseteq \mathcal{M}_\omega$ и, в силу предложения 2«а» работы [31], $L(\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}_\omega) \cong L(\mathcal{A}_p) \times L(\mathcal{M}_\omega)$. Во втором случае достаточно сослаться на то, что $\mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \vee \mathcal{SL} = \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \vee (\mathcal{C}_\omega \vee \mathcal{SL})$ в силу (3), $\mathcal{C}$ покрывает $\mathcal{C}_\omega \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{M}_\omega$ и решетка $L(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}_\omega)$ вкладывается в $L(\mathcal{C}) \times L(\mathcal{M}_\omega)$ (в силу леммы 3 работы [3]).

Утверждение 2. Из табл. 3 видно, что мы должны проверить, что $\mathcal{M}^0_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X}$ покрывает $\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X}$. Напомним, что $\mathcal{M}^0_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X} = \mathcal{M} \vee \mathcal{X}$ в силу (1). Пусть $\mathcal{F} \in [\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X},\ \mathcal{M} \vee \mathcal{X}]$. Рассмотрим многообразие $\mathrm{Nil}(\mathcal{F})$. Если $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}_\omega$, то $\mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{M} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{M}_\omega = \mathcal{M}^0_{\mathcal{X}} \wedge \mathcal{M}_\omega = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$, т. е. $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$. Предположим теперь, что $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \nsubseteq \mathcal{M}_\omega$. В силу леммы 7 работы [2] отсюда вытекает, что $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{M}'$ для некоторого многообразия $\mathcal{M}' \in M$. Следовательно, $\mathcal{M} \vee \mathcal{X} \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{M}'$. Рутинные вычисления показывают, что если $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in M$ и $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{X} \supseteq \mathcal{F}_2$, то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. Мы убедились, что $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{M} \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} = \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}}$. Следовательно, либо $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$, либо $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}}$. Если $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}}$, то, используя равенство (1), имеем $\mathcal{M} \vee \mathcal{X} \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{M}^2_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X} = \mathcal{M} \vee \mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{M} \vee \mathcal{X}$. Осталось проверить, что если $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}} \vee \mathcal{X}$.

Итак, пусть $\mathrm{Nil}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}^1_{\mathcal{X}}$. Предположим сначала, что $\mathcal{X} = \mathcal{A}_p$. В силу леммы 2.6 $\mathcal{F} = \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$. Используя лемму 2.7, получаем, что $\mathcal{A}_p \subseteq \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}) = \mathcal{A}_p$, т. е. $\mathrm{Gr}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_p$. Следовательно, $\mathcal{F} = \mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{A}_p}$.

Остается рассмотреть случай, когда $\mathcal{X} = \mathcal{C}$. Здесь нам нужны две леммы. Первая из них следует из результатов работы [33] и доказательства предложения 1 из [2].

Лемма 2.9. *Если периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{F}$ удовлетворяет квазитождеству $e^2 = e \longrightarrow ex = xe$ и все моноиды в $\mathcal{F}$ коммутативны, то $\mathcal{F} = \mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}^1(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$.*

Лемма 2.10. *Если $\mathcal{N}$ — нильпотентное многообразие, то $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{C} \vee \mathcal{N}) = \mathcal{C}$.*

Proof. Ясно, что многообразие $\mathcal{C} \vee \mathcal{N}$ перестановочно и удовлетворяет тождеству $x^2y^n = x^3y^n$, где n — индекс нильпотентности многообразия $\mathcal{N}$. Следовательно, всякий моноид из $\mathcal{C} \vee \mathcal{N}$ лежит в $\mathcal{C}$ и, в частности, $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{C} \vee \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{C}$. Обратное включение вытекает из того хорошо известного факта, что $\mathcal{C} = \mathrm{var}\, C^1$, где C — двухэлементная полугруппа с нулевым умножением (см., например, [20]). $\square$

Завершим проверку утверждения 2 предложения 2.1 при $\mathcal{X} = \mathcal{C}$. Так как $\mathcal{C}$ коммутативно, $\mathcal{M}$ нильпотентно, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$, получаем, что многообразие $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию леммы 2.9. Из этой леммы и того факта, что $\mathrm{Gr}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}) = \mathcal{T}$, следует, что $\mathcal{F} = \mathrm{Nil}^1(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$. В силу леммы 2.10 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Nil}^1(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Nil}^1(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}) = \mathcal{C}$, т. е. $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{F}) = \mathcal{C}$. Следовательно, $\mathcal{F} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}}$.

Утверждение 3. Предположим сначала, что $\mathcal{X} = \mathcal{A}_p$. Ясно, что многообразие $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M}$ перестановочно и $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M} \not\supseteq \mathcal{C}_\omega$. В силу [34] отсюда вытекает, что решетка $L(\mathcal{A}_p \vee \mathcal{M})$ конечна.

Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{C}$. В силу (1) $\mathcal{C} \vee \mathcal{M}^0_{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{F} \in [\mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \vee \mathcal{SL},\ \mathcal{C} \vee \mathcal{M}]$. Согласно лемме 2.9 $\mathcal{F} = \mathrm{Nil}^1(\mathcal{F}) \vee \mathrm{Nil}(\mathcal{F})$. Из леммы 2.10 получаем, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathrm{Nil}^1(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Nil}^1(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}) = \mathcal{C}$. Многообразие $\mathcal{SL}$ порождается двухэлементной полурешеткой, которую можно рассматривать как одноэлементную (ниль)полугруппу с внешне присоединенной единицей. Как уже отмечалось выше, $\mathcal{C} = \mathrm{var}\, C^1$, где C — двухэлементная полугруппа с нулевым умножением. Следовательно, $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{F})$ — одно из многообразий $\mathcal{C}$ или $\mathcal{SL}$. Остается проверить, что $\mathrm{Nil}(\mathcal{F})$ также принадлежит конечному множеству многообразий. Используя (3), имеем $\mathcal{C}_\omega \subseteq \mathcal{M}^1_{\mathcal{C}} \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Nil}(\mathcal{C} \vee \mathcal{M}) = \mathcal{M}^0_{\mathcal{C}}$. Следовательно, достаточно установить, что интервал $[\mathcal{C}_\omega,\ \mathcal{M}^0_{\mathcal{C}}]$ конечен. Тождества многообразий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{M}$ показывают, что $\mathcal{M}^0_{\mathcal{C}} = \mathrm{Nil}(\mathcal{C} \vee \mathcal{M})$ удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$, всем тождествам вида $u = 0$, где u — слово длины 4, зависящее от трех букв, и всем перестановочным тождествам длины $\geqslant 4$. Отсюда легко вытекает, что многообразие из интервала $[\mathcal{C}_\omega,\ \mathcal{M}^0_{\mathcal{C}}]$ может быть задано внутри $\mathcal{M}^0_{\mathcal{C}}$ только тождествами вида $u = 0$, где $u \in \{x^2, x^2y, xy^2, xyx\}$, тождествами вида $u = v$, где u и v — слова длины 3, зависящие от двух букв, и перестановочными тождествами длины $\leqslant 3$. Ясно, что таким образом можно задать только конечное число подмногообразий.

Предложение 2.1 полностью доказано. Как показано в конце п. 2.1, отсюда следует, что многообразия, указанные в пп. J1–J3 теоремы 1.1, не являются ни слабо полумодулярными вверх, ни слабо полумодулярными вниз.

2.5 Нильпотентные многообразия

В данном пункте будет показано, что многообразия, заданные системами тождеств $(j1)$–$(j15)$, не являются слабо полумодулярными вверх, а многообразия, заданные системами тождеств $(j1)$–$(j6)$ и $(j8)$–$(j15)$, не являются и слабо полумодулярными вниз.

В рамках данного пункта под словом «полугруппа» удобно понимать полугруппу с сигнатурным нулем. Тем не менее все полученные ниже результаты справедливы и для обычных полугрупповых многообразий, поскольку, как показано в [35], решетка многообразий нильполугрупп с сигнатурным нулем изоморфна решетке многообразий нильполугрупп в обычной полугрупповой сигнатуре.

Воспроизведем необходимые для дальнейшего результаты работ [19] и [25]. Для этого нам понадобится ряд определений и обозначений.

Пусть A — непустое множество, G — группа, а φ — гомоморфизм из G в группу всех перестановок множества A. Для всякого $g \in G$ определим унарную операцию g^* на A правилом $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ называется G-*множеством.* G-множество A называется *транзитивным*, если для любой пары элементов $a, b \in A$ существует $g \in G$ такой, что $g^*(a) = b$. Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* в A. Для произвольного элемента a из G-множества A положим

$$\mathrm{Stab}_A(a) = \{g \in G \mid g^*(a) = a\}.$$

Ясно, что $\mathrm{Stab}_A(a)$ — подгруппа в G. Как обычно, мы обозначаем через $\mathrm{Con}(A)$ и $\mathrm{Sub}(G)$ решетку конгруэнций на A и решетку подгрупп группы G соответственно.

Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *однородным*, если из выполнимости в $\mathcal{V}$ тождества $u = v$, где u и v — слова разной длины, вытекает, что $u = 0$ в $\mathcal{V}$.

Напомним, что через F мы обозначаем абсолютно свободную полугруппу счетного ранга над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Если $u \in F \setminus \{0\}$, то через $\ell(u)$ обозначается длина слова u, а через $c(u)$ — множество всех букв, входящих в запись u. Пусть $\mathcal{V}$ — однородное многообразие, а n и m — натуральные числа такие, что $m \leqslant n$. Положим

$$F_{n,m}(\mathcal{V}) = \{u \in F \mid \ell(u) = n,\ c(u) = \{x_1, \ldots, x_m\} \text{ и } u \neq 0 \text{ в } \mathcal{V}\}.$$

Далее, пусть $W_{n,m}(\mathcal{V})$ — фиксированное подмножество в $F_{n,m}(\mathcal{V})$ такое, что для всякого слова $u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно, слово

$u^* \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ со свойством $u = u^*$ в $\mathcal{V}$. Положим, наконец,

$$W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}.$$

Для всякого слова $u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ и всякой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_m$ обозначим через $u\sigma$ образ u относительно автоморфизма полугруппы F, индуцированного σ (т. е. автоморфизма, продолжающего отображение $x_i \longmapsto x_{i\sigma}$; мы полагаем здесь, что $i\sigma = i$ при $i > m$). Ясно, что $u\sigma \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому мы можем рассмотреть слово $(u\sigma)^*$. Символом $\equiv$ мы обозначаем отношение равенства в F. Для всякой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_m$ положим

$$\sigma^*(u) \equiv (u\sigma)^* \text{ для всякого } u \in W_{n,m}(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma^*(0) \equiv 0.$$

Легко проверяется, что если многообразие $\mathcal{V}$ однородно, то множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ с набором унарных операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством (см. лемму 1.1 в [25]). Отметим, что если $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то $W_{n,m}(\mathcal{V})$ есть $\mathbf{S}_m$-подмножество в $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Для краткости будем называть $\mathbf{S}_m$-множества вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ (соответственно $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$) *трансверсалями* (*0-трансверсалями*) многообразия $\mathcal{V}$. Следующее утверждение является, как мы увидим, простым следствием основного результата работы [25].

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — однородное многообразие полугрупп, а m и n — натуральные числа такие, что $m \leqslant n$. Если $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то решетка $L(\mathcal{V})$ содержит интервал, антиизоморфный решетке* $\mathrm{Con}(W_{n,m}(\mathcal{V}))$.

Proof. Для краткости положим $W = W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $W^0 = W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. По условию $W \neq \varnothing$. Легко понять, что в этом случае решетка $\mathrm{Con}(W)$ изоморфна некоторому интервалу решетки $\mathrm{Con}(W^0)$ (а именно интервалу $[\varepsilon, \rho_W]$, где ε — отношение равенства, а ρ_W — конгруэнция, классами которой являются W и $\{0\}$). Остается учесть, что, в силу теоремы 1.3 работы [25], решетка подмногообразий произвольного однородного многообразия $\mathcal{V}$ содержит интервал, антиизоморфный решетке $\mathrm{Con}(W^0)$. $\square$

Нам будут нужны некоторые свойства решеток конгруэнций G-множеств. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.11 ((см., например, лемму 4.20 в [36])). *Если A — транзитивное G-множество, то решетка* $\mathrm{Con}(A)$ *изоморфна интервалу* $[\mathrm{Stab}_A(a), G]$ *решетки* $\mathrm{Sub}(G)$*, где a — произвольный элемент из A.*

Лемма 2.12 ((см. [19], предложения 1.3 и 2.1)). *Если G-множество A содержит две изоморфные неодноэлементные орбиты, то решетка* $\mathrm{Con}(A)$ *не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз.*

Лемма 2.13 ((см. [19], следствие 2.4)). *Если G-множество A содержит более трех орбит, то решетка* $\mathrm{Con}(A)$ *не является слабо полумодулярной вниз.*

Докажем теперь, что многообразия, заданные системами тождеств $(j1)$–$(j15)$ (соответственно $(j1)$–$(j6)$ и $(j8)$–$(j15)$) не являются слабо полумодулярными вверх (вниз).

Если $u, v \in F$, мы будем писать $u \lhd v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторого эндоморфизма ξ полугруппы F и некоторых $a, b \in F^1$. В следующей лемме собраны два технических замечания о тождествах нильпотентных многообразий полугрупп. Первое из этих замечаний очевидно. Второе замечание, безусловно, хорошо известно; в явном виде оно, по-видимому впервые, доказано в [37, лемма 1.3].

Лемма 2.14. *Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентное многообразие полугрупп.*

а) *Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

б) *Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

Несложные вычисления, основанные на этой лемме, показывают, что каждая из систем тождеств $(j1)$–$(j15)$ задает однородное многообразие. Пусть Σ — одна из систем тождеств $(j1)$–$(j15)$ и $\mathcal{V} = \operatorname{var}\Sigma$. В силу предложения 2.2 достаточно указать такие числа n и m, что $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$ и решетка конгруэнций трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{V})$ не является слабо полумодулярной вниз, а если Σ — одна из систем тождеств $(j1)$–$(j6)$ и $(j8)$–$(j15)$, то и слабо полумодулярной вверх.

Рассмотрим прежде всего систему $(j9)$. Будем считать, что $\pi = (12)$ (для всех остальных транспозиций из $\mathbf{S}_4$ рассуждения вполне аналогичны). Положим $\mathcal{V} = \operatorname{var}(j9)$ и $W = W_{4,4}(\mathcal{V})$. Из того, что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $xyzt = 0$, вытекает, что $W \neq \varnothing$. Ясно, что трансверсаль W транзитивна. Можно считать, что $x_1x_2x_3x_4 \in W$. В силу леммы 2.11 решетка $\operatorname{Con}(W)$ изоморфна интервалу $[\operatorname{Stab}_W(x_1x_2x_3x_4), \mathbf{S}_4]$ решетки $\operatorname{Sub}(\mathbf{S}_4)$. Очевидно, что единственное перестановочное тождество длины 4, выполненное в многообразии $\operatorname{var}(j9)$, — это тождество $xyzt = yxzt$. Следовательно, $\operatorname{Stab}_W(x_1x_2x_3x_4) = \operatorname{gr}\{(12)\}$. Интервал $[\operatorname{gr}\{(12)\}, \mathbf{S}_4]$ изображен на рис. 5. На этом рисунке через $\mathbf{V}_4$ обозначена четверная группа Клейна, а через $\operatorname{Stab}_4(i)$ — стабилизатор точки i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ в группе $\mathbf{S}_4$, т. е. подгруппа $\{\sigma \in \mathbf{S}_4 \mid i\sigma = i\}$. Кроме того, через $\vee$ обозначается объединение в решетке подгрупп. Из рис. 5 видно, что решетка $\operatorname{Con}(W) \cong [\operatorname{gr}\{(12)\}, \mathbf{S}_4]$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что и многообразие $\mathcal{V}$ не является ни слабо полумодулярным вверх, ни слабо полумодулярным вниз.

Остается рассмотреть системы тождеств $(j1)$–$(j8)$ и $(j10)$–$(j15)$. При этом мы можем не рассматривать системы $(j2)$, $(j6)$ и $(j8)$ при $\pi = (23)$, поскольку они двойственны к системам $(j1)$, $(j5)$ и $(j8)$ при $\pi = (12)$ соответственно. В табл. 4 для каждой из оставшихся систем Σ указана трансверсаль $W_{n,m}(\operatorname{var}\Sigma)$ для некоторой пары чисел (n, m). Орбиты этих трансверсалей разделены точками с запятой. Мы опускаем соответствующие выкладки ввиду их рутинности.

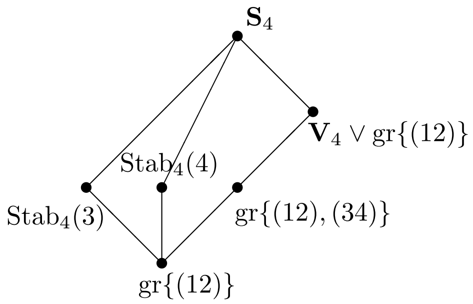

Figure 5: Интервал $[\mathrm{gr}\{(12)\}, \mathbf{S}_4]$

Таблица 4

Σ	n	m	$W_{n,m}(\mathrm{var}\,\Sigma)$
$(j1)$	3	2	$xy^2, yx^2; xyx, yxy$
$(j3),(j5),(j8)$ при $\pi = (12)$	3	2	$x^2y, y^2x; xy^2, yx^2$
$(j4),(j8)$ при $\pi = (13)$	3	2	$x^2y, y^2x; xyx, yxy$
$(j7)$	3	2	$x^2y; xy^2; xyx$
$(j10)$	4	3	$xyxz, yxyz, zxzy; yxzx, xyzy, xzyz$
$(j11),(j13)$	4	3	$xyxz, xzxy, yxyz; xyzx, yxzy, zxyz$
$(j12)$	4	3	$xyxz, xzxy, yzyx; xyzx, yxzy, zxyz$
$(j14)$	4	3	$x^2yz, y^2xz, z^2xy; xyxz, xzxy, yzyx$
$(j15)$	5	3	$x^3yz, y^3xz, z^3xy; x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x$

Из табл. 4 видно, что все указанные в ней трансверсали, за исключением $W_{3,2}(\mathrm{var}(j7))$, содержат две неодноэлементные изоморфные орбиты. Из леммы 2.12 и предложения 2.2 вытекает теперь, что многообразия, заданные системами тождеств $(j1)$–$(j6)$, $(j8)$ и $(j10)$–$(j15)$, не являются ни слабо полумодулярными вверх, ни слабо полумодулярными вниз.

Импликация а) $\longrightarrow$ д) теоремы 1.3 доказана.

Наконец, из табл. 4 видно, что трансверсаль $W_{3,2}(\mathrm{var}(j7))$ содержит три орбиты и потому 0-трансверсаль $W^0_{3,2}(\mathrm{var}(j7))$ содержит четыре орбиты (три орбиты трансверсали $W_{3,2}(\mathrm{var}(j7))$ и $\{0\}$). В силу леммы 2.13 и предложения 2.2, многообразие $\mathrm{var}(j7)$ не является слабо полумодулярным вверх. Таким образом, доказано, что слабо полумодулярное вверх многообразие удовлетворяет всем условиям индикаторного варианта теоремы 1.1. В частности, доказана необходимость в индикаторном варианте этой теоремы.

References

[1] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. РАН. 1992. Т. 326, №3. С. 409–413.

[2] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. №6. С. 48–58.

[3] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Там же. 1992. №7. С. 3–8.

[4] Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Там же. 1992. №8. С. 21–29.

[5] Volkov M. V., Ershova T. A. The lattice of varieties of semigroups with completely regular square // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G B Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.

[6] Волков М. В. Тождества в решетках многообразий полугрупп: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1994.

[7] Stern M. Semimodular lattices. Theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

[8] Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[9] Crawley P., Dilworth R. P. Algebraic lattice theory. N.Y.: Prentice-Hall, 1973.

[10] Vernikov B. M. Dualities in lattices of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1990. Vol. 40, №1. P. 59–76.

[11] Jipsen P., Rose H. Varieties of lattices. B.: Springer, 1992.

[12] Pastijn F. J. The lattice of completely regular semigroup varieties // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1990. Vol. 49, №1. P. 24–42.

[13] Pastijn F. J. Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323, №1. P. 79–92.

[14] Petrich M., Reilly N. R. The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32, №2. P. 137–152.

[15] Vernikov B. M. Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties // Semigroups with Applications, including Semigroup Rings. St Petersburg: St Petersburg State Techn. Univ., 1999. P. 411–439.

[16] Vernikov B. M., Volkov M. V. Semimodular semigroup varieties revisited // Int. Conf. «Semigroups and their Applications, including Semigroup Rings»: Abstracts. St Petersburg, 1995. P. 78–79.

[17] Vernikov B. M. A classification of lattice quasiidentities implying the modular law in lattices of nilsemigroup varieties // II Международ. конф. «Полугруппы: теория и приложения»: Тез. докл. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. С. 58–59.

[18] Верников Б. М., Волков М. В. Строение решеток многообразий нильполугрупп // Изв. УрГУ. 2000. №18. (Математика и механика. Вып. 3). С. 34–52.

[19] Vernikov B. M. On congruences of G-sets // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol. 38, №3. P. 603–613.

[20] Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, №1. P. 1–43.

[21] Шеврин Л. Н., Суханов Е. В. Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1989. №6. С. 3–39.

[22] Иванов С. В. О нескольких вопросах теории многообразий групп // Международ. конф. по алгебре, посвящ. памяти акад. А. И. Мальцева: Тез. докл. по теории групп. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1989. С. 49.

[23] Верников Б. М. Многообразия полугрупп с полумодулярной решеткой подмногообразий // Международ. конф. по алгебре, посвящ. памяти акад. А. И. Мальцева: Тез. докл. по теории моделей и алгебраич. систем. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1989. С. 27.

[24] Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп. Свердловск: УрГУ, 1989. Вып. 3.

[25] Верников Б. М., Волков М. В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II // Изв. УрГУ. 1998. №10. (Математика и механика. Вып. 1). С.13–33.

[26] Rasin V. V. On the lattice of varieties of completely simple semigroups // Semigroup Forum. 1979. Vol. 17, №2. P. 113–122.

[27] Мельник И. И. О многообразиях и решетках многообразий полугрупп // Исслед. по алгебре. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970. Вып. 2. С. 47–57.

[28] Мельник И. И. Нильпотентные сдвиги многообразий // Матем. заметки. 1973. Т. 14, №5. С. 703–712.

[29] Голубов Э. А., Сапир М. В. Финитно-аппроксимируемые многообразия полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1982. №11. С. 21–29.

[30] Gerhard J. A. Semigroups with an idempotent power. II. The lattice of equational subclasses of $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. 1977. Vol. 14, №4. P. 375–388.

[31] Верников Б. М. О многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение // Алгебраические системы и их многообразия. Свердловск: УрГУ, 1988. С. 41–52.

[32] Сапир М. В., Суханов Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1981. №4. С. 48–55.

[33] Head T. J. The lattice of varieties of commutative monoids // Nieuw Arch. Wiskunde. 1968. Vol. 16, №3. P. 203–206.

[34] Малышев С. А. О перестановочных многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых конечна // Современная алгебра. Полугрупповые конструкции. Л.: Ленинград. гос. пед. ин-т, 1981. С. 81–86.

[35] Nelson E. The lattice of equational classes of semigroups with zero // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, №4. P. 531–534.

[36] McKenzie R. N., McNulty G. F., Taylor W. F. Algebras. Lattices. Varieties. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole, 1987. Vol. 1.

[37] Vernikov B. M., Volkov M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

Статья поступила 21.03.2001 г.