МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи
УДК 512.532.2+512.572

СКОКОВ Дмитрий Вячеславович

ТОЖДЕСТВА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Б. М. Верников

Екатеринбург
2016

Содержание

Введение

1. Обсуждение проблематики

Теория многообразий алгебраических систем является одним из основных направлений современной общей алгебры, которое активно развивается на протяжении уже более чем 50 лет. Этой тематике посвящен ряд монографий, в которых рассматриваются как многообразия универсальных алгебр (см., например, [28,54]), так и многообразия тех или иных конкретных типов алгебр — групп [24], алгебр Ли [2], решеток [49] и др. Значительное внимание при этом уделяется изучению многообразий полугрупп. В этой области получено множество глубоких и ярких результатов, обсуждению которых полностью или частично посвящен целый ряд обзорных статей — см., например, [1, 3, 34, 35, 37, 40, 51, 64, 73, 80]. В обзоре [35] указаны четыре основных направления теории многообразий полугрупп: тождества, строение полугрупп в многообразиях, относительно свободные полугруппы и решетки многообразий. Дальнейшее развитие теории многообразий показало, что этот список надо дополнить пятым направлением: алгоритмические аспекты теории многообразий (впрочем, эта область, также упомянута в [35], как «уже заслуживающая самостоятельного обзора»). Настоящая диссертация относится к четвертому из перечисленных направлений — изучению решеток многообразий. Остановимся на этом направлении более подробно.

Изучение решеток многообразий полугрупп начинается с первой половины 1960-х годов, хотя отдельные результаты появлялись и до этого. Стоит отметить, что один из первых, если не самый первый, заслуживающий цитирования результат о многообразиях полугрупп относится именно к решеточной тематике. Мы имеем в виду описание атомов решетки всех многообразий полугрупп, полученное Калицки и Скоттом еще в 1955 г. [50]. К настоящему времени этой тематике посвящено более 250 работ. Результаты, полученные на начальном этапе развития этой теории, приведены в обзорах [1, 40]. Более близкий к современному состоянию исследований обзор содержится в работе [34].

В теории полугрупп немалое внимание уделяется изучению так называемых *унарных полугрупп*, т. е. полугрупп с дополнительной унарной операцией. Отметим, что полугруппами такого типа являются группы, которые естественно рассматривать в унарной сигнатуре. Многообразиям групп посвящена первая в мировой литературе монография по теории многообразий алгебраических систем [24]. Важными примерами унарных полугрупп являются инверсные полугруппы с операцией взятия инверсного элемента и *вполне регулярные* полугруппы (объединения групп) с операцией взятия обратного элемента в максимальной подгруппе, содержащей данный элемент. Классы всех инверсных и всех вполне регулярных полугрупп в соответствующей сигнатуре являются многообразиями, включающими в себя в качестве подмногообразия многообразие всех групп. Изучению инверсных и вполне регулярных полугрупп посвящено множество работ, включая монографии [60] и [62]. Заметное внимание в этих монографиях уделено многообразиям и, в том числе, решеткам многообразий.

Еще одним важным с рассматриваемой точки зрения классом полугрупп являются эпигруппы. *Эпигруппой* называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым* элементом, т. е. лежит в некоторой подгруппе в S. Впервые эпигруппы появились в литературе в работе [55] под названием *псевдоинвертируемые полугруппы* (в оригинале — *pseudo-invertible semigroups*). В дальнейшем в работах на русском языке, посвященных этой тематике, они назывались *квазипериодическими* полугруппами, в англоязычной литературе использовались термины *quasi-completely regular semigroups*, *group-bound semigroups* и др. В конце 1980-х — начале 1990-х годов Л.Н.Шеврин предложил и начал систематически использовать термин «эпигруппа» (см. [32, 36, 37]), который к настоящему времени является общепринятым.

Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя все вполне регулярные, все периодические (в частности, все конечные) и все вполне 0-простые полугруппы. В самом деле, в любой вполне регулярной полугруппе каждый элемент является групповым, в любой периодической полугруппе некоторая степень каждого элемента лежит в конечной циклической подгруппе, а для вполне 0-простых полугрупп указанный факт хорошо известен — см., например, [23, теорема 2.55].

Эпигруппы естественно рассматривать как унарные полугруппы. Дополнительная унарная операция в них вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы, для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно (см., например, [33,67]), что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$. Обозначим через $\overline{x}$ элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Этот элемент называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр в указанной сигнатуре. Очевидно, что во вполне регулярной полугруппе операция псевдообращения совпадает с указанной выше унарной операцией, обычно рассматриваемой на вполне регулярных полугруппах. Таким образом, всякое многообразие вполне регулярных полугрупп (в унарной сигнатуре) является многообразием эпигрупп.

Всякое периодическое многообразие полугрупп также можно рассматривать как многообразие эпигрупп. В самом деле, в периодическом многообразии полугрупп выполняется тождество $x^n = x^{n+d}$ для некоторых n и d.

Легко видеть, что в этом случае операция псевдообращения выражается через умножение, а именно, $\overline{x} = x^{(n+1)d-1}$. Обратно, легко понять, что всякий класс эпигрупп, являющийся полугрупповым многообразием, не содержит многообразия всех коммутативных полугрупп, и потому является периодическим многообразием.

Класс всех многообразий эпигрупп образует решетку относительно включения. Мы будем обозначать ее через **EPI**. Отметим, что, как хорошо известно, класс всех эпигрупп не является многообразием, так как он не замкнут относительно бесконечных прямых произведений (см., например, [33, 67]). Это означает, что **EPI** — решетка без единицы. В силу сказанного выше, эта решетка содержит в себе в качестве подрешеток решетку всех многообразий вполне регулярных полугрупп и решетку всех периодических многообразий полугрупп.

Идея рассмотрения эпигрупп в русле теории многообразий впервые была высказана Л.Н.Шевриным в статье [33]. В этой работе, а также в обзоре [67], указаны возможные направления изучения многообразий эпигрупп, одним из которых является рассмотрение решетки **EPI**. До недавних пор эта решетка была изучена довольно слабо. Помимо работы [33], в которой были указаны некоторые самые первоначальные факты, здесь можно отметить лишь статьи [58, 59, 78]. В первых двух из них изучались некоторые конгруэнции на решетке **EPI**, а в третьей рассматривался вопрос о выполнении условия покрытия в решетке **EPI** и некоторых ее подрешетках. Более подробно содержание упомянутых работ изложено в пп. 2.2 и 3.1 обзора [34]. Совсем недавно появился препринт [43], в котором построена счетная серия инъективных эндоморфизмов решетки **EPI** (ранее нетривиальных примеров такого рода известно не было). Все перечисленные результаты, однако, носят разрозненный и фрагментарный характер. Систематически решетка **EPI** до настоящего времени не исследовалась, и данная диссертация является первой попыткой такого исследования.

2. Обсуждение результатов, предшествовавших диссертации, и направлений дальнейших исследований

Поскольку, как упоминалось выше, решетка многообразий эпигрупп изучена довольно слабо, при постановке задач в этой области естественно опираться на опыт изучения решеток многообразий полугрупп. Обозначим через **SEM** решетку всех многообразий полугрупп. В [34] выделены три основных направления изучения решетки **SEM**: исследование общих свойств этой решетки и ее важных подрешеток; характеризация многообразий с заданными свойствами решетки подмногообразий; рассмотрение особых в том или ином смысле элементов решетки. В данной диссертации, применительно к многообразиям эпигрупп, в основном рассматриваются второе и третье из этих направлений, а в качестве приложения одного из основных результатов получена информация, относящаяся к первому направлению.

При изучении многообразий с заданными свойствами решетки подмногообразий можно рассматривать различные решеточные условия. Их классификация содержится в гл. III обзора [34]: условия конечности, тождества и родственные условия, а также ряд более мелких и менее значимых групп условий. Мы рассматриваем условия, связанные с тождествами. Для многообразий полугрупп они изучались многими авторами. В частности, им посвящены докторские диссертации М.В.Волкова [19] и Б.М.Верникова [6]. Подробному обсуждению полученных при этом результатов посвящен § 11 обзора [34].

Обсудим более детально постановки задач и наиболее значительные достижения в рассматриваемой области. Еще на самом раннем этапе исследования решетки **SEM**, в 1969 году, в работах Ежека [45] и Швабауэра [63] были приведены первые явные примеры многообразий полугрупп с немодулярной решеткой подмногообразий. Это сделало актуальной задачу описания многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий, которая и была в явном виде сформулирована в 1971 г. в обзоре Эванса [40]. Примерно в то же время Л.Н.Шеврин поставил не менее естественную задачу описания многообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, которая в 1979 г. была вписана им в «Свердловскую тетрадь» [26, задача 2.60a].

Проблема Эванса привлекла внимание целого ряда авторов, а ее решение заняло около 20 лет. Важной вехой на этом пути стала опубликованная в 1981 г. работа М.В.Сапира и Е.В.Суханова [25], в которой было найдено первое нетривиальное необходимое условие, которому должны удовлетворять многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий: было показано, что всякое такое многообразие состоит из полурешеток архимедовых полугрупп (позднее в [33] было замечено, что аналогичный факт справедлив и для многообразий эпигрупп). Одним из наиболее ярких достижений, полученных в процессе решения проблемы Эванса, стал результат о модулярности и, более того, дезарговости решетки всех многообразий вполне регулярных полугрупп, полученный тремя различными способами Пастейном [56, 57] и Петричем и Райли [61]. Отметим, что этот результат, внося существенный вклад в решение проблемы Эванса, выходит за ее рамки, так как речь в нем идет о многообразиях вполне регулярных полугрупп в унарной сигнатуре. Это позволяет рассматривать его как утверждение о дезарговости некоторого значимого фрагмента решетки **EPI**. В полном объеме проблема Эванса была решена М.В.Волковым в 1992 г. [18]. Доказательство этого результата по модулю ниль-случая опубликовано в [15–17, 82]. Первоначальное (весьма громоздкое) доказательство в ниль-случае было обнародовано только в диссертации [19]. Впоследствии оно было усовершенствовано Б.М.Верниковым и М.В.Волковым на основе техники, развитой ими в [11, 12, 69], и опубликовано (наряду с некоторыми другими результатами, о которых будет сказано ниже) в цикле статей [5, 13, 20].

Параллельно с решением проблемы Эванса, М.В.Волков значительно продвинулся и в решении проблемы Шеврина об описании многообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Полное решение этой проблемы должно было бы включать в себя классификацию многообразий периодических групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Однако эта задача представляется чрезвычайно трудной. Известно, например, что существует континуум периодических многообразий групп с трехэлементной решеткой подмногообразий [52]. Поэтому естественно пытаться решить проблему Шеврина по модулю групп. М.В.Волкову удалось это сделать в очень широком частном случае, а именно, для многообразий, не являющихся *многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом*, т. е. многообразиями, в которых квадрат всякой полугруппы является вполне регулярной полугруппой [15–17, 77].

Помимо условий модулярности и дистрибутивности, естественным кажется и изучение ряда родственных им ограничений на решетку подмногообразий, таких, как дезарговость, полумодулярность вверх или вниз, слабая полумодулярность вверх или вниз. Напомним, что решетка $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется [*слабо*] *полумодулярной вверх*, если для любых $x, y \in L$ из того, что x покрывает $x \wedge y$ [x и y покрывают $x \wedge y$] вытекает, что $x \vee y$ покрывает y. Двойственно определяются [*слабо*] *полумодулярные вниз* решетки. Полумодулярные решетки играют важную роль в структурной теории решеток и ее приложениях. Им уделяется значительное внимание в монографиях [39] и [41], а монография [68] целиком посвящена этому классу решеток. Что касается тождества дезарговости, то по своей значимости в структурной теории решеток оно стоит в одном ряду с дистрибутивностью и модулярностью (см., например, [41, 49]). Отметим еще, что всякая дезаргова решетка модулярна, всякая модулярная решетка полумодулярна (как вверх, так и вниз), а всякая полумодулярная вверх [вниз] решетка слабо полумодулярна вверх [вниз].

В уже упоминавшемся цикле статей [5,13,20] Б.М.Верников и М.В.Волков полностью описали многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых дезаргова, полумодулярна вверх, слабо полумодулярна вверх, полумодулярна вниз или слабо полумодулярна вниз. При этом, в частности, показано, что первые три из этих пяти ограничений на решетку подмногообразий эквивалентны модулярности, а два последних эквивалентны между собой, но не эквивалентны модулярности.

Многообразия полугрупп со всеми перечисленными выше ограничениями на решетки подмногообразий оказались периодическими. В силу сказанного выше, эти результаты можно трактовать как результаты о многообразиях периодических эпигрупп. Естественно попытаться рассмотреть аналогичные задачи для непериодических многообразий эпигрупп. Отметим, что центральная в этой области задача описания многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий обсуждалась Л.Н.Шевриным в [33] и в явном виде была сформулирована им в [34] и [67].

Первым из двух направлений исследований в диссертации является изучение многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых дистрибутивна, модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз, слабо полумодулярна вверх или вниз.

Как мы увидим ниже, в этом направлении получены аналоги всех перечисленных выше результатов о многообразиях полугрупп. Эти результаты позволяют указать, образно говоря, зоны «глобальной» модулярности и дистрибутивности в решетке **EPI**. Следующим естественным шагом в изучении феноменов модулярности и дистрибутивности в этой решетке можно считать рассмотрение многообразий, обеспечивающих, так сказать, «локальную» модулярность или дистрибутивность в своем окружении. Говоря это, мы имеем в виду изучение специальных элементов различных типов решетки **EPI**, определение которых так или иначе опирается на тождества модулярности и дистрибутивности.

Напомним определения восьми типов специальных элементов, наиболее часто возникающих в теории решеток. Все эти понятия вводятся по одной и той же схеме, которая состоит в следующем. Рассмотрим три эквивалентных формы тождества дистрибутивности и квазитождество модулярности:

$$
\begin{aligned}
&(\forall x, y, z) \quad \bigl(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\bigr),\\
&(\forall x, y, z) \quad \bigl(x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\bigr),\\
&(\forall x, y, z) \quad \bigl((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)\bigr),\\
&(\forall x, y, z) \quad \bigl(y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y\bigr).
\end{aligned}
$$

В каждой из этих четырех формул языка первого порядка в решеточной сигнатуре выведем из-под квантора всеобщности и объявим свободной одну переменную. Подставляя в полученную формулу вместо свободной переменной элементы решетки, мы будем получать предложения, которые могут быть как истинными, так и ложными. Все те элементы, для которых эти предложения истинны, и будут специальными элементами того или иного типа. На этом пути можно определить следующие восемь типов элементов. Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется

дистрибутивным, если	$(\forall y, z \in L)$	$\bigl(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\bigr)$,
стандартным, если	$(\forall y, z \in L)$	$\bigl(y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z)\bigr)$,
нейтральным, если	$(\forall y, z \in L)$	$\bigl((x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)\bigr)$,
модулярным, если	$(\forall y, z \in L)$	$\bigl(y \le z \to (x \vee y) \wedge z = y \vee (x \wedge z)\bigr)$,
нижнемодулярным, если	$(\forall y, z \in L)$	$\bigl(x \le y \to (x \vee z) \wedge y = x \vee (z \wedge y)\bigr)$.

Кодистрибутивные, костандартные и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно. Нейтральный элемент можно также определить как элемент, который вместе с любыми двумя элементами решетки порождает ее дистрибутивную подрешетку (см. [41, теорема 254]). Отметим, что в [68] модулярные и верхнемодулярные элементы называются, соответственно, левомодулярными и правомодулярными. Мы будем пользоваться терминологией, сложившейся в работах по решеткам многообразий полугрупп.

Знание того, как устроены специальные элементы решетки, дает существенную информацию о строении этой решетки в целом. Так, если элемент x решетки L нейтрален, то L разложима в подпрямое произведение своих интервалов $(x] = \{y \in L \mid y \le x\}$ и $[x) = \{y \in L \mid x \le y\}$ (см., например, [41, теорема 254]). Дистрибутивные и кодистрибутивные элементы связаны с гомоморфизмами решетки на свои интервалы: очевидно, что если x дистрибутивен в L, то отображение $\varphi\colon L \to [x)$, заданное правилом $\varphi(a) = a \vee x$, является гомоморфизмом; для кодистрибутивных элементов верно двойственное утверждение. Обширную информацию о специальных элементах различных типов, показывающих естественность и важность их изучения, можно найти, например, в [41, раздел III.2] или в [68, разделы 2.1 и 2.2].

На рис. 1 изображено частично упорядоченное множество, образуемое классами определенных выше типов элементов по отношению включения. Почти все связи между этими классами, указанные на рис. 1, очевидны. Единственное исключение составляет тот факт, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен. Но этот факт хорошо известен (см., например, [41, теорема 255]).

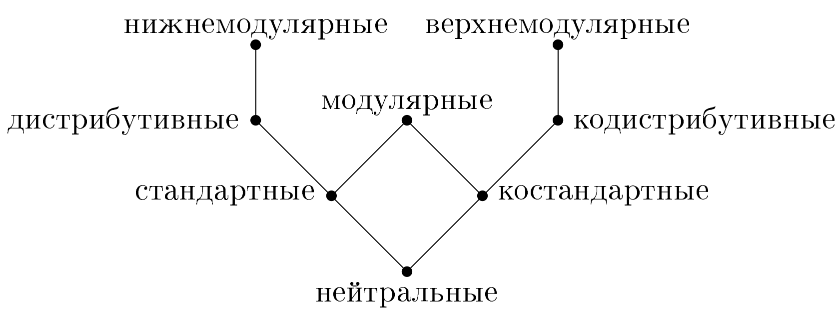

Рис. 1: специальные элементы в абстрактных решетках

Первой работой, посвященной специальным элементам в решетках многообразий универсальных алгебр, является, по-видимому, опубликованная в 1981 г. статья Ежека [47], в которой для произвольной сигнатуры Ω охарактеризованы модулярные элементы решетки всех многообразий (точнее, всех эквациональных теорий) Ω-алгебр. Хотя напрямую этот результат к многообразиям полугрупп неприменим, некоторые идеи из его доказательства были в дальнейшем использованы в работе [70] при изучении модулярных элементов решетки **SEM**. Первые результаты, относящиеся к специальным элементам в **SEM** были получены в конце 1980-х — начале 1990-х годов в работах [10, 48], в которых они носили вспомогательный характер[1].

Начиная с середины 2000-х годов, исследование специальных элементов в **SEM** приобретает систематический характер. За это время опубликовано более 10 работ, посвященных обсуждаемой тематике — см., например, [8, 9, 14, 30, 65, 66, 70, 71, 81], а также диссертацию В.Ю.Шапрынского [31]. Подробному обсуждению полученных при этом результатов посвящен недавний обзор [73]. В этих работах полностью описаны нейтральные, стандартные, костандартные, дистрибутивные и нижнемодулярные элементы решетки **SEM**, а для ее модулярных, верхнемодулярных и кодистрибутивных элементов получены сильные необходимые условия и описания в ряде обширных частных случаев. В частности, модулярные элементы описаны в классе коммутативных многообразий, а верхнемодулярные и кодистрибутивные элементы — в более обширном классе строго перестановочных многообразий (определение таких многообразий будет дано в п. 3 введения перед формулировкой теоремы 6). При этом оказалось, в частности, что стандартность элемента в решетке **SEM** эквивалентна его дистрибутивности, костандартность эквивалентна нейтральности, а нижняя модулярность влечет модулярность.

Естественно возникает задача переноса этих результатов на многообразия эпигрупп.

Вторым направлением исследований в диссертации является изучение специальных элементов решетки **EPI**.

Договоримся для краткости называть многообразия эпигрупп, являющиеся нейтральными элементами решетки **EPI**, *нейтральными* многообразиями, а многообразия полугрупп, являющиеся нейтральными элементами решетки **SEM**, — *нейтральными в* **SEM** многообразиями. Аналогичные соглашения будем применять и по отношению ко всем остальным типам специальных элементов. Отметим, что полное описание нейтральных многообразий и некоторая существенная информация о модулярных многообразиях эпигрупп (сильное необходимое условие и описание в коммутативном случае) были получены Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским. Эти результаты доказаны в работе [86] (см. также предложения 1.5–1.7 в п. 1.8 ниже). В диссертации рассматриваются шесть остальных типов элементов в решетке **EPI**.

Перейдем к обзору основных результатов диссертации.

[1]Отметим, что в работе [48] в действительности рассматривается не решетка **SEM**, а двойственная к ней решетка эквациональных теорий полугрупп. Здесь и ниже, говоря о работе [48], мы «переводим» ее результаты с языка эквациональных теорий на язык многообразий.

3. Обсуждение результатов диссертации

Диссертация содержит семь основных результатов. Два из них (теоремы 1 и 2) относятся к первому направлению, а пять (теоремы 3—7) — ко второму.

Для того, чтобы охарактеризовать содержание теорем 1 и 2, нам понадобятся некоторые дополнительные определения. Напомним, что многообразие полугрупп называется *многообразием ступени* n, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени $\leq n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. Отметим, что многообразия ступени 1 — это в точности вполне регулярные многообразия. Будем говорить, что многообразие полугрупп имеет *ступень* $> n$, если оно не является многообразием ступени $\leq n$. В частности, многообразие полугрупп имеет ступень > 2 тогда и только тогда, когда оно содержит по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу. Многообразия эпигрупп ступени n и ступени $> n$ определяются точно так же, как одноименные многообразия полугрупп. Различные характеризации многообразий полугрупп ступени n получены в работах [25, 71], эпигрупповые аналоги этих результатов найдены в [43].

Изучение многообразий полугрупп со всеми упоминавшимися в п. 2 введения ограничениями на решетку подмногообразий естественным образом распадаются на два случая: многообразия ступени > 2 и ступени ≤ 2. Рассмотрение этих двух случаев основывается на принципиально различных идеях и использует совершенно разную технику. Формулировки результатов в этих двух случаях также несколько отличаются. Подобное разделение оказалось естественным и при рассмотрении многообразий эпигрупп.

Многообразия эпигрупп ступени ≤ 2 с обсуждаемыми ограничениями на решетку подмногообразий изучены Б.М.Верниковым, М.В.Волковым и В.Ю.Шапрынским. Полученные ими результаты, аналогичные по своему характеру соответствующим результатам о многообразиях полугрупп, анонсированы в [21, 88], (соответствующая часть результатов работы [88] не включена в диссертацию). В диссертации ограничения, о которых идет речь, рассматриваются применительно к многообразиям эпигрупп ступени > 2. При этом мы рассматриваем только непериодические многообразия, поскольку периодический случай, т. е. случай многообразий полугрупп, был рассмотрен ранее Б.М.Верниковым и М.В.Волковым (см. п. 2 введения). При этих ограничениях получено полное описание многообразий с модулярной, дистрибутивной, дезарговой, полумодулярной вверх или вниз и слабо полумодулярной вверх или вниз решеткой подмногообразий.

Чтобы сформулировать соответствующие результаты, нам потребуются некоторые обозначения. Как обычно, через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, а через $\operatorname{var}\Sigma$ — многообразие эпигрупп, заданное системой тождеств Σ. Мы будем придерживаться также обычного соглашения, в соответствии с которым через $w = 0$ обозначается система тождеств вида $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в слово w. Эта запись оправданна, поскольку указанная пара тождеств выполнена в полугруппе S тогда и только тогда, когда S содержит нуль 0 и все значения слова w в S равны 0. Мы будем ссылаться на выражения вида $w = 0$ как на обычные тождества. Тождества такого вида, а также многообразия, ими задаваемые, называются 0-*приведенными.* Через $\mathcal{AG}$ обозначается многообразие всех абелевых групп, через $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток, а через $\mathcal{T}$ — тривиальное многообразие. Положим

$$\mathcal{C}_m = \mathrm{var}\{x^m = x^{m+1},\, xy = yx\},$$

где m — произвольное натуральное число. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. Для удобства изложения будем также считать, что $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Обозначим через $M_{4,3}$ решетку, изображенную на рис. 2, а через $\mathbf{M}_{4,3}$ — многообразие, порожденное этой решеткой. Отметим, что решетка $M_{4,3}$ дезаргова.

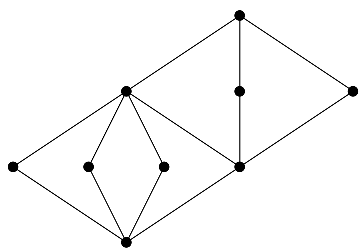

Рис. 2: решетка $M_{4,3}$

Первым из двух основных результатов в рамках первого направления наших исследований является

Теорема 1. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх;*

б) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз;*

в) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх;*

г) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз;*

д) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна;*

е) *решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова;*

ж) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$*;*

з) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где* $0 \le m \le 2$, *а многообразие* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0, \tag{0.1}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, \tag{0.2}$$

где π *— одна из перестановок*

$$(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23); \tag{0.3}$$

и) *многообразие* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ xyx = xy\overline{\overline{x}},\ x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}, \tag{0.4}$$

где π *— одна из перестановок* (0.3).

Из теоремы 1 и результатов работ [5,13,20] вытекает, что для произвольных многообразий эпигрупп ступени > 2 условия а), в) и д)–ж) остаются эквивалентными, а условия б) и г) эквивалентны между собой, но не эквивалентны остальным условиям (см. следствие 2.1 и комментарий после него в п. 2.2).

Отметим, что для абстрактных решеток условие принадлежности многообразию $\mathbf{M}_{4,3}$ является намного более сильным, чем дезарговость. В самом деле, из доказательства основного результата работы [38] вытекает, что многообразие всех дезарговых решеток имеет континуум подмногообразий (см. также доказательство теоремы 485 в [41] или теоремы 3.12 в [49]). В то же время, решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ содержит всего семь элементов (в этом легко убедиться непосредственно, перечислив все подпрямо неразложимые решетки из многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ — см. рис. 7 в п. 2.2).

В совокупности с результатами работ [15–17, 21, 82] и не вошедшими в диссертацию результатами работы [88], теорема 1 дает решение проблемы Л.Н.Шеврина об описании многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.

В качестве следствия из теоремы 1 и некоторых более ранних результатов в диссертации установлено, что если решетка подмногообразий произвольного многообразия эпигрупп ступени > 2 слабо полумодулярна вверх или вниз, то эта решетка принадлежит многообразию, порожденному некоторой конечной решеткой, и, в частности, удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству (см. следствие 2.2 в п. 2.2).

Многообразия эпигрупп ступени ≤ 2 с дистрибутивной решеткой подмногообразий изучены Б.М.Верниковым, М.В.Волковым и В.Ю.Шапрынским в [21,88] (соответствующая часть результатов работы [88] не включена в диссертацию). В диссертации получено полное описание непериодических многообразий эпигрупп ступени > 2 с дистрибутивной решеткой подмногообразий. А именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна;*

б) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где $0 \le m \le 2$, а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (0.1) *и*

$$x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}, \tag{0.5}$$

где π — одна из перестановок

$$(12), (13), (23), (123); \tag{0.6}$$

в) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y, \; xyx = xy\,\overline{\overline{x}}\,, x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},$$

где π — одна из перестановок (0.6).

В рамках второго направления исследований решетки **EPI** в диссертации рассмотрены шесть типов многообразий: стандартные, костандартные, дистрибутивные, кодистрибутивные, верхнемодулярные и нижнемодулярные. При этом стандартные, костандартные, дистрибутивные и нижнемодулярные многообразия описаны полностью, а кодистрибутивные и верхнемодулярные — в строго перестановочном случае (как уже отмечалось выше, определение строго перестановочных многообразий будет дано перед формулировкой теоремы 6).

Перейдем к формулировкам соответствующих результатов. Через $\mathcal{ZM}$ будем обозначать многообразие полугрупп с нулевым умножением.

Теорема 3. *Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ *— верхнемодулярный и нижнемодулярный элемент решетки* **EPI***;*

б) $\mathcal{V}$ *— костандартный элемент решетки* **EPI***;*

в) $\mathcal{V}$ *— нейтральный элемент решетки* **EPI***;*

г) $\mathcal{V}$ *— одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

Эквивалентность условий в) и г) этой теоремы доказана Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским в [86, теорема 1.1]. В диссертации доказывается эквивалентность условий а), б) и г).

Положим

$$\mathcal{Q} = \mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\},$$
$$\mathcal{Q}_n = \mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = x_1x_2\cdots x_n = 0\},$$
$$\mathcal{R} = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = 0\},$$

$$\mathcal{R}_n = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = x_1x_2\cdots x_n = 0\},$$

где n — произвольное натуральное число.

Теорема 4. *Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ *— дистрибутивный элемент решетки* **EPI***;*

б) $\mathcal{V}$ *— стандартный элемент решетки* **EPI***;*

в) $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{M}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{SL}$*, а* $\mathcal{N}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{Q}$*,* $\mathcal{Q}_n$*,* $\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}_n$*.*

Теорема 5. *Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{M}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{SL}$*, а* $\mathcal{N}$ *— 0-приведенное многообразие.*

В качестве следствия из последнего результата мы покажем, что всякое нижнемодулярное многообразие модулярно (см. следствие 3.7 в п. 3.3).

Прежде, чем сформулировать еще два результата диссертации, сделаем некоторые дополнительные замечания. Задачи полного описания кодистрибутивных и верхнемодулярных многообразий остаются до сих пор открытыми (как и аналогичные задачи для решетки **SEM**), что объясняется некоторыми объективными трудностями. Хорошо известно, что решетка многообразий групп модулярна, но не дистрибутивна. Следовательно, она содержит подрешетку, изоморфную 5-элементной модулярной недистрибутивной решетке M_3. Обозначим через $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_3$ попарно несравнимые элементы этой подрешетки. Ясно, что многообразия $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_3$ не кодистрибутивны. Мы видим, что задача описания кодистрибутивных многообразий тесно связана с задачей описания многообразий групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Последняя же задача, как уже отмечалось выше, чрезвычайно трудна даже в периодическом случае[2]. Поэтому при рассмотрении кодистрибутивных многообразий естественно ограничиться такими многообразиями, в которых групповые подмногообразия устроены в том или ином смысле просто. Поскольку, как хорошо известно, решетка многообразий абелевых групп дистрибутивна, представляют интерес такие ограничения на многообразие, которые гарантировали бы абелевость всех его групповых подмногообразий.

[2]Может возникнуть вопрос о том, почему аналогичные соображения не возникли при рассмотрении дистрибутивных многообразий: ведь упомянутые выше многообразия $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_3$ не являются не только кодистрибутивными, но и дистрибутивными многообразиями. Ответ на этот вопрос ясен из теоремы 4: оказалось, что всякое дистрибутивное многообразие не содержит нетривиальных групп. Для кодистрибутивных многообразий это не так: как видно из формулируемой ниже теоремы 6, многообразие всех абелевых групп кодистрибутивно.

Естественным ограничением такого рода является перестановочность. Напомним, что многообразие называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет *перестановочному тождеству*, т. е. тождеству вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi},$$

где π — нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. В диссертации рассматривается чуть более жесткое условие строгой перестановочности. Многообразие называется *строго перестановочным*, если оно удовлетворяет перестановочному тождеству, в котором $1\pi \neq 1$ и $n\pi \neq n$.

Теорема 6. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{X}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

В работе [30] показано, что всякое многообразие полугрупп, являющееся специальным элементом любого из восьми определенных выше типов в решетке **SEM** и отличное от многообразия всех полугрупп, периодично. Теорема 6 показывает, что аналог этого утверждения для многообразий эпигрупп места не имеет, поскольку в силу этой теоремы многообразие $\mathcal{AG}$ кодистрибутивно.

Класс верхнемодулярных элементов произвольной решетки содержит класс ее кодистрибутивных элементов. Поскольку кодистрибутивные многообразия описаны только в строго перестановочном случае, представляется естественным на данном этапе рассматривать верхнемодулярные многообразия также только в этом частном случае. Последним основным результатом диссертации является

Теорема 7. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

а) *$\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — коммутативное нильмногообразие эпигрупп, удовлетворяющее тождеству*

$$x^2 y = xy^2; \tag{0.7}$$

б) *$\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ — коммутативное многообразие эпигрупп, удовлетворяющее тождеству*

$$x^2 y = 0. \tag{0.8}$$

Отметим, что теоремы 1–7 по своим формулировкам вполне аналогичны соответствующим результатам о многообразиях полугрупп. Но эта аналогия не распространяется на доказательства, в которых приходится существенно учитывать эпигрупповую специфику.

Завершая обзор результатов диссертации, упомянем те из них, которые не относятся к числу основных, но представляют определенный самостоятельный интерес. Отметим, что 0-приведенные многообразия периодичны, и потому являются многообразиями полугрупп. В работах [10, 48] двумя различными способами было показано, что всякое 0-приведенное многообразие полугрупп модулярно в **SEM**. В диссертации доказано, что справедлив эпигрупповой аналог этого факта (см. предложение 3.2 в п. 3.3).

Теорему 5 удалось применить для изучения некоторых общих свойств решетки **EPI**. Чтобы охарактеризовать соответствующие результаты, нам потребуются некоторые обозначения и определения. Будем говорить, что эпигруппа имеет *индекс* n, если n-я степень любого ее элемента лежит в некоторой ее подгруппе, причем n — наименьшее число с этим свойством. Через $\mathcal{E}_n$ обозначим класс всех эпигрупп индекса $\leq n$. В частности, $\mathcal{E}_1$ — это в точности класс всех вполне регулярных полугрупп. Хорошо известно и легко проверяется, что $\mathcal{E}_n$ — многообразие эпигрупп и любое многообразие эпигрупп содержится в $\mathcal{E}_n$ для подходящего n (см., например, [33, предложение 6 и наблюдение 10]). Очевидно, что $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}_{n+1}$ для всякого натурального n. В [33] (см. также [34,67]) сформулирован ряд вопросов об интервалах вида $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ решетки **EPI**. В частности, там спрашивается, каковы решеточные свойства этих интервалов (например, порядковые типы максимальных цепей и мощности антицепей). Как показано в диссертации, из теоремы 5 и результатов работы [46] вытекает, что, при любом натуральном n, интервал $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ содержит цепь, изоморфную цепи действительных чисел, и антицепь мощности континуум (см. предложения 3.4 и 3.5 в п. 3.4).

Еще одно приложение теоремы 5 связано с понятием формульного множества многообразий. Пусть L — произвольная решетка и $A \subseteq L$. Множество A называется *формульным в* L, если существует формула языка первого порядка $\Phi(x)$ в решеточной сигнатуре с одной свободной переменной x такая, что для любого $a \in L$ предложение $\Phi(a)$ истинно тогда и только тогда, когда $a \in A$. В этой ситуации будем говорить, что формула $\Phi(x)$ *выделяет* множество A в решетке L. Заметим, что если θ — любой из восьми определенных выше типов специальных элементов, то класс всех θ-элементов решетки L является, очевидно, формульным в L. В работе [48] была доказана (в несколько иной терминологии) формульность целого ряда обширных и важных классов многообразий полугрупп, в том числе класса всех 0-приведенных многообразий. Но ни для одного из этих классов в [48] не указана в явном виде формула, выделяющая этот класс в решетке **SEM**, а доказательство формульности этих классов, данное в [48], весьма непрозрачно и трудно для восприятия. Еще в работе [81] было замечено, что класс всех 0-приведенных многообразий может быть выделен в решетке **SEM** с помощью некоторой весьма простой формулы. В дальнейшем Б.М.Верниковым была найдена еще более простая формула, выделяющая этот класс в **SEM** (см. [72, теорема 3.3] или [73, раздел 3.5]). Используя теорему 5, можно показать, что та же формула выделяет класс всех 0-приведенных многообразий и в решетке **EPI** (см. предложение 3.6 в п. 3.5).

4. Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на Международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009, 2014, 2015), Международной конференции по алгебре и геометрии (Екатеринбург, 2011), Международных конференциях по полугруппам и общей алгебре (Потсдам, 2011; Дрезден, 2014), Международной конференции по алгебре и математической логике (Казань, 2014), Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2015).

По теме диссертации опубликовано 11 работ [83–93]. Из них пять работ опубликованы в журналах из списка ВАК [83–87]. Три работы написаны совместно с Б.М.Верниковым [83,87,89], одна — совместно с Б.М.Верниковым и М.В.Волковым [88], одна — совместно с Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским [86]. Результаты статей [83] и [87] и те результаты тезисов [88], которые включены в диссертацию, получены в нераздельном соавторстве с Б.М.Верниковым (в [88] есть также результаты, принадлежащие Б.М.Верникову и М.В.Волкову, которые не включены в диссертацию). В результатах тезисов [89] и тех результатах статьи [86], которые включены в диссертацию, постановка задачи и указание на основные идеи и методы доказательства принадлежат Б.М.Верникову, а само доказательство найдено диссертантом (в [86] есть также результаты, принадлежащие Б.М.Верникову и В.Ю.Шапрынскому, которые не включены в диссертацию).

5. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех параграфов и списка литературы. В § 1 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты, в § 2 доказаны теоремы 1 и 2, а в § 3 — теоремы 3–7. Кроме того, в § 3 доказываются упомянутые выше предложения 3.2, 3.4, 3.5 и 3.6. Все параграфы делятся на пункты, содержание которых ясно из оглавления.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Системы тождеств, задающие многообразия эпигрупп

Пусть Σ — система тождеств, записанных в сигнатуре Ω, состоящей из ассоциативной бинарной операции умножения и унарной операции. Обозначим через K_Σ класс всех эпигрупп, удовлетворяющих Σ (мы предполагаем при этом, что сигнатурная унарная операция интерпретируется как псевдообращение). Класс K_Σ может не быть многообразием, поскольку он не обязан быть замкнут относительно бесконечных прямых произведений (см., например, [67, раздел 2.3]). Чтобы охарактеризовать системы тождеств Σ, для которых класс K_Σ является многообразием, нам понадобятся некоторые определения. Слово w, записанное в сигнатуре Ω, называется *полугрупповым*, если оно не содержит унарной операции. Тождество $u = v$ сигнатуры Ω называется *полугрупповым*, если слова u и v являются полугрупповыми, и *смешанным*, если одно из этих слов — полугрупповое, а другое — нет. Полугрупповое тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в обе его части одинаковое число раз.

Лемма 1.1 ([43, предложение 2.15])**.** *Класс K_Σ является многообразием эпигрупп тогда и только тогда, когда Σ содержит либо полугрупповое неуравновешенное тождество, либо смешанное тождество.* $\square$

Если класс K_Σ является многообразием, то мы будем обозначать это многообразие через $\mathrm{var}\,\Sigma$. Всюду в диссертации, где используется это обозначение, его корректность вытекает из леммы 1.1. Явных ссылок на это обстоятельство мы ниже делать не будем.

1.2. Тождества некоторых многообразий и классов эпигрупп

Следующие четыре утверждения хорошо известны и легко проверяются.

Лемма 1.2. *Тождество*

$$x = \overline{\overline{x}} \tag{1.1}$$

выполнено в эпигруппе S тогда и только тогда, когда S — вполне регулярная эпигруппа. $\square$

Лемма 1.3. *Тождество*

$$x\overline{x} = y\overline{y} \tag{1.2}$$

выполнено в эпигруппе S тогда и только тогда, когда S — группа. $\square$

Лемма 1.4. *Тождество*
$$\overline{x} = 0 \tag{1.3}$$
выполнено в эпигруппе S тогда и только тогда, когда S является нильполугруппой. □

Лемма 1.5. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^m = x^{m+1}$, то в $\mathcal{V}$ выполнены тождества $\overline{x} = \overline{\overline{x}} = x^m$.* □

Через F мы будем обозначать абсолютно свободную унарную полугруппу счетного ранга (в сигнатуре $\langle \cdot, {}^{-} \rangle$), элементы которой мы будем называть *словами*. Если $w \in F$, то через $c(w)$ обозначается множество всех букв, входящих в слово w, а через $h(w)$ [соответственно $t(w)$] — его первая [последняя] буква. Если w — полугрупповое слово, то через $\ell(w)$ обозначается его длина. Символом $\equiv$ обозначается отношение равенства на унарной полугруппе F. Буква называется *простой* [*кратной*] *в слове* w, если она входит в это слово ровно один раз [более одного раза]. Положим

$$\mathcal{LZ} = \mathrm{var}\{xy = x\}, \qquad \mathcal{RZ} = \mathrm{var}\{xy = y\},$$
$$\mathcal{P} = \mathrm{var}\{xy = x^2y,\, x^2y^2 = y^2x^2\}, \qquad \overleftarrow{\mathcal{P}} = \mathrm{var}\{xy = xy^2,\, x^2y^2 = y^2x^2\}.$$

Далее нам понадобятся критерии равенства полугрупповых слов в ряде многообразий. Первые три утверждения следующей леммы хорошо известны и легко проверяются, четвертое доказано в [22, лемма 7].

Лемма 1.6. *Нетривиальное полугрупповое тождество $v = w$ выполнено:*

(i) *в многообразии $\mathcal{LZ}$ тогда и только тогда, когда $h(v) \equiv h(w)$;*

(ii) *в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(v) = c(w)$;*

(iii) *в многообразии $\mathcal{C}_2$ тогда и только тогда, когда $c(v) = c(w)$ и всякая буква из $c(v)$ является либо простой и в v, и в w, либо кратной и в v, и в w;*

(iv) *в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $c(v) = c(w)$ и либо буквы $t(v)$ и $t(w)$ являются кратными в словах v и w соответственно, либо $t(v) \equiv t(w)$ и буква $t(v)$ — простая и в v, и в w.* □

Лемма 1.7. *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие.*

(i) *Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ и $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также и тождеству $u = 0$.*

(ii) *Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $u = vuw$, где слово vw не пусто, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также и тождеству $u = 0$.*

(iii) *Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2\cdots x_n = v$ и $\ell(v) \neq n$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также и тождеству*

$$x_1x_2\cdots x_n = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) хорошо известны и легко проверяются.

(iii) Если v не является полугрупповым словом, то доказываемое утверждение следует из леммы 1.4. Будем теперь считать, что v — полугрупповое слово. Если $\ell(v) < n$, то $c(v) \neq \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, и потому требуемое утверждение следует из п. (i). Наконец, если $\ell(v) > n$, то нужный нам факт доказан в [25, лемма 1]. □

Напомним, что полугрупповое слово называется *линейным*, если всякая буква входит в него не более одного раза. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1.8. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому полугрупповому тождеству $u = w$, где u является линейным словом, а слово w таким не является, то $\mathcal{V}$ периодично.* □

1.3. Многообразия эпигрупп с ограничениями на групповые элементы

Как обычно, мы обозначаем через $\mathrm{Gr}\, S$ множество всех групповых элементов эпигруппы S. Следующее утверждение было приведено без доказательства в [79, теорема 3.2][3]. Его доказательство имеется в [43, предложение 2.12].

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп. Во всякой эпигруппе $S \in \mathcal{V}$ множество $\mathrm{Gr}\, S$ является правым идеалом тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$.* □

Через $\mathrm{var}\, S$ обозначается многообразие эпигрупп, порожденное эпигруппой S. Из предложения 1.1 легко вытекает

Следствие 1.1. *Если S — эпигруппа с единицей такая, что многообразие $\mathrm{var}\, S$ не содержит $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$, то эпигруппа S вполне регулярна.*

Доказательство. Из предложения 1.1 следует, что множество $\mathrm{Gr}\, S$ — правый идеал в S. Единица эпигруппы S является ее групповым элементом, а значит $x = 1 \cdot x \in \mathrm{Gr}\, S$ для любого $x \in S$. Следовательно $S \subseteq \mathrm{Gr}\, S$. Поскольку обратное включение очевидно, $S = \mathrm{Gr}\, S$, т. е. S — вполне регулярная эпигруппа. □

[3] В формулировке этого результата в [79] допущена опечатка: вместо слов «правый идеал» написано «левый идеал».

1.4. Разложение некоторых многообразий эпигрупп в объединение подмногообразий

Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве основных результатов.

Предложение 1.2. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, не содержащее многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.*

Доказательство. В [15, лемма 2] показано, что если многообразие полугрупп не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то оно удовлетворяет квазитождеству

$$e^2 = e \longrightarrow ex = xe. \tag{1.5}$$

Дословно повторяя доказательство этого факта (с заменой в нем слова «подполугруппа» на «подэпигруппа»), можно установить, что он верен и для многообразий эпигрупп. Таким образом, квазитождество (1.5) выполнено в $\mathcal{V}$. Оставшаяся часть доказательства во многом (местами дословно) повторяет доказательство предложения 1 работы [15].

Пусть S — эпигруппа, порождающая многообразие $\mathcal{V}$, E — множество всех идемпотентов из S и $x \in S$. Из (1.5) вытекает, что ES — идеал в S. Далее, по определению эпигруппы существует натуральное число n такое, что $x^n \in \mathrm{Gr}\, S$. Тогда $x^n = x^\omega x^n$ и $x^\omega \in E$. Таким образом, $x^n \in ES$. Следовательно, фактор-полугруппа Риса S/ES является нильполугруппой. В частности, S/ES — периодическая полугруппа, а значит и эпигруппа. Естественный гомоморфизм ρ из S на S/ES разделяет элементы из $S \setminus ES$.

Пусть теперь $e \in E$. Учитывая (1.5), получаем, что eS — подполугруппа в S. Хорошо известно (см., например, [33, 67]), что всякая эпигруппа удовлетворяет тождеству $\overline{x} = x\,\overline{x}^{\,2}$. Следовательно, $\overline{ex} = ex\big(\,\overline{ex}\,\big)^2$. В частности, $\overline{ex} \in eS$. Мы доказали, что для всякого $e \in E$ множество eS является подэпигруппой в S. Положим $S^* = \prod_{e\in E} eS$. Ясно, что S^* — эпигруппа с единицей, а из (1.5) вытекает, что отображение ε из S в S^*, заданное правилом

$$\varepsilon(x) = (\dots, ex, \dots)_{e\in E},$$

является полугрупповым гомоморфизмом. Как хорошо известно (см., например, [33, 67]), произвольный полугрупповой гомоморфизм ξ из произвольной эпигруппы S_1 в эпигруппу S_2 является и эпигрупповым гомоморфизмом (т. е. $\xi\big(\,\overline{a}\,\big) = \overline{\xi(a)}$ для всякого $a \in S_1$). Следовательно, ε — эпигрупповой гомоморфизм из S в S^*. Дословно повторяя соответствующий фрагмент доказательства предложения 1 работы [15], получаем, что ε разделяет элементы из ES.

Таким образом, ε и ρ — гомоморфизмы из S в S^* и S/ES соответственно, пересечение ядер которых тривиально. Следовательно, эпигруппа S вкладывается в прямое произведение эпигрупп S^* и S/ES, и потому $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M} = \operatorname{var} S^*$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N} = \operatorname{var}(S/ES)$ — нильмногообразие. С другой стороны, очевидно, что $S^*, S/ES \in \mathcal{V}$, и потому $\mathcal{M} \vee \mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$. □

Следующее утверждение (точнее, его полугрупповой аналог) является частью полугруппового фольклора. Поскольку оно легко выводится из предложения 1.2, мы, для полноты изложения, приводим его доказательство.

Следствие 1.2. *Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие групп, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathcal{V}$ не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп. В частности, $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$ и $\mathcal{SL}$. Поскольку многообразие $\mathcal{SL}$ содержится в $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, два последних многообразия также не содержатся в $\mathcal{V}$. Согласно предложению 1.2, многообразие $\mathcal{V}$ представимо в виде $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Многообразие $\mathcal{SL}$ содержится в $\mathcal{C}_2$, значит $\mathcal{C}_2 \nsubseteq \mathcal{V}$. В силу сказанного выше, $\mathcal{C}_2, \mathcal{P} \nsubseteq \mathcal{M}$. Поэтому из следствия 1.1 вытекает, что эпигруппа, порождающая многообразие $\mathcal{M}$, вполне регулярна. Значит, и само многообразие $\mathcal{M}$ вполне регулярно. Но, как хорошо известно, всякое вполне регулярное многообразие, не содержащее нетривиальных полугрупп идемпотентов, является многообразием групп.

Достаточность. В силу лемм 1.3 и 1.4, в многообразии $\mathcal{G} \vee \mathcal{N}$ выполнено тождество (1.2). Согласно лемме 1.5, в любом многообразии идемпотентных эпигрупп это тождество равносильно тождеству $x = y$. □

Напомним, что полугруппа называется *комбинаторной*, если все ее подгруппы одноэлементны. Как обычно, если полугруппа S не содержит единицы, то через S^1 обозначается полугруппа S с внешнеприсоединенной единицей; в противном случае $S^1 = S$. Для всякого $m \geq 0$ положим

$$C_m = \langle a \mid a^m = a^{m+1} \rangle.$$

Для удобства ссылок сформулируем следующее хорошо известное и легко проверяемое утверждение.

Лемма 1.9. $\mathcal{C}_m = \operatorname{var} C_m^1$ *для всякого* $m \geq 0$. □

Лемма 1.10. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{M}$ порождается коммутативной эпигруппой с единицей, то $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$.*

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ не периодично, то оно содержит бесконечную циклическую группу. Если же $\mathcal{M}$ — периодическое многообразие, то среди конечных циклических групп, лежащих в $\mathcal{M}$, есть группа наибольшего порядка. Обозначим через G бесконечную циклическую группу в первом случае и конечную циклическую группу наибольшего порядка, принадлежащую $\mathcal{M}$, во втором. Далее, положим $X = \bigl\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid C_k^1 \in \mathcal{M}\bigr\}$. Для всякого k обозначим через c_k порождающий элемент полугруппы C_k. Если множество X бесконечно, то полугруппа $\prod_{k\in X} C_k^1$ не является эпигруппой, поскольку никакая степень элемента $(\dots, c_k, \dots)_{k\in X}$ не является групповым элементом. Таким образом, если X бесконечно, то $\mathcal{M}$ не замкнуто относительно (бесконечных) прямых произведений, и потому не является многообразием. Следовательно, множество X конечно. Обозначим наибольший элемент этого множества через m. Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 работы [44], можно установить, что всякая эпигруппа из $\mathcal{M}$ есть гомоморфный образ некоторой подэпигруппы эпигруппы $G \times C_m^1$. Положим $\mathcal{G} = \operatorname{var} G$. Учитывая лемму 1.9, получаем, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m^1$. С другой стороны, $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m^1 \subseteq \mathcal{M}$, поскольку $G, C_m^1 \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m^1$. Это завершает доказательство, поскольку $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп. $\square$

Из пп. (i) и (iv) леммы 1.6 и двойственных утверждений вытекает, что строго перестановочное многообразие эпигрупп не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Кроме того ясно, что каждый моноид, в котором выполнено перестановочное тождество, коммутативен. Таким образом, следующее утверждение непосредственно вытекает из предложения 1.2 и леммы 1.10.

Следствие 1.3. *Если $\mathcal{V}$ — строго перестановочное многообразие эпигрупп, то $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $m \ge 0$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.* $\square$

1.5. Прямое разложение одной конкретной решетки многообразий

Целью данного пункта является доказательство следующего утверждения.

Предложение 1.3. *Решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q})$ изоморфна прямому произведению решеток $L(\mathcal{AG})$ и $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q})$.*

Для доказательства этого факта нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Для произвольного многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ положим

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \wedge \mathcal{G},$$

где $\mathcal{G}$ — многообразие всех групп (иными словами, $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$ — наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$). Напомним, что многообразие полугрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нем тривиальны.

Ясно, что всякое комбинаторное многообразие периодично, и потому может рассматриваться как многообразие эпигрупп. Следующая лемма проверяется дословным повторением доказательством леммы 2 работы [4].

Лемма 1.11. *Если $\mathcal{G}$ — многообразие групп, а $\mathcal{K}$ — комбинаторное многообразие эпигрупп, то* $\mathrm{Gr}(\mathcal{G} \vee \mathcal{K}) = \mathcal{G}$. □

Лемма 1.12. *Если $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$, то $\mathcal{X} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — некоторое многообразие абелевых групп, $0 \le m \le 2$, а $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$, многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = yx^2$, которое, в силу пп. (i) и (iv) леммы 1.6 и двойственных к ним утверждений, не выполнено ни в одном из многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Следовательно, ни одно из этих многообразий не содержится в $\mathcal{X}$. Кроме того, $\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$, а значит и $\mathcal{X}$, удовлетворяет тождеству $x^2yz = x^2zy$. Подставляя в него единицу вместо x, получаем, что все эпигруппы с единицей из $\mathcal{X}$ коммутативны. Применяя предложение 1.2 и лемму 1.10, получаем, что $\mathcal{X} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \ge 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. Очевидно, что $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{AG}$. В силу лемм 1.2, 1.4 и 1.5, в $\mathcal{AG}$ выполнено тождество (1.1), в $\mathcal{C}_m$ — тождество $\overline{\overline{x}} = x^m$, а в $\mathcal{Q}$ — тождество (1.3). Следовательно, в многообразии $\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$ выполнено тождество $x^2y = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{x}}y$. В силу леммы 1.5, в многообразии $\mathcal{C}_m$ правая часть этого тождества равна $x^{2m}y$. Ясно, что при $m > 2$ тождество $x^2y = x^{2m}y$ в $\mathcal{C}_m$ не выполнено. Поскольку $\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$, это означает, что $0 \le m \le 2$. Отсюда вытекает, что в многообразии $\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{Q}$ выполнены тождества

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ xyx = xy\,\overline{\overline{x}}\,. \tag{1.6}$$

Поскольку $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$, из леммы 1.4 вытекает теперь, что в $\mathcal{N}$ выполнены тождества (0.1), т. е. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$. □

Приступим к непосредственному доказательству предложения 1.3. Пусть $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$. В силу леммы 1.12, $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $0 \le m \le 2$ и некоторого многообразия $\mathcal{N}$ такого, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$. Полагая $\mathcal{U} = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, мы получаем, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{U}$, где $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{AG}$, а $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$. Осталось доказать, что это разложение многообразия $\mathcal{V}$ в объединение некоторого подмногообразия многообразия $\mathcal{AG}$ и некоторого подмногообразия многообразия $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$ единственно.

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{G}' \vee \mathcal{U}'$, где $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{AG}$, а $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$. Требуется доказать, что $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ и $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. Многообразия $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ комбинаторны, поскольку они содержатся в комбинаторном многообразии $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$. Учитывая лемму 1.11, имеем

$$\mathcal{G} = \mathrm{Gr}(\mathcal{G} \vee \mathcal{U}) = \mathrm{Gr}(\mathcal{V}) = \mathrm{Gr}(\mathcal{G}' \vee \mathcal{U}') = \mathcal{G}'.$$

Осталось проверить, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$. Напомним, что $\mathcal{U} = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \le m \le 2$ и $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$, а $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$. Очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$ (а значит, и $\mathcal{U}'$) комбинаторно. Поэтому из леммы 1.12 вытекает, что $\mathcal{U}' = \mathcal{C}_k \vee \mathcal{N}'$ для некоторого $0 \le k \le 2$ и некоторого многообразия $\mathcal{N}'$ такого, что $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Q}$.

Предположим, что $m \ne k$. Без ограничения общности можно считать, что $m < k$, т.е. что либо $m = 0$, а $k \ge 1$, либо $m = 1$, а $k = 2$. Предположим, что $m = 0$, а $k \ge 1$. Тогда, в силу лемм 1.3 и 1.4, в многообразии $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{T} \vee \mathcal{N} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}$ выполнено тождество (1.2). Но, как вытекает из лемм 1.5 и 1.6(ii), в многообразии $\mathcal{SL}$ оно ложно. Поскольку $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_k \vee \mathcal{N}' = \mathcal{V}$, это невозможно. Если же $m = 1$, а $k = 2$, то, в силу лемм 1.2, 1.4 и 1.5, в многообразии $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N} = \mathcal{G} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ выполнено тождество $x^2y = x^2\,\overline{\overline{y}}$. Из лемм 1.5 и 1.6(iii) вытекает, что это тождество ложно в многообразии $\mathcal{C}_2$, а значит и в $\mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_k \vee \mathcal{N}' = \mathcal{V}$. Полученное противоречие показывает, что $m = k$.

Многообразия $\mathcal{U} = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ и $\mathcal{U}' = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}'$ периодичны. Как хорошо известно, всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ содержит наибольшее нильподмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{Nil}(\mathcal{X})$. Положим $\mathcal{N}_1 = \mathrm{Nil}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{N}_1' = \mathrm{Nil}(\mathcal{U}')$. Осталось проверить, что $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1'$, так как в этом случае

$$\mathcal{U} = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N} = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1 = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1' = \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}' = \mathcal{U}'.$$

Предположим, что $\mathcal{N}_1 \ne \mathcal{N}_1'$. Без ограничения общности можно считать, что существует тождество $u = v$, выполненное в $\mathcal{N}_1$, но ложное в $\mathcal{N}_1'$. Из выполнимости в $\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$, а значит и в многообразиях $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$, тождеств (1.6) и леммы 1.4 вытекает, что $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_1' \subseteq \mathcal{Q}$. Если слова u и v — не полугрупповые, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{N}_1'$ в силу леммы 1.4. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что слово u — полугрупповое. Будем говорить, что многообразия $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ *различаются тождеством* $u = v$, если это тождество выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ и ложно в другом. Если слово v — не полугрупповое, то, в силу той же леммы 1.4, в каждом из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$ выполнено тождество $v = 0$. Следовательно, в этом случае многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$ различаются тождеством $u = 0$. Предположим теперь, что слово v — полугрупповое. Если существует буква x, входящая в одно из слов u и v, но не входящая в другое, то подставляя 0 вместо x в тождество $u = v$, получаем, что в $\mathcal{N}_1$ выполнены тождества $u = 0$ и $v = 0$. Ясно, что в многообразии $\mathcal{N}_1'$ оба они одновременно выполняться не могут. Следовательно, в этом случае многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$ различаются одним из тождеств $u = 0$ и $v = 0$. Таким образом, многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$ различаются либо тождеством вида $u = 0$, где u — полугрупповое слово, либо тождеством вида $u = v$, где u и v — полугрупповые слова и $c(u) = c(v)$. Учитывая еще, что в $\mathcal{Q}$ (а значит и в $\mathcal{N}_1'$) все нелинейные полугрупповые слова, отличные от x^2, равны 0, получаем, что многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$ различаются либо тождеством

$$x^2 = 0, \tag{1.7}$$

либо некоторым перестановочным тождеством, либо тождеством (1.4). В первых двух случаях легко указать тождество, выполненное в $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1$, но ложное в $\mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1'$: в первом случае, в силу лемм 1.2, 1.4 и 1.5, таковым является тождество $x^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}$, а во втором — то перестановочное тождество, которое различает $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$. Предположим теперь, что $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_1'$ различаются тождеством (1.4). Положим

$$\mathcal{D}_m = \mathrm{var}\{x^m = 0,\, xy = yx\}$$

для всякого натурального m. Если $m = 2$, то многообразие $\mathcal{N}_1$ содержит многообразие $\mathrm{Nil}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{D}_2$, не удовлетворяющее тождеству (1.4). Следовательно, $m \leq 1$. Но тогда многообразие $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ вполне регулярно. Поэтому, в силу лемм 1.2 и 1.4, в многообразии $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1$ выполнено тождество

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \overline{\overline{x_1}}\, x_2 \cdots x_n,$$

в силу леммы 1.4 ложное в $\mathcal{N}_1'$, а значит и в $\mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1'$. Мы показали, что если $\mathcal{N}_1 \neq \mathcal{N}_1'$, то $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1 \neq \mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1'$. Но это невозможно, так как

$$\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1 = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N} = \mathcal{V} = \mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}' = \mathcal{G}' \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}_1'.$$

Предложение доказано. □

«Полугрупповой прототип» предложения 1.3 (в котором вместо $\mathcal{AG}$ фигурирует произвольное многообразие периодических абелевых групп) доказан в [4, предложение 2a]. Приведенное выше доказательство предложения 1.3 во многом повторяет доказательство указанного утверждения в [4]. Однако напрямую результаты из [4] в доказательстве предложения 1.3 не используются, и потому упомянутое утверждение работы [4] можно теперь рассматривать как следствие из предложения 1.3. Аналогичным образом на эпигрупповой случай можно перенести и все остальные результаты работы [4], но это выходит за рамки диссертации.

1.6. Многообразия конечной ступени

Если многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ является многообразием конечной ступени, то обозначим ступень этого многообразия через $\deg(\mathcal{V})$. Для всякого натурального n положим

$$\mathcal{L}_n = \mathrm{var}\{x^2 = x_1 x_2 \cdots x_n = 0,\, xy = yx\}.$$

Предложение 1.4. *Пусть n — произвольное натуральное число. Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквиваленты:*

(i) $\deg(\mathcal{V}) \le n$;

(ii) $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{L}_{n+1}$;

(iii) *в* $\mathcal{V}$ *выполнено тождество вида*

$$x_1 \cdots x_n = x_1 \cdots x_{i-1} \cdot \overline{\overline{x_i \cdots x_j}} \cdot x_{j+1} \cdots x_n,$$

где $1 \le i \le j \le n$. □

Из предложения 1.4 немедленно вытекает

Следствие 1.4. $\deg(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) = \min\{\deg(\mathcal{X}), \deg(\mathcal{Y})\}$ *для произвольных многообразий эпигрупп* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$. □

Дословно повторяя доказательство следствие 2.13 работы [71], но используя предложение 1.4 диссертации вместо предложения 2.1 из [71], получаем, что справедливо следующее

Следствие 1.5. *Если* $\mathcal{V}$ *— произвольное многообразие эпигрупп, а* $\mathcal{N}$ *— нильмногообразие, то* $\deg(\mathcal{V} \vee \mathcal{N}) = \max\{\deg(\mathcal{V}), \deg(\mathcal{N})\}$. □

Отметим, что аналог следствия 1.5 для произвольных многообразий эпигрупп неверен уже в периодическом случае. Соответствующий пример можно найти, например, в [71].

Из предложения 1.4 и леммы 1.6(ii) немедленно вытекает следующее

Следствие 1.6. *Если* $\mathcal{V}$ *— произвольное многообразие эпигрупп, а* $\mathcal{X}$ *— вполне регулярное многообразие эпигрупп, то* $\deg(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) = \deg(\mathcal{V})$. □

1.7. Тождества и полумодулярность в решетках нильмногообразий

Здесь мы приводим необходимую для дальнейшего информацию о нильмногообразиях полугрупп со слабо полумодулярной вверх, слабо полумодулярной вниз или дистрибутивной решеткой подмногообразий. Поскольку нильмногообразия полугрупп периодичны, ее можно применять и при рассмотрении многообразий эпигрупп с теми же свойствами. Из результатов работ [5, 13, 20] вытекает

Лемма 1.13. *Если нильмногообразие полугрупп имеет слабо полумодулярную вверх или вниз решетку подмногообразий, то оно удовлетворяет тождеству вида* (0.2), *где* π *— одна из перестановок* (0.3). *Если многообразие полугрупп удовлетворяет такому тождеству и тождествам* (0.1), *то решетка его подмногообразий принадлежит многообразию* $\mathbf{M}_{4,3}$. □

Следующая лемма непосредственно вытекает из описания нильмногообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, полученного в [77] и передоказанного более простым и коротким способом в [74, предложение 4.2].

Лемма 1.14. *Если нильмногообразие полугрупп имеет дистрибутивную решетку подмногообразий, то оно удовлетворяет тождеству вида* (0.5)*, где* π *— одна из перестановок* (0.6)*. Если многообразие полугрупп удовлетворяет такому тождеству и тождествам* (0.1)*, то решетка его подмногообразий дистрибутивна.* $\square$

1.8. Некоторые сведения о специальных элементах решетки EPI

Следующие три утверждения работы [86] приводятся здесь без доказательства, поскольку они доказаны Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским.

Предложение 1.5 ([86, теорема 1.1])**.** *Для многообразия эпигрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ *— модулярный, верхнемодулярный и нижнемодулярный элемент решетки* **Epi***;*

б) $\mathcal{V}$ *— нейтральный элемент решетки* **Epi***;*

в) $\mathcal{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathcal{T}$*,* $\mathcal{SL}$*,* $\mathcal{ZM}$ *и* $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$*.* $\square$

Предложение 1.6 ([86, теорема 1.2])**.** *Если многообразие эпигрупп* $\mathcal{V}$ *является модулярным элементом решетки* **EPI***, то* $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{M}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{SL}$*, а* $\mathcal{N}$ *— нильмногообразие.* $\square$

В дествительности, теорема 1.2 работы [86] устанавливает, что многообразие $\mathcal{N}$, упомянутое в предложении 1.6, удовлетворяет некоторому весьма сильному дополнительному условию. Но этот факт в дальнейшем нам не понадобится.

Предложение 1.7 ([86, теорема 1.3])**.** *Коммутативное многообразие эпигрупп* $\mathcal{V}$ *является модулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{M}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{SL}$*, а* $\mathcal{N}$ *— коммутативное нильмногообразие, удовлетворяющее тождеству* (0.8)*.* $\square$

Чтобы сформулировать еще один результат о специальных элементах решетки **EPI**, нам понадобится одно новое понятие. Пусть I — решеточное тождество вида $s = t$, где s и t — решеточные термы от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in L) \quad \bigl(s(x, x_1, \ldots, x_n) = t(x, x_1, \ldots, x_n)\bigr).$$

Заметим, что специальные элементы всех восьми перечисленных выше типов являются I-элементами для подходящих I (для нейтральных, [ко]дистрибутивных и [ко]стандартных элементов это очевидно, а для модулярных, верхнемодулярных и нижнемодулярных вытекает из возможности записать модулярный закон в виде тождества). В [29, следствие 2.1] показано, что если I — тождество, выполненное в 2-элементной решетке, а a — атом и нейтральный элемент некоторой решетки L, то элемент $x \in L$ является I-элементом в L тогда и только тогда, когда этим свойством обладает элемент $x \vee a$. Общеизвестно, что многообразия $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ являются атомами решетки **SEM** (см., например, § 1 в обзоре [34]), а значит и решетки **EPI**. Учитывая предложение 1.5, получаем следующее утверждение.

Лемма 1.15. *Пусть I — решеточное тождество, выполненное в 2-элементной решетке, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$. Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является I-элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда этим свойством обладает многообразие $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$.* $\square$

§ 2. Тождества и полумодулярность

Этот параграф делится на два пункта. В п. 2.1 доказываются теоремы 1 и 2, а в п. 2.2 приводятся следствия из них и результатов некоторых более ранних работ.

2.1. Доказательства теорем 1 и 2

Мы будем доказывать теоремы 1 и 2 параллельно. Доказательство теоремы 1 будет проводиться по схеме

$$\begin{tikzcd}
\text{в)} \arrow[rrr] & & & \text{а)} \arrow[d] & \\
\text{д)} \arrow[u] \arrow[d] & \text{е)} \arrow[l] & \text{ж)} \arrow[l] & \text{з)} \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{и).} \\
\text{г)} \arrow[rrr] & & & \text{б)} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Импликации ж) $\longrightarrow$ е) $\longrightarrow$ д) $\longrightarrow$ в) $\longrightarrow$ а) и д) $\longrightarrow$ г) $\longrightarrow$ б) этой теоремы очевидны, поэтому нам достаточно доказать только импликации а) $\longrightarrow$ з) $\longrightarrow$ ж), б) $\longrightarrow$ з) $\longrightarrow$ и) и и) $\longrightarrow$ з). Доказательство теоремы 2 будет проводиться по схеме а) $\longleftrightarrow$ б) $\longleftrightarrow$ в).

1°. Импликации а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и импликация а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2. Здесь нам понадобится ряд лемм. Положим

$$\mathcal{N}_3 = \mathrm{var}\{x^2 = xyz = 0\}.$$

Хорошо известно и легко проверяется, что интервал $[\mathcal{ZM}, \mathcal{N}_3]$ решетки многообразий полугрупп состоит только из трех элементов: $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{N}_3$.

Лемма 2.1. *Если $\mathcal{X}$ — либо одно из многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, либо неабелево многообразие групп, то решетка $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{L}_3)$ не является слабо полумодулярной ни вверх, ни вниз.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Как проверено в [5], решетки $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{L}_3)$ и $L(\mathcal{P} \vee \mathcal{L}_3)$ имеют вид, изображенный на рис. 3 и 4 соответственно. Очевидно, что ни одна из этих решеток не является слабо полумодулярной ни вверх, ни вниз. Поскольку двойственные друг к другу многообразия имеют изоморфные решетки подмногообразий, указанными свойствами не обладают и решетки $L(\mathcal{RZ} \vee \mathcal{L}_3)$ и $L(\overleftarrow{\mathcal{P}} \vee \mathcal{L}_3)$.

Пусть теперь $\mathcal{X}$ — неабелево многообразие групп. Многообразие $\mathcal{X}$ содержит минимальное неабелево подмногообразие $\mathcal{X}'$. Обозначим через $\mathcal{G}$ объединение всех собственных подмногообразий многообразия $\mathcal{X}'$. Ясно, что $\mathcal{X}'$ покрывает $\mathcal{G}$ в решетке $L(\mathcal{X}')$. Покажем, что интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X} \vee \mathcal{L}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{L}_3)$ не слабо полумодулярен ни вверх, ни вниз. Пусть $\mathcal{W}$ —

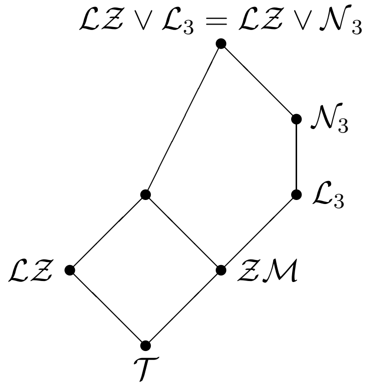

Рис. 3: решетка $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{L}_3)$

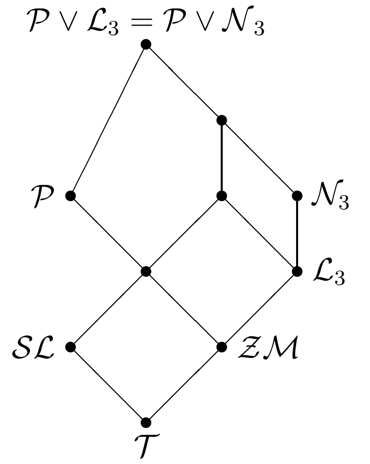

Рис. 4: решетка $L(\mathcal{P} \vee \mathcal{L}_3)$

любое многообразие из этого интервала. В силу следствия 1.2, многообразие $\mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3$, а значит и $\mathcal{W}$, не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп. Вновь используя следствие 1.2, имеем $\mathcal{W} = \mathcal{H} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{H}$ — некоторое многообразие групп, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.

Согласно лемме 1.11, $\mathrm{Gr}(\mathcal{W}) = \mathrm{Gr}(\mathcal{H} \vee \mathcal{N}) = \mathcal{H}$ и $\mathrm{Gr}(\mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3) = \mathcal{X}'$. Поскольку, $\mathcal{W} \in [\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3]$, получаем, что $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}'$, а значит $\mathcal{H}$ — одно из многообразий $\mathcal{G}$ или $\mathcal{X}'$. Заметим, что $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_3$, а значит, $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{L}_3$ или $\mathcal{N}_3$. Следовательно, многообразие $\mathcal{W}$ совпадает с одним из шести многообразий: $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{L}_3$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{N}_3$, $\mathcal{X}' \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3$ и $\mathcal{X}' \vee \mathcal{N}_3$. Дословно повторяя соответствующую часть доказательства леммы 1 работы [15], можно проверить, что если $\mathcal{Y}$ — некоммутативное многообразие эпигрупп, то $\mathcal{Y} \vee \mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{N}_3$. Это означает, что $\mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3 = \mathcal{X}' \vee \mathcal{N}_3$. Следовательно, интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3]$ имеет вид, изображенный на рис. 5. В частности, он не является слабо полумодулярным ни вверх, ни вниз. $\square$

Лемма 2.2. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, а $\mathcal{X}$ — подмногообразие ступени ≤ 2 многообразия $\mathcal{V}$, то многообразие $\mathcal{X}$ коммутативно.*

Доказательство. В силу предложения 1.4, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{L}_3$. Согласно лемме 2.1, отсюда вытекает, что $\mathcal{X}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Из предложения 1.2 получаем, что $\mathcal{X} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ является многообразием, порожденным эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразием. Поскольку $\mathcal{X}$ — многообразие ступени ≤ 2, многообразие $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{ZM}$. В частности, оно коммутативно. Осталось показать, что многообразие $\mathcal{M}$ также коммутативно. Очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2$ не является многообразием

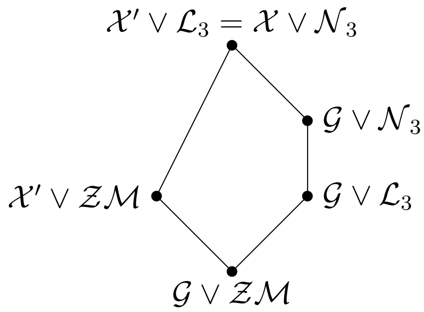

Рис. 5: интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{L}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{L}_3)$

ступени ≤ 2. Следовательно, оно не может содержаться в многообразии $\mathcal{X}$, а значит и в $\mathcal{M}$. В силу следствия 1.1, многообразие $\mathcal{M}$ порождается вполне регулярной эпигруппой. Известно, что любая вполне регулярная полугруппа является полурешеткой прямоугольных связок групп. Поскольку многообразие $\mathcal{X}$, а значит и $\mathcal{M}$, не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$, многообразие $\mathcal{M}$ состоит из полурешеток групп. Из леммы 2.1 следует, что $\mathcal{M}$ не содержит неабелевых многообразий групп. Следовательно, $\mathcal{M}$ состоит из полурешеток абелевых групп, а значит, оно коммутативно. □

Лемма 2.3. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, то всякая эпигруппа с единицей из $\mathcal{V}$ коммутативна.*

Доказательство. Обозначим через S произвольную эпигруппу с единицей, принадлежащую $\mathcal{V}$. Положим $\mathcal{F} = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = 0\}$. Из леммы 1.13 вытекает, что решетка $L(\mathcal{F})$ не слабо полумодулярна ни вверх, ни вниз, а значит, $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{V}$. Следовательно, существует тождество $u = v$, выполненное в $\mathcal{V}$, но не выполненное в $\mathcal{F}$. Отметим, что тождество $u = v$ выполнено в эпигруппе S. Если каждое из эпигрупповых слов u и v содержит операцию псевдообращения, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{F}$ в силу леммы 1.4. Поэтому без ограничения общности можно считать, что слово u является полугрупповым.

Предположим сначала, что слово v также является полугрупповым. Если существует буква x, входящая в запись одного из слов u и v, но не входящая в запись другого, то, подставив в тождество $u = v$ единицу вместо всех букв, кроме x, мы получим, что S удовлетворяет тождеству $x^n = 1$ для некоторого натурального n. Но тогда в $\mathrm{var}\, S$ выполнено тождество $x = x^{n+1}$, а значит многообразие $\mathrm{var}\, S$ является многообразием ступени 1. Согласно лемме 2.2, оно коммутативно. Следовательно, и эпигруппа S будет коммутативной.

Далее будем считать, что слова u и v зависят от одних и тех же букв. Если ни одно из этих слов не является линейным, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{F}$. Без ограничения общности будем считать, что слово u линейно. Если слово v также линейно, то $u = v$ — перестановочное тождество. Всякая эпигруппа с единицей, удовлетворяющая перестановочному тождеству, коммутативна. Пусть, наконец, слово v не линейно, т. е. существует буква x, входящая в запись v более одного раза. Подставляя в тождество $u = v$ единицу вместо всех букв, кроме x, мы получим, что $\operatorname{var} S$ удовлетворяет тождеству $x^m = x$ для некоторого $m > 1$. Как и выше, из леммы 2.2 вытекает, что эпигруппа S коммутативна.

Осталось рассмотреть случай, когда слово v содержит операцию псевдообращения. В силу леммы 1.4, в этом случае $v = 0$ в любом нильмногообразии. Если слово u не линейно, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{F}$. Поэтому далее можно считать, что u линейно, т. е. совпадает со словом $x_1 x_2 \cdots x_n$ для некоторого n. В любой нильполугруппе из $\mathcal{V}$ выполнены тождества $x_1 x_2 \cdots x_n = v = 0$. Следовательно, $\mathcal{V}$ не содержит многообразия $\mathcal{C}_2$. Из предложения 1.4 вытекает, что $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{L}_3$. Поскольку решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ слабо полумодулярна вверх или вниз, из леммы 2.1 вытекает, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Пользуясь следствием 1.1, получаем, что эпигруппа S вполне регулярна. Вновь из леммы 2.2 вытекает, что эта эпигруппа коммутативна. □

Лемма 2.4. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, и $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие, то либо $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{N} \nsubseteq \mathcal{Q}$. В силу леммы 2.3 многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Из леммы 1.10 вытекает, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$. Многообразие $\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из результатов работ [5, 13, 20] вытекает, что при $m > 1$ решетка $L(\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N})$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Следовательно, $m \leq 1$. Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{G}$ нетривиально. Тогда $\mathcal{G}$ содержит нетривиальное многообразие периодических групп $\mathcal{H}$. Многообразие $\mathcal{H} \vee \mathcal{N}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из результатов работ [5, 13, 20] вытекает, что решетка $L(\mathcal{H} \vee \mathcal{N})$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Следовательно, $\mathcal{G} = \mathcal{T}$, и потому $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. □

Приступим к непосредственной проверке импликаций а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и импликации а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2. Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз. В силу леммы 2.2, всякое содержащееся в $\mathcal{V}$ многообразие ступени ≤ 2 коммутативно. В частности, это означает, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. В силу предложения 1.2, $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. В силу леммы 2.3, многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Применяя лемму 1.10, мы получаем, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$. При этом $\mathcal{G} = \mathcal{AG}$, так как в противном случае многообразие $\mathcal{M}$, а значит и многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, периодично. Многообразие $\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ периодично. Положим $\mathcal{N}' = \mathrm{Nil}(\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N})$. Ясно, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}'$. В силу леммы 2.4, либо $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Q}$. Но первый случай невозможен, так как в этом случае многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}'$ было бы периодическим. Следовательно, $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Q}$. Ясно, что $\mathcal{D}_m = \mathrm{Nil}(\mathcal{C}_m) \subseteq \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Q}$. Поскольку, очевидно, $\mathcal{D}_m \nsubseteq \mathcal{Q}$ при $m > 2$, мы получаем, что $m \leq 2$. Кроме того, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Q}$, т. е. $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (0.1), а из леммы 1.13 вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида (0.2), где π — одна из перестановок (0.3). Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию з) теоремы 1. Импликации а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 доказаны.

Предположим теперь, что решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. В силу сказанного выше, $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (0.1). Очевидно, что решетка $L(\mathcal{N})$ дистрибутивна. Поэтому из леммы 1.14 вытекает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество вида (0.5), где π — одна из перестановок (0.6). Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию б) теоремы 2. Тем самым, мы доказали импликацию а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2.

2°. Импликации з) $\longrightarrow$ ж) теоремы 1 и б) $\longrightarrow$ а) теоремы 2. В силу предложения 1.3, решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q})$ изоморфна прямому произведению решеток $L(\mathcal{AG})$ и $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q})$. Обозначим через C_3 3-элементную цепь $\mathcal{T} \subset \mathcal{SL} \subset \mathcal{C}_2$. Поскольку многообразие $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q}$ периодично, оно может рассматриваться как многообразие полугрупп. Как показано в [16, лемма 3] (а также в [77, лемма 7]), решетка $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q})$ изоморфна подпрямому произведению решеток C_3 и $L(\mathcal{Q})$. Из сказанного вытекает, что решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Q})$ изоморфно вкладывается в прямое произведение решетки $L(\mathcal{AG})$, 3-элементной цепи и решетки $L(\mathcal{Q})$. Общеизвестно, что решетка $L(\mathcal{AG})$ дистрибутивна. Из леммы 1.13 теперь вытекает, что если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, удовлетворяющее условию ж) теоремы 1, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Мы доказали импликацию з) $\longrightarrow$ ж) теоремы 1. Аналогично, ссылка на лемму 1.14 завершает доказательство импликации б) $\longrightarrow$ а) теоремы 2.

3°. Импликации з) $\longrightarrow$ и) теоремы 1 и б) $\longrightarrow$ в) теоремы 2. Предположим, что $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \leq m \leq 2$, а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (0.1) и (0.2), где π — одна из перестановок (0.3). В силу леммы 1.2, многообразие $\mathcal{AG}$ удовлетворяет тождеству (1.1), многообразие $\mathcal{C}_2$ — тождеству $\overline{\overline{x}} = x^2$, а многообразие $\mathcal{N}$ — тождеству (1.3). Учитывая еще, что многообразия $\mathcal{AG}$ и $\mathcal{C}_2$ коммутативны, а $\mathcal{C}_2$, кроме того, удовлетворяет тождеству $x^2 = x^3$, легко убедиться в том, что в каждом из многообразий $\mathcal{AG}$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{N}$, а значит и в $\mathcal{V}$, выполнены тождества (1.6). Кроме того, ясно, что всякое перестановочное тождество, выполненное в $\mathcal{N}$, выполнено и в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида (0.2), где π — одна из перестановок (0.3). Мы доказали, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.4). Это доказывает импликацию з) $\longrightarrow$ и) теоремы 1. Импликация б) $\longrightarrow$ в) теоремы 2 проверяется вполне аналогично.

4°. **Импликации и) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и в) $\longrightarrow$ б) теоремы 2.** Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (0.4). В силу пп. (i) и (iv) и двойственных утверждений, эта система не выполнена в многообразиях $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Следовательно, ни одно из этих четырех многообразий не содержится в $\mathcal{V}$. Кроме того, все эпигруппы с единицей в $\mathcal{V}$ коммутативны, поскольку в систему тождеств (0.4) входит перестановочное тождество. Из предложения 1.2 и леммы 1.10 вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \geq 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ непериодично, $\mathcal{G} = \mathcal{AG}$. Далее, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = \overline{\overline{x}}^2y$. Как уже отмечалось в доказательстве леммы 1.12, это тождество не выполняется в многообразии $\mathcal{C}_m$ при $m > 2$. Следовательно, $m \leq 2$. Наконец, из выполнимости в $\mathcal{V}$ системы тождеств (0.4) и леммы 1.4 вытекает, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (0.1), а выполнимость в нем тождества вида (0.2), где π — одна из перестановок (0.3), вытекает из выполнимости тождества такого вида в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию з) теоремы 1. Мы доказали импликацию и) $\longrightarrow$ з) теоремы 1. Импликация в) $\longrightarrow$ б) теоремы 2 проверяется вполне аналогично.

Теоремы 1 и 2 полностью доказаны. □

2.2. Следствия

Теоремы 1 и 2 относятся к непериодическим многообразиям эпигрупп. В этом пункте указываются некоторые следствия из этих теорем и результатов работ [5,13,20], относящиеся к произвольным эпигрупповым многообразиям.

Следствие 2.1. *Для произвольного многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2:*

а) *условия* а), в), д), е) *и* ж) *теоремы* 1 *эквивалентны;*

б) *условия* б) *и* г) *теоремы* 1 *эквивалентны.*

Доказательство. а) Поскольку импликации ж) $\longrightarrow$ е) $\longrightarrow$ д) $\longrightarrow$ в) $\longrightarrow$ а) очевидны, достаточно доказать импликацию а) $\longrightarrow$ ж). Предположим, что решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх. Требуется доказать, что она лежит в $\mathbf{M}_{4,3}$. В силу теоремы 1, можно считать, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из [5, теорема 2] и [13, следствие 6.2] вытекает, что если многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Если же $\mathcal{V}$ не комбинаторно, то, с учетом того, что $\mathcal{V}$ — многообразие ступени > 2, из [5, теорема 2] вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующему «периодическому аналогу» условия з) теоремы 1: $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам (0.1) и (0.2), где π — одна из перестановок (0.3). Положим $\mathcal{W} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$. В силу теоремы 1, $L(\mathcal{W}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Поскольку $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, получаем, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$.

б) Это утверждение доказывается вполне аналогично предыдущему, надо только ссылаться на теорему 3 работы [5] вместо теоремы 2 этой работы. $\square$

Сравнение теорем 2 и 3 работы [5] показывает, что условия а) и б) теоремы 1 для периодических многообразий ступени > 2 не эквивалентны.

Отметим, что следствие 2.1 нельзя усилить, заменив в его формулировке многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ каким-либо его собственным подмногообразием: используя теорему 1 и результаты работы [7], легко привести примеры многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, но не принадлежит никакому собственному подмногообразию многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$.

Следствие 2.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она принадлежит многообразию, порожденному некоторой конечной решеткой.*

Доказательство. Если многообразие $\mathcal{V}$ не периодично, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$ в силу теоремы 1, а если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх, то тот же вывод вытекает из следствия 2.1. Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично и решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз, но не слабо полумодулярна вверх. Из теорем 2 и 3 работы [5] вытекает, что в этом случае многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно. Требуемое заключение непосредственно вытекает теперь из [13, следствие 6.3]. $\square$

Хорошо известно, что всякая конечная решетка порождает наследственно конечно базируемое многообразие решеток [53]. Поэтому из следствия 2.2 непосредственно вытекает

Следствие 2.3. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она имеет конечный базис тождеств.* $\square$

Следующее утверждение для периодических многообразий эпигрупп вытекает из доказательств результатов работ [15,16], а для непериодических — из доказательства теоремы 1.

Следствие 2.4. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, а $\mathbf{L}$ — нетривиальное квазимногоообразие модулярных решеток, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $0 \leq m \leq 2$, многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (0.1) *и $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.* $\square$

Нильмногообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит произвольному наперед заданному квазимногообразию модулярных решеток $\mathbf{L}$, полностью описаны в работе [7]. Таким образом, следствие 2.4 фактически дает описание многообразий эпигрупп ступени > 2 с тем же свойством.

Для произвольных натуральных чисел k и n обозначим через M_k решетку, состоящую из наименьшего и наибольшего элементов и k атомов, а через $M_{k,n}$ — решетку, изображенную на рис. 6. Многообразия решеток, порожденные решетками M_k и $M_{k,n}$, обозначим через $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_{k,n}$ соответственно. Легко проверяется, что список неодноэлементных подпрямо неразложимых подрешеток решетки $M_{4,3}$ исчерпывается 2-элементной цепью и решетками M_3, M_4, $M_{3,3}$ и $M_{4,3}$. Отсюда вытекает, что решетка подмногообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ имеет вид, изображенный на рис. 7, где через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{DIS}$ обозначены тривиальное многообразие решеток и многообразие всех дистрибутивных решеток соответственно.

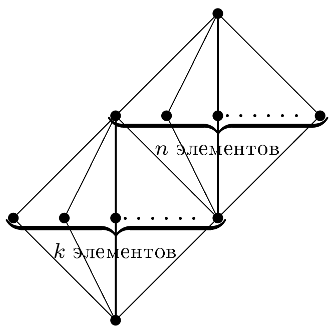

Рис. 6: решетка $M_{k,n}$

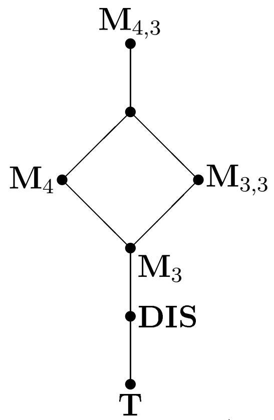

Рис. 7: решетка $L(\mathbf{M}_{4,3})$

Обозначим через C_2 2-элементную цепь. Будем говорить, что две решетки *[квази]эквационально эквивалентны*, если они порождают одно и то же [квази]многообразие решеток. Из следствия 2.4 и результатов работы [7] вытекает

Следствие 2.5. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2 с модулярной решеткой подмногообразий, то решетка $L(\mathcal{V})$ [квази]эквационально эквивалентна одной из решеток $C_2, M_3, M_4, M_{3,3}, M_4 \times M_{3,3}$ и $M_{4,3}$.* □

§ 3. Специальные элементы

Этот параграф делится на семь пунктов. Пять из них (пп. 3.1–3.3, 3.6 и 3.7) посвящены доказательству теорем 3–7. Более точно, в пп. 3.1, 3.2, 3.3, 3.6 и 3.7 доказываются теоремы 7, 6, 5, 3 и 4 соответственно. Наконец, пп. 3.4 и 3.5 посвящены приложениям теоремы 5.

3.1. Верхнемодулярные элементы

В этом пункте будет доказана теорема 7. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Если строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *то $\mathcal{V}$ коммутативно.*

Доказательство. Используя следствие 1.3, имеем $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $m \geq 0$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Если $\deg(\mathcal{V}) \leq 2$, то $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$ и утверждение леммы очевидно. Пусть теперь $\deg(\mathcal{V}) > 2$.

Согласно предложению 1.4, $\mathcal{V}$ содержит многообразие $\mathcal{L}_3$. Обозначим через $\mathcal{G}'$ некоторое неабелево многообразие групп. Если $\mathcal{V}$ строго перестановочно, то каждая группа в $\mathcal{V}$ абелева. Таким образом, многообразие $(\mathcal{G}' \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{L}_3$ коммутативно. Поскольку $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{V}$, а многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно,

$$(\mathcal{G}' \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{L}_3 = (\mathcal{G}' \vee \mathcal{L}_3) \wedge \mathcal{V}.$$

Следовательно, многообразие $(\mathcal{G}' \vee \mathcal{L}_3) \wedge \mathcal{V}$ коммутативно. Это значит, что существует вывод тождества $xy = yx$ из тождеств многообразий $\mathcal{G}' \vee \mathcal{L}_3$ и $\mathcal{V}$. В частности, существует слово v такое, что $v \not\equiv xy$ и тождество $xy = v$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{G}' \vee \mathcal{L}_3$ или $\mathcal{V}$. Из п. (i) и (iii) леммы 1.7 следует, что многообразие, удовлетворяющее тождеству $xy = v$ либо коммутативно, либо является многообразием ступени ≤ 2. Многообразие $\mathcal{G}' \vee \mathcal{L}_3$ не коммутативно (потому что $\mathcal{G}'$ неабелево) и не является многообразием ступени ≤ 2 (потому что $\deg(\mathcal{L}_3) > 2$). Поскольку $\deg(\mathcal{V}) > 2$, получаем, что многообразие $\mathcal{V}$ коммутативно. $\square$

Доказательство следующей леммы во многом, местами дословно, повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1.1 статьи [71] (при одном существенном отличии, о котором будет сказано ниже).

Лемма 3.2. *Если строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *то каждая нильполугруппа в $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству* (0.7).

Доказательство. Согласно лемме 3.1, $\mathcal{V}$ коммутативно. Если все нильполугруппы в $\mathcal{V}$ одноэлементны, то доказываемое утверждение очевидно. Предположим, что $\mathcal{V}$ содержит неодноэлементную нильполугруппу N. Обозначим через $\mathcal{N}$ многообразие, порожденное этой нильполугруппой. Очевидно, что $\mathcal{N}$ коммутативно и $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{N}$. Покажем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (0.7).

Положим

$$\mathcal{I} = \mathrm{var}\{x^2y = xy^2,\, xy = yx,\, x^2yz = 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{N}' = \mathcal{N} \wedge \mathcal{I}.$$

Очевидно, что $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{I}$, а значит $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{N}'$.

Доказательство полугруппового аналога леммы 3.2 (см. соответствующую часть в доказательстве необходимости в теореме 1.1 статьи [71]) базируется на установленном там факте существования многообразия полугрупп $\mathcal{X}$ такого, что:

(i) $(\mathcal{X} \vee \mathcal{N}') \wedge \mathcal{V} \subseteq \mathcal{I}$;

(ii) если $v \in \{x^2y, xyx, yx^2\}$ и $w \in \{xy^2, yxy, y^2x\}$, то тождество $v = w$ не выполняется в $\mathcal{X}$.

В [71] роль $\mathcal{X}$ играет некоторое периодическое многообразие групп. Здесь нам следует взять другое $\mathcal{X}$. А именно, положим $\mathcal{X} = \mathcal{LZM} \vee \mathcal{RZM}$, где

$$\mathcal{LZM} = \mathrm{var}\{xyz = xy\}, \text{ а } \mathcal{RZM} = \mathrm{var}\{xyz = yz\}.$$

Покажем, что для $\mathcal{X}$ выполняются указанные выше условия (i) и (ii). Многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $xyzxy = xy$. Из леммы 1.6(ii) следует, что $\mathcal{SL} \nsubseteq \mathcal{X}$. Кроме того, подставляя 1 вместо x и y в тождество $xyzxy = xy$, получаем, что все группы в $\mathcal{X}$ одноэлементны. Отсюда вытекает, что каждая коммутативная полугруппа в $\mathcal{X}$ является нильполугруппой. Далее, $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $xy = (xy)^2$, и потому, в силу леммы 1.7(ii), все нильполугруппы из $\mathcal{X}$ лежат в $\mathcal{ZM}$. Поскольку многообразие $\mathcal{X} \wedge \mathcal{V}$ коммутативно, $\mathcal{X} \wedge \mathcal{V} \subseteq \mathcal{ZM}$. Многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно и $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{V}$. Следовательно,

$$(\mathcal{X} \vee \mathcal{N}') \wedge \mathcal{V} = (\mathcal{X} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{ZM} \vee \mathcal{N}' = \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{I}.$$

Мы доказали утверждение (i). Проверим утверждение (ii). Очевидно, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет полугрупповому тождеству $v = w$ тогда и только тогда, когда слова v и w имеют одинаковый префикс длины 2 и одинаковый суффикс длины 2. Ясно, что это свойство не выполняется, если $v \in \{x^2y, xyx, yx^2\}$ и $w \in \{xy^2, yxy, y^2x\}$.

Итак, справедливы утверждения (i) и (ii). Используя этот факт, доказательство леммы можно завершить дословным повторением последнего абзаца доказательства теоремы 1.1 статьи [71]. □

Доказательство следующего утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [75].

Предложение 3.1. *Если нильмногообразие эпигрупп $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождествам* (0.7) *и* $xy = yx$, *то* $\mathcal{X}$ *является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI**.

Доказательство. Легко проверить (см., например, [75, лемма 2.7]), что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $x^2yz = 0$. Следовательно, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}$. Положим

$$U = \{x^2, x^3, x^2y, x_1x_2 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что каждое подмногообразие многообразия $\mathcal{I}$ может быть задано внутри $\mathcal{I}$ только тождествами вида $u = v$ или $u = 0$, где $u, v \in U$. В силу леммы 1.7, если $u, v \in U$ и $u \not\equiv v$, то тождество $u = v$ влечет в многообразии $\mathcal{I}$ тождество $u = 0$. Легко заметить, что решетка $L(\mathcal{I})$ имеет вид, изображенный на рис. 8, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n &= \mathrm{var}\{x^2yz = x_1x_2\cdots x_n = 0,\ x^2y = xy^2,\ xy = yx\},\ \text{ где } n \geq 4,\\
\mathcal{J} &= \mathrm{var}\{x^2yz = x^3 = 0,\ x^2y = xy^2,\ xy = yx\},\\
\mathcal{J}_n &= \mathrm{var}\{x^2yz = x^3 = x_1x_2\cdots x_n = 0,\ x^2y = xy^2,\ xy = yx\},\ \text{ где } n \geq 4,\\
\mathcal{K} &= \mathrm{var}\{x^2y = 0,\ xy = yx\},\\
\mathcal{K}_n &= \mathrm{var}\{x^2y = x_1x_2\cdots x_n = 0,\ xy = yx\},\ \text{ где } n \geq 3,\\
\mathcal{L} &= \mathrm{var}\{x^2 = 0,\ xy = yx\},
\end{aligned}$$

а $\mathcal{L}_n$ — многообразия, введенные в п. 1.6.

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}$. Нам требуется доказать, что если $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, а $\mathcal{Z}$ — произвольное многообразие эпигрупп, то выполнено равенство $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X} = (\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}$. Для произвольного подмногообразия $\mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{I}$, обозначим через $\mathcal{M}^*$ наименьшее из многообразий $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$, содержащее $\mathcal{M}$. Легко заметить, что если $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{I}$, то $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ тогда и только тогда, когда $\deg(\mathcal{M}_1) = \deg(\mathcal{M}_2)$ и $\mathcal{M}_1^* = \mathcal{M}_2^*$. Таким образом нам следует проверить справедливость следующих двух равенств:

$$\deg\big((\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}\big) = \deg\big((\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}\big), \tag{3.1}$$

$$\big((\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}\big)^* = \big((\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}\big)^*. \tag{3.2}$$

Равенство (3.1). Положим $\deg(\mathcal{X}) = k, \deg(\mathcal{Y}) = \ell$ и $\deg(\mathcal{Z}) = m$. Из следствий 1.4 и 1.5 вытекает, что

$$\begin{aligned}
\deg\big((\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}\big) &= \min\big\{\max\{m,\ell\},k\big\},\\
\deg\big((\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}\big) &= \max\big\{\min\{m,k\},\ell\big\}.
\end{aligned}$$

Ясно, что $\ell \leq k$, поскольку $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. Учитывая, что решетка натуральных чисел с операциями min и max дистрибутивна, получаем, что

$$\begin{aligned}
\deg\big((\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}\big) &= \min\big\{\max\{m,\ell\},k\big\} = \max\big\{\min\{m,k\},\min\{\ell,k\}\big\}\\
&= \max\big\{\min\{m,k\},\ell\big\} = \deg\big((\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}\big).
\end{aligned}$$

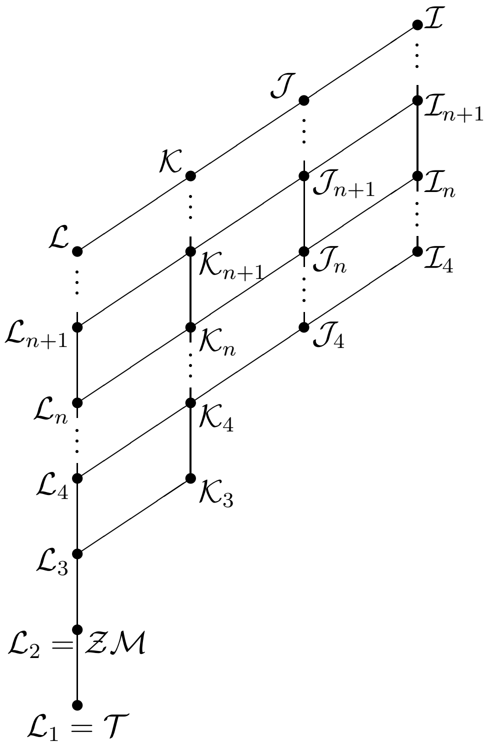

Рис. 8: решетка $L(\mathcal{I})$

Равенство (3.1) доказано.

Равенство (3.2). Ясно, что это равенство эквивалентно следующему утверждению: если u — одно из слов x^3, x^2y или x^2, то многообразие $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $u=0$ тогда и только тогда, когда этому тождеству удовлетворяет $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{Y}$. Нам достаточно проверить, что если тождество $u=0$ выполнено в $(\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}$, то оно выполнено и в $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}$, поскольку обратное утверждение очевидно. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

Случай 1: $u\equiv x^n$, где $n\in\{2,3\}$. Тождество

$$x^n = 0 \tag{3.3}$$

выполнено в многообразии $(\mathcal{Z}\wedge\mathcal{X})\vee\mathcal{Y}$. Это значит, что оно выполнено в $\mathcal{Y}$ и существует вывод тождества этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{X}$. В частности, существует слово v такое, что $v\not\equiv x^n$ и $x^n=v$ выполнено либо в $\mathcal{Z}$, либо $\mathcal{X}$. Если $x^n=v$ в $\mathcal{X}$, то согласно пп. (i) и (ii) леммы 1.7, в $\mathcal{X}$ выполнено тождество (3.3). А значит, это тождество выполнено и в $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\wedge\mathcal{X}$. Пусть теперь $x^n=v$ в $\mathcal{Z}$. Случай, когда v является полугрупповым словом, может быть рассмотрен аналогично случаю 1 в доказательстве необходимости в теореме 2 работы [75]. Пусть теперь v не является полугрупповым словом. Согласно лемме 1.4, тождество $v=0$ выполнено в $\mathcal{X}$, а значит и в $\mathcal{Y}$. Но тогда $x^n = 0 = v$ в $\mathcal{Y}$. Ясно, что $x^n = v$ в $\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}$. Значит, последовательность x^n, v, 0 является выводом тождества (3.3) из тождеств многообразий $\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$. Следовательно, тождество (3.3) выполнено в многообразии $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{X}$.

Случай 2: $u \equiv x^2y$. Необходимо показать, что тождество (0.8) выполнено в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{X}$. Положим

$$W = \{x^2y, xyx, yx^2, y^2x, yxy, xy^2\}.$$

Многообразие $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{X}$ коммутативно. Это значит, что достаточно проверить, что в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{X}$ выполнено тождество вида $w = 0$ для некоторого $w \in W$. Согласно предположению, тождество (0.8) выполнено в $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{X}) \vee \mathcal{Y}$. Это значит, что тождество (0.8) выполнено в $\mathcal{Y}$ и существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$. Пусть $x^2y \equiv u_0, u_1, \dots, u_n, 0$ — этот вывод. В случае, когда $u_n \in W$, доказательство дословно повторяет соответствующую часть доказательства необходимости в теореме 2 статьи [75].

Пусть теперь $u_n \notin W$. Поскольку $u_0 \in W$, то существует индекс $i > 0$ такой, что $u_{i-1} \in W$, а $u_i \notin W$. Тождество $u_{i-1} = u_i$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{Z}$ или $\mathcal{X}$. Если оно выполнено в $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $u_{i-1} = 0$ (в случае, когда u_i — полугрупповое слово, это следует из леммы 2.5 работы [75], в противном случае — из леммы 1.4). Таким образом, тождество $u_{i-1} = 0$ выполнено в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{X}$. Поскольку $u_{i-1} \in W$, это завершает доказательство.

Предположим теперь, что тождество $u_{i-1} = u_i$ выполнено в $\mathcal{Z}$. Если u_i — полугрупповое слово, то мы можем завершить доказательство дословным повторением соответствующей части доказательства необходимости в теореме 2 статьи [75]. Предположим, что u_i не является полугрупповым словом. Согласно лемме 1.4, $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $u_i = 0$. Таким образом, $u_{i-1} = u_i$ в $\mathcal{Y}$, а значит и в $\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}$. Согласно лемме 1.4, тождество $u_i = 0$ выполнено в $\mathcal{X}$. Это значит, что $u_{i-1}, u_i, 0$ — вывод тождества $u_{i-1} = 0$ из тождеств многообразий $\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$. Таким образом, тождество $u_{i-1} = 0$ выполнено в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{X}$.

Предложение 3.1 доказано. $\square$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 7.

Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — строго перестановочное верхнемодулярное многообразие эпигрупп. Согласно следствию 1.3, $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $m \geq 0$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает, что $\mathcal{N}$ коммутативно и удовлетворяет тождеству (0.7). Отметим, что $\mathcal{C}_m$ содержит нильмногообразие $\mathcal{D}_m$, которое не удовлетворяет тождеству (0.7) при $m \geq 3$. Значит $m \leq 2$. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (0.8), то справедливо утверждение (ii) теоремы 7. Предположим теперь, что тождество (0.8) не выполнено в $\mathcal{N}$. Согласно [15, лемма 7], $\mathcal{N}$ содержит многообразие $\mathcal{J}$. Необходимо проверить, что $\mathcal{G} = \mathcal{T}$ и $m \leq 1$. Предположим, напротив, что либо $\mathcal{G} \neq \mathcal{T}$, либо $m \geq 2$. В этом случае $\mathcal{V}$ содержит многообразие вида $\mathcal{X} \vee \mathcal{J}$, где $\mathcal{X}$ — либо нетривиальное многообразие абелевых групп, либо $\mathcal{C}_2$. Учитывая лемму 1.9, получаем, что в любом случае многообразие $\mathcal{M}$ порождается эпигруппой с единицей. Предположим, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству (0.7). Подставляя 1 вместо y в это тождество, получим, что $x^2 = x$ в $\mathcal{X}$. Но это тождество не выполнено ни в нетривиальном многообразии групп, ни в многообразии $\mathcal{C}_2$. Согласно [15, лемма 8], отсюда вытекает, что тождество (0.7) не выполнено ни в какой нильполугруппе в $\mathcal{X} \vee \mathcal{J}$, что противоречит лемме 3.2.

Достаточность. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (i) теоремы 7, то верхняя модулярность $\mathcal{V}$ следует из предложения 3.1 и леммы 1.15. Предположим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (ii). Другими словами, $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ — коммутативное многообразие эпигрупп, удовлетворяющее тождеству (0.8). Пусть $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$. Покажем, что для произвольного многообразия эпигрупп $\mathcal{Z}$ справедливо равенство

$$(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{V} = (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}.$$

В силу леммы 1.9, $\mathcal{C}_m = \operatorname{var} C_m^1$. Как уже было отмечено в доказательстве леммы 1.10, для произвольного многообразия эпигрупп $\mathcal{X}$ множество $\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid C_k^1 \in \mathcal{X}\}$ имеет наибольший элемент. Обозначим его через $m(\mathcal{X})$ и положим $C(\mathcal{X}) = \mathcal{C}_{m(\mathcal{X})}$. Ясно, что многообразия $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{Y}$ и $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}$ коммутативны. Согласно предложению 1.2 и лемме 1.10, достаточно проверить справедливость следующих трех равенств:

$$\operatorname{Gr}\big((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{V}\big) = \operatorname{Gr}\big((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\big), \tag{3.4}$$

$$C\big((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{Y}\big) = C\big((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\big), \tag{3.5}$$

$$\operatorname{Nil}\big((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{Y}\big) = \operatorname{Nil}\big((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\big). \tag{3.6}$$

Равенство (3.4). Если $\mathcal{G}$ — периодическое многообразие групп, обозначим через $\exp(\mathcal{G})$ *экспоненту* $\mathcal{G}$, т. е. наименьшее число n такое, что $\mathcal{G}$ удовлетворяет тождеству $x = x^{n+1}$. Для непериодического многообразия групп $\mathcal{G}$ положим $\exp(\mathcal{G}) = \infty$. Как обычно, через НОК$\{m, n\}$ [соответственно НОД$\{m, n\}$] обозначим наименьшее общее кратное [наибольший общий делитель] чисел m и n. Для простоты обозначений, будем подразумевать, что ∞ делится на любое натуральное число. В частности, НОД$\{n, \infty\} = n$ и НОК$\{n, \infty\} = \infty$ для произвольного натурального n. Будем подразумевать также, что НОД$\{\infty, \infty\} =$ НОК$\{\infty, \infty\} = \infty$. Положим

$$\mathcal{G}_1 = \operatorname{Gr}((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{V}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_2 = \operatorname{Gr}((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}).$$

Поскольку $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{V}$, то $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ — многообразия абелевых групп. Для доказательства равенства (3.4) достаточно показать, что $\exp(\mathcal{G}_1) = \exp(\mathcal{G}_2)$.

Это утверждение проверяется аналогично соответствующей части доказательства теоремы 1.2 в [71].

Равенство (3.5). Очевидно, что при $m \geq 3$ тождество (0.8) не выполнено в многообразии $\mathrm{Nil}(\mathcal{C}_m) = \mathcal{D}_m$. Это означает, что каждая часть равенства (3.5) совпадает с многообразием $\mathcal{C}_k$ для некоторого $0 \leq k \leq 2$. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично доказательству равенства (4.2) в [71].

Равенство (3.6). Многообразия $\mathcal{G}, \mathcal{C}_2$ и $\mathcal{N}$ удовлетворяют тождеству $x^2y = \overline{\overline{x}}^2y$. Согласно лемме 1.4, $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$ удовлетворяет тождеству (0.8). Легко заметить (см., например, рис. 8), что для доказательства равенства (3.6) достаточно проверить следующие два утверждения:

(i) $\deg\bigl((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{V}\bigr) = \deg\bigl((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\bigr)$;

(ii) многообразие $\mathrm{Nil}\bigl((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{V}\bigr)$ удовлетворяет тождеству (1.7) тогда и только тогда, когда этому тождеству удовлетворяет многообразие $\mathrm{Nil}\bigl((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\bigr)$.

Утверждение (i) может быть проверено аналогично доказательству равенства (4.3) в [71] с использованием предложения 1.4, следствия 1.5 и следствия 1.6 диссертации вместо предложения 2.11, леммы 2.13 и леммы 2.12 работы [71] соответственно.

Чтобы доказать утверждение (ii) достаточно проверить, что многообразие $\mathrm{Nil}\bigl((\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y}) \wedge \mathcal{V}\bigr)$ удовлетворяет тождеству (1.7), если этому тождеству удовлетворяет многообразие $\mathrm{Nil}\bigl((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\bigr)$ (обратное утверждение очевидно). Предположим, что тождество (1.7) выполнено в $\mathrm{Nil}\bigl((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\bigr)$. Согласно следствию 1.3, многообразие $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}$ есть объединение некоторого многообразия групп, многообразия $\mathcal{C}_m$ для некоторого $m \geq 0$ и многообразия $\mathrm{Nil}\bigl((\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}\bigr)$. Можно считать, что $m \leq 2$, поскольку $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$. Это значит, что многообразие $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $x^2 = \overline{\overline{x}}^2$. В частности, это тождество выполнено в $\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}$. Следовательно, существует вывод тождества $x^2 = \overline{\overline{x}}^2$ из тождеств многообразий $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{V}$. В частности, одно из этих многообразий удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $x^2 = u$. Используя аргументы из доказательства равенства (4.6) в [71], можно показать, что для завершения доказательства нам достаточно проверить, что тождество (1.7) выполнено в одном из многообразий $\mathrm{Nil}(\mathcal{Z})$ и $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$. Этот факт следует из леммы 1.7, если u — полугрупповое слово, и из леммы 1.4 в противном случае.

Теорема 7 доказана. $\square$

Укажем несколько следствий из этой теоремы.

Следствие 3.1. *Периодическое строго перестановочное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетке* **SEM** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ — верхнемодулярный элемент в решетке* **EPI**.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — периодическое строго перестановочное верхнемодулярное в **SEM** многообразие полугрупп. В силу следствия 1.3, $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — периодическое многообразие абелевых групп, $m \geq 0$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Согласно [71, теорема 1.1], если собственное многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ верхнемодулярно в **SEM** и $\mathcal{Y}$ — нильподмногообразие в $\mathcal{X}$, то $\mathcal{Y}$ коммутативно. Таким образом, $\mathcal{N}$ коммутативно. Это значит, что $\mathcal{V}$ также коммутативно. Из [71, теорема 1.2] вытекает теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (i) или (ii) теоремы 7. А значит, многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно.

Достаточность. Предположим, что периодическое строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ верхнемодулярно. Согласно теореме 7, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (i) и (ii) этой теоремы, причем из периодичности многообразия $\mathcal{V}$ вытекает, что многообразие $\mathcal{G}$ из условия (ii) — периодическое. В обоих случаях из [71, теорема 1.2] следует, что $\mathcal{V}$ верхнемодулярно в **SEM**. □

Из теоремы 7 и предложения 1.7 непосредственно вытекает

Следствие 3.2. *Всякое коммутативное многообразие эпигрупп, являющееся модулярным элементом решетки* **EPI**, *является и верхнемодулярным элементом этой решетки.* □

Следствие 3.3. *Если строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *то решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна.*

Доказательство. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (i) теоремы 7, то многообразие $\mathcal{V}$ — периодическое, а значит может быть рассмотрено как многообразие полугрупп. В этом случае требуемое заключение вытекает из описания коммутативных многообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, найденного в [76]. Предположим теперь, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 7. Другими словами, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ коммутативно и удовлетворяет тождеству (1.7). Согласно предложению 1.3, $L(\mathcal{V})$ раскладывается в прямое произведение решеток $L(\mathcal{AG})$ и $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{N})$. Общеизвестно, что решетка $L(\mathcal{AG})$ дистрибутивна. Многообразие $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{N}$ — периодическое, а значит может быть рассмотрено как многообразие полугрупп. Из упомянутого результата работы [76] вытекает, что решетка $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{N})$ дистрибутивна. □

Из теоремы 7 и следствия 1.3 вытекает

Следствие 3.4. *Если строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *то всякое его подмногообразие обладает тем же свойством.* □

3.2. Кодистрибутивные элементы

В этом пункте будет доказана теорема 6. Здесь и в следующем пункте нам понадобится следующее утверждение, которое может быть доказано дословным повторением рассуждений из первого абзаца в § 3 статьи [9].

Лемма 3.3. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *и не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{V}$ — многообразие ступени ≤ 2.* $\square$

Доказательство теоремы 6. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — строго перестановочное кодистрибутивное многообразие эпигрупп. В силу следствия 1.3, $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \geq 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. В силу леммы 3.3, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$, и потому $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. Кроме того, очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2$ содержит нильполугруппы, не являющиеся полугруппами с нулевым умножением. Следовательно, $m \leq 1$, и потому $\mathcal{C}_m$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$.

Достаточность. В силу леммы 1.15, достаточно убедиться в кодистрибутивности произвольного многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$. Хорошо известно, что всякое многообразие эпигрупп либо является периодическим многообразием, либо содержит многообразие $\mathcal{AG}$. Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия эпигрупп. Предположим сначала, что хотя бы одно из этих многообразий содержит $\mathcal{AG}$. Для определенности будем считать, что $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{AG}$. Значит, $\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{AG} \supseteq \mathcal{G}$, откуда

$$\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{G} = \mathcal{G} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае многообразие $\mathcal{G}$ кодистрибутивно. Поэтому далее можно считать, что многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ являются периодическими, а значит, могут рассматриваться как многообразия полугрупп. Теперь мы можем завершить доказательство достаточности, дословно повторяя ту часть доказательства импликации в) $\longrightarrow$ а) теоремы 1.2 работы [9], в которой рассматривается случай, когда многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ периодичны. $\square$

Из [9, теорема 1.2] и теоремы 6 вытекает

Следствие 3.5. *Периодическое строго перестановочное многообразие полугрупп является кодистрибутивным элементом решетки* **SEM** *тогда и только тогда, когда оно является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI**. $\square$

Используя теорему 6 и следствие 1.3, получаем, что справедливо

Следствие 3.6. *Если строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI**, *то всякое его подмногообразие обладает тем же свойством.* $\square$

3.3. Нижнемодулярные элементы

В этом пункте будет доказана теорема 5. Для этого нам понадобятся три утверждения. Первое из них представляет несомненный самостоятельный интерес. Его полугрупповой аналог отмечался еще в [10, следствие 3], а в части, касающейся модулярности 0-приведенных многообразий, он был независимо передоказан (в другой терминологии) в [48, предложение 1.1].

Предложение 3.2. *Всякое* 0*-приведенное многообразие эпигрупп является модулярным и нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие эпигрупп, а ν — отвечающая ему вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F. Конгруэнция ν имеет ровно один неодноэлементный класс (состоящий из тех и только тех слов, которые равны 0 в $\mathcal{N}$). Решетка всех многообразий унарных полугрупп антиизоморфна решетке всех вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F, которая, в свою очередь, вкладывается в решетку эквивалентностей на множестве F. Если отношение эквивалентности на некотором множестве X имеет ровно один неодноэлементный класс, то оно является как модулярным, так и верхнемодулярным элементом в решетке эквивалентностей на X («модулярная» часть этого утверждения проверена в [47, предложение 2.2], а «верхнемодулярная» — в [10, предложение 3]). Таким образом, ν — модулярный и верхнемодулярный элемент в решетке эквивалентностей на множестве F, а значит и в решетке вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F. Учитывая, что понятие модулярного элемента самодвойственно, получаем, что многообразие $\mathcal{N}$ является модулярным и нижнемодулярным элементом в решетке всех многообразий унарных полугрупп, и тем более в ее подрешетке **EPI**. $\square$

Предложение 3.3. *Многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI***, периодично.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — нижнемодулярное многообразие эпигрупп. Обозначим через n индекс многообразия $\mathcal{V}$. Очевидно, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n = \overline{\overline{x^n}}$. Рассмотрим многообразия

$$\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{x^n y^3 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z} = \mathrm{var}\{x^n y^2 x = x^n y^3 x\}.$$

Поскольку $\mathcal{V}$ нижнемодулярно и $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$, имеет место равенство

$$(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y} = (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{V}.$$

Хорошо известно и легко проверяется, что во всякой эпигруппе выполняется тождество

$$\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}\, x. \tag{3.7}$$

Используя этот факт, можно показать, что в многообразии $\mathcal{Z}\wedge\mathcal{Y}$ выполнено тождество $x^ny^2x=\overline{\overline{x^n}}\,y^2x$. В самом деле,

$$\begin{aligned}
x^ny^2x &= x^ny^3x && \text{в } \mathcal{Z}\\
&= \overline{\overline{x^n}}\,y^3x && \text{в } \mathcal{Y}\\
&= \overline{\overline{x^n}}\cdot\overline{x^n}\,x^ny^3x && \text{в силу (3.7)}\\
&= \overline{\overline{x^n}}\cdot\overline{x^n}\,x^ny^2x && \text{в } \mathcal{Z}\\
&= \overline{\overline{x^n}}\,y^2x && \text{в силу (3.7)}\,.
\end{aligned}$$

Следовательно, тождество $x^ny^2x=\overline{\overline{x^n}}\,y^2x$ выполнено в $(\mathcal{Z}\wedge\mathcal{Y})\vee\mathcal{V}$, а значит и в $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{V})\wedge\mathcal{Y}$. Это означает, что существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Z}\vee\mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$. В частности, существует слово v такое, что в одном из многообразий $\mathcal{Z}\vee\mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$ выполнено тождество $x^ny^2x=v$.

Очевидно, что слова x^ny^2x и x^ny^3x не содержат образов друг друга относительно эндоморфизмов полугруппы F. Следовательно, из тождества $x^ny^2x=x^ny^3x$ невозможно вывести никакое тождество вида $x^ny^2x=v$, где v отлично от слов x^ny^2x и x^ny^3x. В частности, никакое тождество такого вида не выполнено в $\mathcal{Z}$. По той же причине из тождества $x^ny^3x=\overline{\overline{x^n}}\,y^3x$ невозможно вывести никакое нетривиальное тождество вида $x^ny^2x=v$. Это значит, что никакое такое тождество не выполняется в $\mathcal{Y}$. Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ непериодично. В частности, оно не удовлетворяет тождеству $x^ny^2x=x^ny^3x$. Следовательно, многообразие $\mathcal{Z}\vee\mathcal{V}$ не удовлетворяют никакому нетривиальному тождеству вида $x^ny^2x=v$, а потому и многообразие $(\mathcal{Z}\vee\mathcal{V})\wedge\mathcal{Y}$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству того же вида, а значит и тождеству $x^ny^2x=\overline{\overline{x^n}}\,y^2x$.

Полученное противоречие завершает доказательство предложения. $\square$

Обозначим через **Per** решетку всех многообразий периодических полугрупп. Ясно, что **Per** является подрешеткой в **EPI**. Формулировка следующего утверждения почти дословно повторяет формулировку леммы 3.1 работы [65]. Однако, нам необходима некоторая модификация терминов, используемых в [65]. А именно, мы будем называть слова u и v *эквивалентными*, если u совпадает с образом слова v относительно некоторого автоморфизма полугруппы F.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *а u, v, s и t — попарно неэквивалентные слова одной и той же длины, зависящие от одних и тех же букв. Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $u=v$ и $s=t$, то оно удовлетворяет также и тождеству $u=s$.*

Доказательство. Согласно предложению 3.3, многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, оно является нижнемодулярным элементом решетки **Per**.

В то же время, дословно повторяя доказательство леммы 3.1 работы [65], можно показать, что если заключение леммы не выполнено, то $\mathcal{V}$ не нижнемодулярно в **Per**. $\square$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 5.

Достаточность непосредственно вытекает из леммы 1.15 и предложения 3.2.

Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — нижнемодулярное многообразие эпигрупп. Согласно предложению 3.3, $\mathcal{V}$ периодично. В [65, предложение 3.3] доказано, что многообразие периодических полугрупп нижнемодулярно в **SEM** тогда и только тогда, когда оно есть объединение одного из многообразий $\mathcal{T}$ или $\mathcal{SL}$ и 0-приведенного многообразия. Дословно повторяя доказательство этого утверждения, но используя предложение 1.2 и лемму 3.4 диссертации вместо лемм 2.6 и 3.1 статьи [65] соответственно, мы можем заключить, что многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ обладает тем же свойством. $\square$

Из теоремы 5, предложения 3.2 и леммы 1.15 вытекает следующий эпигрупповой аналог следствия 1.2 работы [66].

Следствие 3.7. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *является модулярным элементом этой решетки.* $\square$

Из [66, теорема 1.1] и теоремы 5 вытекает

Следствие 3.8. *Периодическое многообразие полугрупп является нижнемодулярным элементом решетки* **SEM** *тогда и только тогда, когда оно является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**. $\square$

3.4. Цепи и антицепи

Напомним, что через $\mathcal{E}_n$ мы обозначаем многообразие всех эпигрупп индекса $\leq n$. В данном пункте мы применим теорему 5 для доказательства следующих двух предложений.

Предложение 3.4. *Для любого натурального* n *интервал* $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ *решетки* **EPI** *содержит цепь, изоморфную цепи вещественных чисел с обычным порядком.*

Предложение 3.5. *Для любого натурального* n *интервал* $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ *решетки* **EPI** *содержит антицепь мощности континуум.*

В работе [46] показано, что существует счетная серия полугрупповых слов, ни одно из которых не содержит образа никакого другого слова из той же серии и образа слова x^2 относительно эндоморфизмов абсолютно свободной полугруппы. Для удобства занумеруем эти слова рациональными числами и обозначим их через Z_α, где α пробегает множество $\mathbb{Q}$. Положим $x_\alpha \equiv h(Z_\alpha)$.

Доказательство предложения 3.4. Пусть n — натуральное, а ξ — вещественное число. Положим

$$C_\xi = \mathrm{var}\{x^{n+1} = x_\alpha^{n-1} Z_\alpha = 0 \mid \alpha \geq \xi\}$$

(если $n = 1$, то x_α^0 — пустое слово) и $\mathcal{D}_\xi = \mathcal{E}_n \vee C_\xi$. Очевидно, что $\mathcal{C}_\xi \subseteq \mathcal{E}_{n+1}$, а $\mathcal{D}_\xi \in [\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — вещественные числа такие, что $\xi_1 < \xi_2$. Ясно, что $\mathcal{C}_{\xi_1} \subseteq \mathcal{C}_{\xi_2}$ и $\mathcal{D}_{\xi_1} \subseteq \mathcal{D}_{\xi_2}$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что $\mathcal{D}_{\xi_1} \neq \mathcal{D}_{\xi_2}$. Предположим, напротив, что $\mathcal{D}_{\xi_1} = \mathcal{D}_{\xi_2}$ (см. рис. 9).

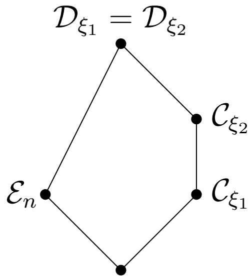

Рис. 9: $\mathcal{D}_{\xi_1} = \mathcal{D}_{\xi_2}$

Отметим, что все многообразия вида $\mathcal{C}_\xi$ являются 0-приведенными. Кроме того, для любого ξ многообразие $\mathcal{E}_n \wedge \mathcal{C}_\xi$ является нильмногообразием индекса $\leq n$. Следовательно, оно удовлетворяет тождеству (3.3). А значит,

$$\mathcal{E}_n \wedge \mathcal{C}_{\xi_2} \subseteq \mathcal{C}_{\xi_1}. \tag{3.8}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\xi_1} &= (\mathcal{E}_n \wedge \mathcal{C}_{\xi_2}) \vee \mathcal{C}_{\xi_1} && \text{в силу (3.8)}\\
&= (\mathcal{E}_n \vee \mathcal{C}_{\xi_1}) \wedge \mathcal{C}_{\xi_2} && \text{согласно теореме 5}\\
&= \mathcal{D}_{\xi_1} \wedge \mathcal{C}_{\xi_2} && \text{по определению } \mathcal{D}_{\xi_1}\\
&= \mathcal{D}_{\xi_2} \wedge \mathcal{C}_{\xi_2} && \text{поскольку } \mathcal{D}_{\xi_1} = \mathcal{D}_{\xi_2}\\
&= \mathcal{C}_{\xi_2} && \text{по определению } \mathcal{D}_{\xi_2}.
\end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{C}_{\xi_1} = \mathcal{C}_{\xi_2}$. Противоречие. □

Доказательство предложения 3.5. Пусть n — натуральное и ξ — вещественное число. Положим

$$\mathcal{A}_\xi = \mathrm{var}\{x^{n+1} = x_\alpha^{n-1} Z_\alpha = 0 \mid \xi - 1 < \alpha < \xi + 1\}$$

и $\mathcal{B}_\xi = \mathcal{E}_n \vee \mathcal{A}_\xi$. Очевидно, что $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{E}_{n+1}$ и $\mathcal{B}_\xi \in [\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — различные вещественные числа. Многообразия $\mathcal{A}_{\xi_1}$ и $\mathcal{A}_{\xi_2}$ несравнимы. Для завершения доказательства достаточно проверить, что $\mathcal{B}_{\xi_1}$ и $\mathcal{B}_{\xi_2}$ также несравнимы. Предположим, напротив, что $\mathcal{B}_{\xi_2} \subseteq \mathcal{B}_{\xi_1}$ (см. рис. 10).

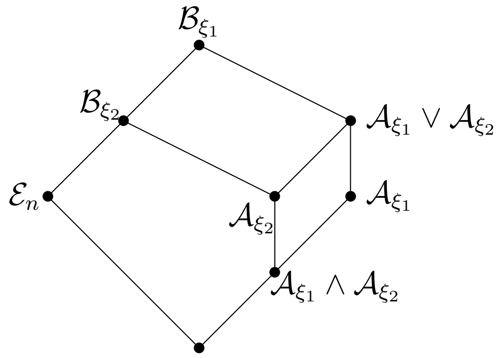

Рис. 10: $\mathcal{B}_{\xi_2} \subseteq \mathcal{B}_{\xi_1}$

Отметим, что все многообразия вида $\mathcal{A}_\xi$ являются 0-приведенными. Кроме того, $\mathcal{E}_n \wedge (\mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2})$ — нильмногообразие индекса $\leq n$. Следовательно, оно удовлетворяет тождеству (3.3). А значит,

$$\mathcal{E}_n \wedge (\mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2}) \subseteq \mathcal{A}_{\xi_1}. \tag{3.9}$$

Поскольку $\mathcal{B}_{\xi_1} \supseteq \mathcal{A}_{\xi_1}$ и $\mathcal{B}_{\xi_1} \supseteq \mathcal{B}_{\xi_2} \supseteq \mathcal{A}_{\xi_2}$, получаем, что

$$\mathcal{B}_{\xi_1} \supseteq \mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2}. \tag{3.10}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\xi_1} &= \big(\mathcal{E}_n \wedge (\mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2})\big) \vee \mathcal{A}_{\xi_1} && \text{в силу (3.9)}\\
&= (\mathcal{E}_n \vee \mathcal{A}_{\xi_1}) \wedge (\mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2}) && \text{согласно теореме 5}\\
&= \mathcal{B}_{\xi_1} \wedge (\mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2}) && \text{по определению } \mathcal{B}_{\xi_1}\\
&= \mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2} && \text{в силу (3.10).}
\end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{A}_{\xi_1} = \mathcal{A}_{\xi_1} \vee \mathcal{A}_{\xi_2}$, а значит $\mathcal{A}_{\xi_2} \subseteq \mathcal{A}_{\xi_1}$. Противоречие. □

3.5. Формульные множества многообразий

Этот пункт посвящен еще одному приложению теоремы 5, связанному с формульными множествами многообразий эпигрупп. Ряд глубоких результатов о формульных в **SEM** множествах многообразий полугрупп получен в работе Ежека и Маккензи [48]. В частности, там показано, что множество всех 0-приведенных многообразий полугрупп формульно в **SEM**. Однако в этой работе не приводится явной формулы языка первого порядка, выделяющей это множество. Достаточно простая формула, выделяющая множество всех 0-приведенных многообразий в решетке **SEM**, приведена в [72, теорема 3.3] (см. также [73, раздел 3.5]. Здесь мы покажем, что та же самая формула выделяет множество всех 0-приведенных многообразий и в решетке **EPI**.

Теорема 5 показывает, что многообразие эпигрупп является 0-приведенным тогдаоно нижнемодулярно и не содержит $\mathcal{SL}$. Очевидно, что множество всех нижнемодулярных многообразий формульно. Поэтому для завершения рассуждений достаточно показать, что формульным является многообразие $\mathcal{SL}$ (т. е. множество, состоящее из одного этого многообразия). Общеизвестно, что многообразия $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ являются атомами решетки **SEM** (см., например, § 1 в обзоре [34]), а значит и решетки **EPI**. Согласно предложению 1.5, эти многообразия нейтральны и других нейтральных атомов в решетке **EPI** нет. Многообразие полугрупп будем называть *цепным*, если решетка его подмногообразий является цепью. Ясно, что каждое цепное многообразие периодично, а значит может быть рассмотрено как многообразие полугрупп. Хорошо известно, что $\mathcal{ZM}$ строго содержится в некотором цепном многообразии полугрупп, а $\mathcal{SL}$ — нет (см., например, работу [27], в которой описаны все негрупповые цепные многообразия полугрупп). Объединяя эти рассуждения, можно заключить, что класс Z всех 0-приведенных многообразий может быть определен как класс многообразий эпигрупп со следующими свойствами:

(i) каждый элемент из Z нижнемодулярен;

(ii) если $\mathcal{V} \in Z$ и $\mathcal{V}$ содержит некоторое нейтральное многообразие $\mathcal{A}$, являющееся атомом решетки **EPI**, то $\mathcal{A}$ строго содержится в некотором цепном многообразии.

Очевидно, что свойства (i) и (ii) могут быть записаны в виде формулы языка первого порядка с одной свободной переменной в решеточной сигнатуре. Таким образом, мы показали, что справедливо следующее

Предложение 3.6. *Множество всех* 0*-приведенных многообразий эпигрупп является формульным в решетке* **EPI**. □

3.6. Костандартные элементы

Доказательство теоремы 3. Эквивалентность условий в) и г) и импликация г) $\longrightarrow$ а) вытекает из предложения 1.5, а импликация а) $\longrightarrow$ г) — из того же предложения и следствия 3.7. Импликация в) $\longrightarrow$ б) очевидна. Поэтому достаточно показать импликацию б) $\longrightarrow$ г). В самом деле, пусть $\mathcal{V}$ — костандартное многообразие эпигрупп. Тогда $\mathcal{V}$ модулярно. В силу предложения 1.6, отсюда вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. В частности, $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Из того, что многообразие $\mathcal{V}$ костандартно, вытекает, что оно кодистрибутивно. Применяя лемму 3.3, получаем, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$, т. е. $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. □

Из [9, теорема 1.3] и теоремы 3 вытекает

Следствие 3.9. *Для периодического многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ — *костандартный элемент решетки* **EPI**;

б) $\mathcal{V}$ — *нейтральный элемент решетки* **EPI**;

в) $\mathcal{V}$ — *костандартный элемент решетки* **SEM**;

г) $\mathcal{V}$ — *нейтральный элемент решетки* **SEM**. □

3.7. Дистрибутивные и стандартные элементы

Доказательство теоремы 4. Импликация б) $\longrightarrow$ а) этой теоремы очевидна. Поэтому достаточно доказать импликации а) $\longrightarrow$ в), в) $\longrightarrow$ а) и а) $\longrightarrow$ б).

1°. Импликация а) $\longrightarrow$ в). Обозначим через F_m абсолютно свободную унарную полугруппу над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Нам понадобится следующее утверждение, справедливость которого немедленно вытекает из доказательства леммы 5.1 работы [14].

Лемма 3.5. *Пусть u и v — полугрупповые слова из F_m такие, что тождество $u = v$ неуравновешенно и ни одно из слов u и v не содержит образ другого относительно некоторого эндоморфизма абсолютно свободной полугруппы, а σ — произвольная перестановка из S_m. Если многообразие $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{u = v\}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $\sigma(u) = w$, где w — полугрупповое слово, то $w \equiv \sigma(v)$.* □

Отметим, что если тождество $u = v$ уравновешенно, то класс всех эпигрупп, удовлетворяющих этому тождеству, не является многообразием эпигрупп (см. лемму 1.1). Именно этим объясняется требование о неуравновешенности тождества $u = v$ в формулировке леммы 3.5.

Следующее утверждение является «эпигрупповым аналогом» леммы 5.2 работы [14].

Лемма 3.6. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, являющееся дистрибутивным элементом решетки* **EPI**, *а u и v — полугрупповые слова такие, что $c(u) = c(v)$ и выполнено одно из следующих условий:*

(i) *ни одно из слов u и v не содержит образа другого слова относительно некоторого эндоморфизма абсолютно свободной полугруппы;*

(ii) $\ell(u) = \ell(v)$.

Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, то оно удовлетворяет и тождеству $v = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $u, v \in F_m$ для некоторого натурального m. Предположим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.

(i) Если $m = 1$, то $u \equiv x^q$ и $v \equiv x^r$ для некоторых q и r. Но тогда одно из слов u и v содержит образ другого, что противоречит условию. Следовательно, $m > 1$, и потому группа S_m содержит нетривиальную перестановку α. Положим $w \equiv \alpha(u)$. Тогда в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $w = 0$, а значит и тождество $u = w$. Если тождество $u = v$ неуравновешенно, то доказательство можно завершить дословным повторением соответствующей части доказательства леммы 5.2(i) работы [14]. Поэтому далее можно считать, что тождество $u = v$ уравновешенно. Пусть x — буква, не входящая в слово u. Тогда тождества $xu = v$ и $v = xw$ не уравновешенны. В силу леммы 1.1, мы можем рассмотреть многообразия $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{xu = v\}$ и $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\{v = xw\}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно, выполнено равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}).$$

Очевидно, что многообразие $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$ удовлетворяет тождеству $xu = xw$. Следовательно, ему удовлетворяет и многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Это означает, что существует вывод тождества $xu = xw$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, одно из этих многообразий должно удовлетворять нетривиальному тождеству вида $xu = w_1$.

Предположим, что это тождество выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. В частности, оно выполнено в $\mathcal{Y}$. Применяя лемму 3.5 в случае, когда σ — тривиальная перестановка из S_m, мы получаем, что $w_1 \equiv v$. Поскольку $xu = w_1$ в $\mathcal{V}$, это означает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $v = xu$, а вместе с ним и тождество $v = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда тождество $xu = w_1$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, оно выполнено в $\mathcal{Z}$. Пусть σ — перестановка, действующая на множестве $c(u)$ как перестановка α^{-1} и оставляющая на месте букву $x \notin c(u)$. Применим лемму 3.5 для перестановки σ. В результате мы получаем, что $w_1 \equiv \sigma(v)$. Но тождество $xu = w_1$ выполнено в $\mathcal{V}$. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xu = \sigma(v)$, а вместе с ним и тождествам $\sigma(v) = 0$ и $v = 0$.

(ii) В этом случае доказательство проводится точно так же, как в [14, лемма 5.2(ii)]. $\square$

Завершим доказательство импликации а) $\longrightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное многообразие эпигрупп. Очевидно, что многообразие $\mathcal{V}$ нижнемодулярно. Из теоремы 5 вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие. Лемма 1.15 показывает, что многообразие $\mathcal{N}$ дистрибутивно. В силу своей 0-приведенности, это многообразие удовлетворяет тождеству $u = 0$ для некоторого слова u. Поскольку многообразие $\mathcal{N}$ периодично, его можно рассматривать как многообразие полугрупп.

Следовательно, оно может быть задано только полугрупповыми тождествами. Это позволяет считать, что слово u — полугрупповое. Кроме того, можно считать, что $c(u) = \{x, y\}$. В самом деле, если u зависит от одной буквы, то можно подставить вместо этой буквы слово xy, если u зависит от двух или более букв — приравнять одну из них к x, а все остальные — к y. Дословно повторяя соответствующую часть рассуждений из доказательства предложения 3.2 работы [14], но ссылаясь при этом на леммы 3.5 и 3.6 диссертации вместо лемм 5.1 и 5.2 работы [14] соответственно, можно показать, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = c(u)$ и $\ell(v) \geq 3$. В частности, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (0.1). Таким образом, $\mathcal{N}$ — 0-приведенное подмногообразие многообразия $\mathcal{Q}$. Если $\mathcal{N} = \mathcal{Q}$, то доказывать нечего. Пусть теперь $\mathcal{N} \subset \mathcal{Q}$. Тогда $\mathcal{N}$ задается внутри $\mathcal{Q}$ некоторым набором 0-приведенных тождеств. В силу леммы 1.4, всякое не полугрупповое слово равно нулю в $\mathcal{Q}$. Очевидно, что всякое полугрупповое нелинейное слово, отличное от x^2, также равно нулю в $\mathcal{Q}$. Следовательно, $\mathcal{N}$ задается внутри $\mathcal{Q}$ либо тождеством (1.7), либо тождеством (1.4) для некоторого n, либо совокупностью этих двух тождеств. Таким образом, $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$. Импликация а) $\longrightarrow$ в) доказана.

2°. Импликация в) $\longrightarrow$ а). Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$. Требуется доказать, что многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно. Лемма 1.15 показывает, что достаточно убедиться в том, что тем же свойством обладает многообразие $\mathcal{N}$. Иными словами, далее можно считать, что $\mathcal{V}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$. Таким образом, $\mathcal{V}$ — 0-приведенное многообразие, удовлетворяющее тождествам (0.1). В частности, многообразие $\mathcal{V}$ периодично и потому может рассматриваться как многообразие полугрупп.

Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия эпигрупп. Требуется доказать, что $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Для этого достаточно установить, что

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}),$$

поскольку противоположное включение очевидно. Иными словами, требуется проверить, что произвольное тождество, выполненное в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$, выполнено и в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. В [14, лемма 2.2] показано, что если a — нейтральный атом решетки L, $x, y, z \in L$, $y' = y \vee a$, $z' = z \vee a$ и $x \vee (y' \wedge z') = (x \vee y') \wedge (x \vee z')$, то $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. В сочетании с предложением 1.5, это позволяет всюду далее считать, что $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$.

Пусть тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. Тогда оно выполнено в $\mathcal{V}$ и существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Предположим, что последовательность слов

$$u \equiv w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k \equiv v \qquad (3.11)$$

является кратчайшим выводом такого рода. Поскольку $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$, из леммы 1.6(ii) вытекает, что $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$.

Будем вести доказательство индукцией по длине вывода (3.11). База индукции очевидна: если $k = 1$, то тождество $u = v$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$, а значит и в их пересечении. Пусть теперь $k > 1$. Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{V}$. Поскольку это многообразие является 0-приведенным, в $\mathcal{V}$ выполнены и тождества $u = v = 0$. Случай, когда $w_i = 0$ в $\mathcal{V}$ для некоторого $0 < i < k$, разбирается точно так же, как в доказательстве предложения 3.3 в работе [14]. Поэтому далее можно считать, что каждое из слов $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ является полугрупповым и либо линейно, либо совпадает со словом x^2.

Предположим, что $w_i \equiv x^2$ для некоторого $0 < i < k$. Из того, что (3.11) — кратчайший вывод тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, вытекает, что слова $w_0, w_1, \ldots, w_k$ попарно различны. С другой стороны, $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k) = \{x\}$. Следовательно, каждое из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $x^m = x^n$, и потому эти многообразияя периодичны. Следовательно, их можно рассматривать как многообразия полугрупп. Это позволяет завершить рассмотрения, повторив соответствующую часть доказательства предложения 3.3 работы [14].

Осталось рассмотреть случай, когда слова $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ линейны. При этом можно считать, что слова u и v не линейны. В самом деле, если хотя бы одно из слов u и v линейно, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2 \cdots x_m = 0$. Но тогда $u = w_1 = \cdots = w_{k-1} = v = 0$ в $\mathcal{V}$, и (3.11) является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. Без ограничения общности будем считать также, что тождество $u = w_1$ выполнено в многообразии $\mathcal{Y}$, а значит тождество $w_1 = w_2$ выполнено в многообразии $\mathcal{Z}$. Можно считать, что $w_1 \equiv x_1x_2 \cdots x_m$. Дальнейшие рассуждения распадаются на три случая в зависимости от значения k.

Случай 1: $k = 2$. Вывод (3.11) имеет в этом случае вид $u \to w_1 \to v$, причем $u = w_1$ в $\mathcal{Y}$ и $w_1 = v$ в $\mathcal{Z}$. Поскольку слова u и v нелинейны, то, согласно лемме 1.8, многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ периодичны, и потому их можно рассматривать как многообразия полугрупп. Это позволяет завершить рассмотрение данного случая, повторив рассуждения, проведенные при рассмотрении случая 1 в доказательстве предложения 3.3 работы [14].

Случай 2: $k = 3$. В этом случае вывод (3.11) имеет вид $u \to w_1 \to w_2 \to v$, причем тождества $u = w_1$ и $w_2 = v$ выполнены в $\mathcal{Y}$. Поскольку слова u и v нелинейны, то, согласно лемме 1.8, многообразие $\mathcal{Y}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. В этом многообразии выполнено тождество $x_1x_2 \cdots x_m = u$ и $\ell(u) > m$. Отсюда легко вытекает, что $\deg(\mathcal{Y}) \le m$ (см. [25, лемма 1]). В силу [71, предложение 2.11], получаем, что многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству вида

$$x_1x_2 \cdots x_m = x_1x_2 \cdots x_{i-1}(x_i \cdots x_j)^t x_{j+1} \cdots x_m$$

для некоторого $t > 1$ и некоторых $0 \le i \le j \le m$. Это позволяет завершить рассмотрение случая 2 аналогично тому, как это сделано при рассмотрении случая 2 в доказательстве предложения 3.3 работы [14].

Случай 3: $k > 3$. Этот случай разбирается точно так же, как случай 3 в доказательстве предложения 3.3 работы [14].

Импликация в) $\longrightarrow$ а) доказана.

3°. Импликация а) $\longrightarrow$ б). Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное многообразие. В силу уже доказанной импликации а) $\longrightarrow$ в), $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие. Лемма 1.15 показывает, что многообразие $\mathcal{N}$ дистрибутивно. В силу этой же леммы достаточно убедиться в стандартности $\mathcal{N}$. Как показано в [42, лемма II.1.1], если элемент произвольной решетки дистрибутивен и модулярен, то он стандартен. Поэтому требуемое утверждение вытекает из предложения 3.2.

Теорема 4 доказана. $\square$

Из [14, теорема 1.1] и теоремы 4 вытекает

Следствие 3.10. *Для периодического многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ — *дистрибутивный элемент решетки* **EPI**;

б) $\mathcal{V}$ — *стандартный элемент решетки* **EPI**;

в) $\mathcal{V}$ — *дистрибутивный элемент решетки* **SEM**;

г) $\mathcal{V}$ — *стандартный элемент решетки* **SEM**. $\square$

Литература

[1] А.Я.Айзенштат, Б.К.Богута. *О решетке многообразий полугрупп* // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. 1979. С. 3–46.

[2] А.Ю.Бахтурин. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

[3] Ю.М.Важенин. *Разрешимость теорий первого порядка классов полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. С. 23–40.

[4] Б.М.Верников. *О многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение* // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. С. 41–52.

[5] Б.М.Верников. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2002. № 22(4). С. 16–42.

[6] Б.М.Верников. Тождества и квазитождества в решетках многообразий полугрупп и связанные с ними конгруэнции. Дисс. …д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург: Урал. гос. ун-т, 2004.

[7] Б.М.Верников. *Квазитождества в модулярных решетках многообразий полугрупп* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2005. № 38(8). С. 5–35.

[8] Б.М.Верников. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, № 7. С. 43–51.

[9] Б.М.Верников. *Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 13–21.

[10] Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. С. 53–65.

[11] Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп.* II // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 1998. № 10(1). С. 13–33.

[12] Б.М.Верников, М.В.Волков. *Строение решеток многообразий нильполугрупп* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2000. № 18(3). С. 34–52.

[13] Б.М.Верников, М.В.Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2004. № 30(6). С. 5–36.

[14] Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 303–330.

[15] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 6. С. 51–60.

[16] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* II // Изв. вузов. Матем. 1992. № 7. С. 3–8.

[17] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* III // Изв. вузов. Матем. 1992. № 8. С. 21–29.

[18] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Докл. Акад. наук. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.

[19] М.В.Волков. Тождества в решетках многообразий полугрупп. Дисс. …д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург: Урал. гос. ун-т, 1994.

[20] М.В.Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2002. № 22(4). С. 43–61.

[21] М.В.Волков, В.Ю.Шапрынский. *Решетка многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом* // Алгебра и математич. логика: Матер. междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. проф. В.В.Морозова, и молодежн. школы-конф. «Соврем. проблемы алгебры и математич. логики». Казань, 2011. С. 67–68.

[22] Э.А.Голубов, М.В.Сапир. *Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1982. № 11. С. 21–29.

[23] А.Клиффорд, Г.Престон. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972.

[24] Х.Нейман. Многообразия групп. М.: Мир, 1970.

[25] М.В.Сапир, Е.В.Суханов. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1981. № 4. С. 48–55.

[26] Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп. Под ред. Л.Н.Шеврина. 2-е изд. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979.

[27] Е.В.Суханов. *Почти линейные многообразия полугрупп* // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 4. С. 469–476.

[28] Д.Хобби, Р.Маккензи. Строение конечных алгебр. М.: Мир, 1993.

[29] В.Ю.Шапрынский. *Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 67–79.

[30] В.Ю.Шапрынский. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 282–286.

[31] В.Ю.Шапрынский. Специальные элементы решеток многообразий полугрупп. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: Урал. фед. ун-т, 2015.

[32] Л.Н.Шеврин. *Полугруппы* // Гл. IV в кн. «Общая алгебра». Т. 2. М.: Наука, 1991. С. 11–191.

[33] Л.Н.Шеврин. *К теории эпигрупп.* I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.

[34] Л.Н.Шеврин, Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2009. № 3. С. 3–36.

[35] Л.Н.Шеврин, М.В.Волков. *Тождества полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1985. № 11. С. 3–47.

[36] Л.Н.Шеврин, А.Я.Овсянников. Полугруппы и их подполугрупповые решетки. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та. Ч. 1, 1990; Ч. 2, 1991.

[37] Л.Н.Шеврин, Е.В.Суханов. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 6. С. 3–39.

[38] K.A.Baker. *Equational classes of modular lattices* // Pacific J. Math. 1969. Vol. 28, № 1. P. 9–15.

[39] P.Crawley, R.P.Dilworth. Algebraic Lattice Theory. N.Y.: Prentice-Hall, 1973.

[40] T.Evans. *The lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.

[41] G.Grätzer. Lattice Theory: Foundation. Birkhäuser, Springer Basel AG, 2011.

[42] G. Grätzer, E.T.Schmidt. *Standard ideals in lattices* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1961. Vol. 12, № 1. P. 17-–86.

[43] S.V.Gusev, B.M.Vernikov. *Endomorphisms of the lattice of epigroup varieties* // Электрон. ресурс. http://arxiv.org/pdf/1404.0478v4. [P. 1–22.]

[44] T.J.Head. *The varieties of commutative monoids* // Niew Arch. Wiskunde. Ser. III. 1968. Vol. 16, № 3. P. 203–206.

[45] J.Jezek. *Primitive classes of algebras with unary and nullary operations* // Colloq. Math. 1969. Vol. 20, № 2. P. 159–179.

[46] J.Ježek. *Intervals in lattices of varieties* // Algebra Universalis. 1976. Vol. 6, № 2. P. 147–158.

[47] J.Ježek. *The lattice of equational theories. Part* I: *modular elements* // Czechosl. Math. J. 1981. Vol. 31, № 1. P. 127–152.

[48] J.Jezek, R.N.McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. 1993. Vol. 46, № 1. P. 199–245.

[49] P.Jipsen, H.Rose. Varieties of Lattices. (Lect. Notes Math. Vol. 1533.) Berlin: Springer, 1992.

[50] J.Kalicki, D.Scott. *Equationally completeness in abstract algebras* // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. 1955. Vol. 58, № 17. P. 650–659.

[51] O.G.Kharlampovich, M.V.Sapir. *Algorithmic problems in varieties* // Int. J. Algebra and Comput. 1995. Vol. 5, № 4–5. P. 379–602.

[52] P.A.Kozhevnikov. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* // Commun. in Algebra. 2012. Vol. 4, № 7. P. 2628–2644.

[53] R.N.McKenzie. *Equational bases for lattice theories* // Math. Scand. 1970. Vol. 27, № 1. P. 24–38.

[54] R.N.McKenzie, G.F.McNulty, W.F.Taylor. Algebras. Lattices. Varieties. Vol. I. Monterey: Wadsworth & Brooks. Cole, 1987.

[55] W.D.Munn. *Pseudo-inverses in semigroups* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1961. Vol. 57, № 2. P. 247–250.

[56] F.J.Pastijn. *The lattice of completely regular semigroup varieties* // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1990. Vol. 49, № 1. P. 24–42.

[57] F.J.Pastijn. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323, № 1. P. 79–92.

[58] F.J.Pastijn. *The idempotents in a periodic semigroup* // Int. J. Algebra and Comput. 1996. Vol. 6, № 5. P. 511–540.

[59] F.J.Pastijn, P.G.Trotter. *Complete congruences on lattices of varieties and of pseudovarieties* // Int. J. Algebra and Comput. 1998. Vol. 8, № 2. P. 171–201.

[60] M.Petrich. Inverse Semigroups. New York: Wiley Interscience, 1984.

[61] M.Petrich, N.R.Reilly. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* // Glasgow Math. J. 1990. Vol. 32, № 2. P. 137–152.

[62] M.Petrich, N.R.Reilly. Completely Regular Semigroups. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[63] R.Schwabauer. *Commutative semigroup laws* // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 22, № 3. P. 591–595.

[64] L.N.Ševrin, L.M.Martynov. *Attainability and solvability for classes of algebras* // Semigroups. Structure and Universal Algebraic Problems. (Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Vol. 39). Amsterdam, 1985. P. 397–459.

[65] V.Yu.Shaprynskiĭ. *Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties* // Semigroup Forum. 2012. Vol. 85, № 1. P. 97–110.

[66] V.Yu.Shaprynskiĭ, B.M.Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* III // Acta Sci. Math. (Szeged). 2010. Vol. 76, № 3–4. P. 371–382.

[67] L.N.Shevrin. *Epigroups* // Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra. Dordrecht: Springer, 2005. P. 331–380.

[68] M.Stern. Semimodular Lattices. Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[69] B.M.Vernikov. *On congruences of G-sets* // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol. 38, № 3. P. 603–613.

[70] B.M.Vernikov. *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. 2007. Vol. 48, № 4. P. 595–606.

[71] B.M.Vernikov. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59, № 3–4. P. 405–428.

[72] B.M.Vernikov. *Proofs of definability of some varieties and sets of varieties of semigroups* // Semigroup Forum. 2012. Vol. 84, № 2. P. 374–392.

[73] B.M.Vernikov. *Special elements in lattices of semigroup varieties* // Acta Sci. Math. (Szeged). 2015. Vol. 81, № 1–2. P. 79–109.

[74] B.M.Vernikov, M.V.Volkov. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups* // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

[75] B.M.Vernikov, M.V.Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Contrib. General Algebra. 2006. Vol. 17. P. 173–190.

[76] M.V.Volkov. *Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices* // Contrib. General Algebra. 1991. Vol. 7. P. 351–359.

[77] M.V.Volkov. *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects* // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, pt. 3. P. 295–316.

[78] M.V.Volkov. *Covers in the lattices of semigroup varieties and pseudovarieties* // Semigroups, Automata and Languages. Singapore: World Scientific, 1996. P. 263–280.

[79] M.V.Volkov. *"Forbidden divisor" characterizations of epigroups with certain properties of group elements* // RIMS Kokyuroku (Algebraic Systems, Formal Languages and Computations). 2000. Vol. 1166. P. 226–234.

[80] M.V.Volkov. *The finite basis problem for finite semigroups* // Sci. Math. Japon. 2001. Vol. 53, № 1. P. 171–199.

[81] M.V.Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. 2005. Vol. 16. P. 275–288.

[82] M.V.Volkov, T.A.Ershova. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // Monash Conf. on Semigroup Theory in Honour of G.B.Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[83] Б.М.Верников, Д.В.Скоков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия эпигрупп*. I // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 31–43.

[84] Д.В.Скоков. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий эпигрупп* // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 723–731.

[85] Д.В.Скоков. *Специальные элементы некоторых типов в решетке многообразий эпигрупп* // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 244–250.

[86] V.Yu.Shaprynskiǐ, D.V.Skokov, B.M.Vernikov. *Special elements of the lattice of epigroup varieties* // Algebra Univ. 2016. Vol. 76, № 1. P. 1–30.

[87] D.V.Skokov, B.M.Vernikov. *Chains and anti-chains in the lattice of epigroup varieties* // Semigroup Forum. 2010. Vol. 80, № 2. P. 341–345.

Другие публикации

[88] Б.М.Верников, М.В.Волков, Д.В.Скоков. *Тождества и полумодулярность в решетках многообразий эпигрупп* // Алгебра и геометрия: Тез. Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящ. 80-летию со дня рожд. А.И.Старостина. Екатеринбург, 2011. С. 40–43.

[89] Б.М.Верников, Д.В.Скоков. *О верхнемодулярных элементах решетки многообразий эпигрупп* // Матер. конф. «Алгебра и математич. логика: теория и прилож.» и сопутствующей молодежн. летней школы «Вычислимость и вычислимые структуры». Казань, 2014. С. 162–163.

[90] Д.В.Скоков. *Кодистрибутивные и костандартные элементы решетки многообразий эпигрупп* // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск, 2014. С. 133.

[91] Д.В.Скоков. *Дистрибутивные и стандартные элементы решетки многообразий эпигрупп* // Междунар. конф. «Мальцевские чтения», посвящ. 75-летию Ю.Л.Ершова: Тез. докл. Новосибирск, 2015. С. 197.

[92] D.V.Skokov. *Lower-modular elements of the lattice of epigroup varieties* // AAA89: Workshop on General Algebra. Dresden, 2015. P. 40–41.

[93] D.V.Skokov. *Special elements of the lattice of epigroup varieties* // Groups and Graphs, Algorithms and Automata: Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor V.A.Belonogov and of the 70th Birthday of Professor V.A.Baransky. Ekaterinburg, 2015. P. 86.