На правах рукописи

Скоков Дмитрий Вячеславович

ТОЖДЕСТВА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2016

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Института математики и компьютерных наук ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», г. Екатеринбург.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Верников Борис Муневич, профессор кафедры алгебры и дискретной математики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», г. Екатеринбург
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Бредихин Дмитрий Александрович, профессор кафедры «Математика и моделирование», ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет им. Ю.А.Гагарина», г. Саратов
	кандидат физико-математических наук, доцент Перминов Евгений Александрович, доцент кафедры физико-математических дисциплин, ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», г. Екатеринбург
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», г. Омск

Защита диссертации состоится ____ ноября 2016 г. в ________ на заседании диссертационного совета Д 004.006.03 на базе ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН» по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан «____» ______ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук И. Н. Белоусов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория многообразий алгебраических систем является одним из основных направлений современной общей алгебры, которое активно развивается на протяжении уже более чем 50 лет. Значительное внимание при этом уделяется изучению многообразий полугрупп. В этой области получено много глубоких и ярких результатов, обсуждению которых посвящен целый ряд обзорных статей — см., например, [13, 14, 16, 26]. В обзоре [14] указаны четыре основных направления теории многообразий полугрупп: тождества, строение полугрупп в многообразиях, относительно свободные полугруппы и решетки многообразий. Наша диссертация относится к последнему из перечисленных направлений.

Изучение решеток многообразий полугрупп начинается с первой половины 1960-х годов, хотя отдельные результаты появлялись и до этого. К настоящему времени число работ, посвященных этой тематике, исчисляется сотнями. Результаты, полученные на начальном этапе развития этой теории, приведены в обзоре [16]. Более близкий к современному состоянию исследований обзор содержится в работе [13].

В теории полугрупп немалое внимание уделяется изучению так называемых *унарных полугрупп*, т. е. полугрупп с дополнительной унарной операцией. Важными примерами унарных полугрупп являются инверсные полугруппы с операцией взятия инверсного элемента и *вполне регулярные* полугруппы (объединения групп) с операцией взятия обратного элемента в максимальной подгруппе, содержащей данный элемент. Изучению инверсных и вполне регулярных полугрупп посвящено большое число работ, включая монографии [22] и [23]. Заметное внимание в этих монографиях уделено многообразиям и, в том числе, решеткам многообразий.

Еще одним важным с рассматриваемой точки зрения классом полугрупп являются эпигруппы. Они являются основным объектом изучения в диссертации, поэтому мы остановимся на них более подробно. *Эпигруппой* называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым* элементом, т. е. лежит в некоторой подгруппе в S. Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя все вполне регулярные, все периодические (в частности, все конечные) и все вполне 0-простые полугруппы.

Эпигруппы естественно рассматривать как унарные полугруппы. Дополнительная унарная операция в них вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы, для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно (см., например, [12, 24]), что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$. Обозначим через $\overline{x}$ элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Этот элемент называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр в указанной сигнатуре.

Легко проверяется, что в любом периодическом многообразии полугрупп операция псевдообращения выражается через умножение (см., например, [12, 24]). Обратно, легко понять, что если класс эпигрупп является полугрупповым многообразием, то он состоит из периодических полугрупп. Это позволяет отождествить периодические многообразия полугрупп с многообразиями эпигрупп состоящими из периодических полугрупп.

Класс всех многообразий эпигрупп образует решетку относительно включения. Мы будем обозначать ее через **EPI**. В силу сказанного выше, эта решетка содержит в себе в качестве подрешетки решетку всех периодических многообразий полугрупп.

Идея рассмотрения эпигрупп в русле теории многообразий впервые была высказана Л.Н.Шевриным в статье [12]. В этой работе, а также в обзоре [24], указаны основные направления изучения многообразий эпигрупп, в качестве одного из которых названо рассмотрение решетки **EPI**. До недавних пор эта решетка была изучена довольно слабо, здесь можно отметить, пожалуй, лишь работы [20, 21, 28]. Данная диссертация является первой попыткой систематического исследования решетки **EPI**.

При постановке задач в этой области кажется естественным опираться на опыт изучения решетки всех многообразий полугрупп. Хорошо известно, что эта решетка не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. В частности, она не модулярна. Естественно возникает задача описания многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий, которая была сформулирована в 1971 г. в обзоре Эванса [16]. В 1979 г. Л.Н.Шеврин поставил в «Свердловской тетради» задачу описания многообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий [10, задача 2.60а].

Проблема Эванса была решена М.В.Волковым в 1992 г. Соответствующий результат был анонсирован в [7], а его доказательству, наряду с решением некоторых смежных задач, посвящены работы [1, 3–6, 8, 29]. Параллельно с решением проблемы Эванса, М.В.Волков значительно продвинулся и в решении проблемы Шеврина об описании многообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Полное решение этой проблемы наталкивается на большие сложности, связанные с групповым случаем: известно, что существует континуум периодических многообразий групп с трехэлементной решеткой подмногообразий [19]. В работах [4–6, 27] М.В.Волкову удалось вплотную приблизиться к решению проблемы Шеврина по модулю групп, а именно, решить ее в указанном смысле за пределами класса многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом.

Помимо условий модулярности и дистрибутивности, естественным кажется и изучение ряда родственных им ограничений на решетку подмногообразий, таких, как дезарговость, полумодулярность вверх или вниз, слабая полумодулярность вверх или вниз (определения соответствующих классов решеток см., например, в [15] или [17]). Полумодулярные решетки играют важную роль в структурной теории решеток и ее приложениях. Им уделяется значительное внимание в монографиях [15] и [17], а монография [25] целиком посвящена этому классу решеток. Что касается тождества дезарговости, то по своей значимости в структурной теории решеток оно стоит в одном ряду с дистрибутивностью и модулярностью (см., например, [17]). В цикле статей [1,3,8] Б.М.Верников и М.В.Волков полностью описали многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых дезаргова, полумодулярна вверх, слабо полумодулярна вверх, полумодулярна вниз или слабо полумодулярна вниз.

Многообразия полугрупп со всеми перечисленными выше ограничениями на решетки подмногообразий оказались периодическими. В силу сказанного выше, результаты о них можно трактовать как результаты о многообразиях периодических эпигрупп. Естественно попытаться рассмотреть аналогичные задачи для непериодических многообразий эпигрупп. Отметим, что центральная в этой области задача описания многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий обсуждалась Л.Н.Шевриным в [12] и в явном виде была сформулирована им в [13] и [24].

Первым из двух направлений исследований в диссертации является изучение многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых дистрибутивна, модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз, слабо полумодулярна вверх или вниз.

После исследования тождеств модулярности и дистрибутивности в решетках подмногообразий многообразий полугрупп следующим шагом стало изучение специальных элементов решетки всех многообразий полугрупп, определение которых связано с этими тождествами. Элемент x решетки L называется *нейтральным*, если

$$(\forall y, z \in L) \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$$

стандартным, если

$$(\forall y, z \in L) \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$

дистрибутивным, если

$$(\forall y, z \in L) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

модулярным, если

$$(\forall y, z \in L) \quad y \leq z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$$

нижнемодулярным, если

$$(\forall y, z \in L) \quad x \leq y \longrightarrow x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y.$$

Кодистрибутивные, *костандартные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно.

Отметим, что в ряде случаев знание того, как устроены специальные элементы какого-либо из перечисленных типов, дает существенную информацию о строении всей решетки в целом. Так, дистрибутивные и кодистрибутивные элементы связаны с гомоморфизмами решетки на ее интервалы, а нейтральные — с ее разложением в подпрямое произведение интервалов. Обширную информацию о специальных элементах различных типов, показывающих естественность и важность их изучения, можно найти, например, в [17] или [25].

На рис. 1 изображено частично упорядоченное множество, образуемое классами определенных выше типов элементов по отношению включения. Почти все связи между этими классами, указанные на рис. 1, очевидны. Единственное исключение составляет тот факт, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен. Но этот факт хорошо известен (см., например, [17, теорема 255]).

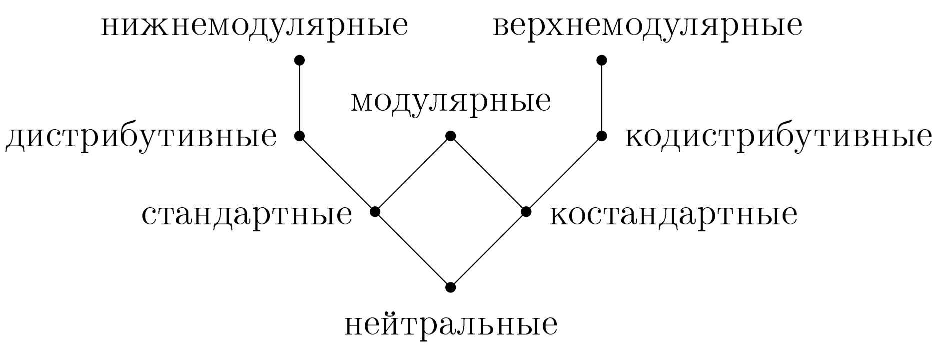

Рис. 1: специальные элементы в абстрактных решетках

На сегодняшний день опубликован целый ряд работ, посвященных изучению специальных элементов решетки всех полугрупповых многообразий. Подробному обсуждению полученных при этом результатов посвящен недавний обзор [26]. Естественно возникает задача переноса этих результатов на многообразия эпигрупп.

Вторым направлением исследований в диссертации является изучение специальных элементов решетки **EPI**.

Целью работы является исследование тождеств, родственных им ограничений (таких, как полумодулярность) и специальных элементов в решетке многообразий эпигрупп.

Методы исследования. В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры и теории решеток.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации были представлены на Международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009, 2014, 2015), Международной конференции по алгебре и геометрии (Екатеринбург, 2011), Международных конференциях по полугруппам и общей алгебре (Потсдам, 2011; Дрезден, 2014), Международной конференции по алгебре и математической логике (Казань, 2014), Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ [30–40]. Из них пять работ опубликованы в журналах из списка ВАК [30–34]. Три работы написаны совместно с Б.М.Верниковым [30, 34, 36], одна — совместно с Б.М.Верниковым и М.В.Волковым [35], одна — совместно с Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским [33]. Результаты статей [30] и [34] и те результаты тезисов [35], которые включены в диссертацию, получены в нераздельном соавторстве с Б.М.Верниковым. В результатах тезисов [36] и тех результатах статьи [33], которые включены в диссертацию, постановка задачи и указание на основные идеи и методы доказательства принадлежат Б.М.Верникову, а само доказательство найдено диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех параграфов и списка литературы. Объем диссертации составляет 66 страниц. Библиографический список содержит 93 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении приводится обзор исследований по проблематике, которой посвящена диссертация, и формулируются ее основные результаты.

В §1 приводятся все необходимые определения, обозначения и предварительные результаты.

В §2 изучаются многообразия эпигрупп, решетка подмногообразий которых дистрибутивна, модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз или слабо полумодулярна вверх или вниз. Для формулировки основных результатов этого параграфа нам необходимо ввести ряд новых определений. Напомним, что многообразие полугрупп называется *многообразием ступени* n, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени $\leq n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. Будем говорить, что многообразие полугрупп имеет *ступень* $> n$, если оно не является многообразием ступени $\leq n$. Изучение многообразий полугрупп со всеми упоминавшимися выше ограничениями на решетку подмногообразий естественным образом распадаются на два случая: многообразия ступени > 2 и ступени ≤ 2. Рассмотрение этих двух случаев основывается на принципиально различных идеях и использует совершенно разную технику. Формулировки результатов в этих двух случаях также несколько отличаются. Подобное разделение оказалось естественным и при изучении многообразий эпигрупп.

Многообразия эпигрупп ступени ≤ 2 с обсуждаемыми ограничениями на решетку подмногообразий изучены Б.М.Верниковым, М.В.Волковым и В.Ю.Шапрынским. Полученные ими результаты, аналогичные по своему характеру соответствующим результатам о многообразиях полугрупп, анонсированы в [9, 35] (соответствующая часть результатов работы [35] не включена в диссертацию).

В диссертации ограничения, о которых идет речь, рассматриваются применительно к многообразиям эпигрупп ступени > 2. При этом мы рассматриваем только непериодические многообразия, поскольку периодический случай, т. е. случай многообразий полугрупп, был изучен ранее Б.М.Верниковым и М.В.Волковым [1, 3–5, 8, 27]. В диссертации доказано, что в указанном классе многообразий все перечисленные условия, кроме дистрибутивности, эквивалентны между собой и эквивалентны тому, что решетка подмногообразий принадлежит многообразию, порожденному 9-элементной решеткой, изображенной на рис. 2 ниже.

Как обычно, через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, а через $\operatorname{var}\Sigma$ — многообразие эпигрупп, заданное системой тождеств Σ. Мы будем придерживаться также обычного соглашения, в соответствии с которым через $w = 0$ обозначается система тождеств вида $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в слово w. Тождества такого вида, а также многообразия, ими задаваемые, называются 0-*приведенными*. Через $\mathcal{AG}$ обозначается многообразие всех абелевых групп, через $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток, а через $\mathcal{T}$ — тривиальное многообразие. Положим $\mathcal{C}_m = \operatorname{var}\{x^m = x^{m+1},\ xy = yx\}$, где m — произвольное натуральное число. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. Для удобства изложения будем также считать, что $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Обозначим через $M_{4,3}$ решетку, изображенную на рис. 2, а через $\mathbf{M}_{4,3}$ — многообразие, порожденное этой решеткой. Отметим, что решетка $M_{4,3}$ дезаргова.

Теорема 1. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх;*

б) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз;*

в) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх;*

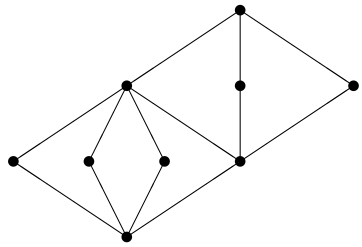

Рис. 2: решетка $M_{4,3}$

г) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вниз;*

д) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *модулярна;*

е) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *дезаргова;*

ж) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$*;*

з) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$*, где* $0 \le m \le 2$*, а многообразие* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0 \tag{1}$$

и $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$*, где* π *— одна из перестановок*

$$(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23); \tag{2}$$

и) *многообразие* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ xyx = xy\,\overline{\overline{x}}\,,\ x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi},$$

где π *— одна из перестановок* (2).

Отметим, что для абстрактных решеток условие принадлежности многообразию $\mathbf{M}_{4,3}$ является намного более сильным, чем дезарговость: известно, что многообразие всех дезарговых решеток имеет континуум подмногообразий, в то время как решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ содержит всего семь элементов

В совокупности с результатами работ [4–6, 9, 29] и не вошедшими в диссертацию результатами работы [35], теорема 1 дает решение проблемы Л.Н.Шеврина об описании многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.

Из теоремы 1 вытекает ряд следствий. Перечислим наиболее интересные из них.

Следствие 2.1. *Для произвольного многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2:*

а) *условия* а), в), д), е) *и* ж) *теоремы* 1 *эквивалентны;*

б) *условия* б) *и* г) *теоремы* 1 *эквивалентны.*

В то же время, условия, указанные в пп. а) и б) следствия 2.1, для периодических многообразий эпигрупп ступени > 2 не эквивалентны (см. [1]).

Следствие 2.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она принадлежит многообразию, порожденному некоторой конечной решеткой.*

Следствие 2.3. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она имеет конечный базис тождеств.*

Кроме того, в §2 диссертации показано, что справедлива следующая

Теорема 2. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны:*

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна;*

б) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где* $0 \leq m \leq 2$, *а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (1) *и* $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$, *где* π — *одна из перестановок*

$$(12), (13), (23), (123); \tag{3}$$

в) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}\,^2y,\ xyx = xy\,\overline{\overline{x}}\,, x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi},$$

где π *— одна из перестановок* (3).

В §3 диссертации, применительно к решетке **EPI**, изучаются шесть из восьми перечисленных выше типов специальных элементов: стандартные, костандартные, дистрибутивные, кодистрибутивные, верхнемодулярные и нижнемодулярные элементы. Элементы двух оставшихся типов (нейтральные и модулярные) рассмотрены Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским в [33].

Перейдем к формулировкам соответствующих результатов. Через $\mathcal{ZM}$ будем обозначать многообразие полугрупп с нулевым умножением.

Теорема 3. *Для многообразия эпигрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ *— верхнемодулярный и нижнемодулярный элемент решетки* **EPI***;*

б) $\mathcal{V}$ *— костандартный элемент решетки* **EPI***;*

в) $\mathcal{V}$ *— нейтральный элемент решетки* **EPI***;*

г) $\mathcal{V}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *,* $\mathcal{SL}$*,* $\mathcal{ZM}$ *и* $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$*.*

Эквивалентность условий в) и г) этой теоремы доказана Б.М.Верниковым и В.Ю.Шапрынским в [33, теорема 1.1]. В диссертации доказывается эквивалентность условий а), б) и г).

Положим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q} = \mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\},\\
&\mathcal{Q}_n = \mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = x_1x_2\cdots x_n = 0\},\\
&\mathcal{R} = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = 0\},\\
&\mathcal{R}_n = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = x_1x_2\cdots x_n = 0\},
\end{aligned}$$

где n — произвольное натуральное число.

Теорема 4. *Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ — дистрибутивный элемент решетки* **EPI**;

б) *$\mathcal{V}$ — стандартный элемент решетки* **EPI**;

в) *$\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_n$.*

Теорема 5. *Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие.*

Теорема 5 позволяет установить связь между нижнемодулярными и модулярными элементами решетки **EPI**. В работах [2] и [18] независимо было доказано, что всякое 0-приведенное многообразие полугрупп является модулярным элементом решетки всех многообразий полугрупп. Предложение 3.2 диссертации устанавливает, что аналогичный факт имеет место и в решетке **EPI**. Отсюда и из теоремы 5 легко выводится

Следствие 3.7. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *является модулярным элементом этой решетки.*

Отметим, что ни одна из пяти других потенциально возможных импликаций между свойствами быть модулярным, нижнемодулярным и верхнемодулярным элементом решетки **EPI** места не имеет. Соответствующие примеры легко извлекаются из результатов диссертации и результатов работы [33], принадлежащих Б.М.Верникову и В.Ю.Шапрынскому.

Теорему 5 удалось применить для изучения некоторых общих свойств решетки **EPI**. Чтобы охарактеризовать соответствующие результаты, нам потребуются некоторые обозначения и определения. Будем говорить, что эпигруппа имеет *индекс n*, если n-я степень любого ее элемента лежит в некоторой ее подгруппе, причем n — наименьшее число с этим свойством. Через $\mathcal{E}_n$ обозначим класс всех эпигрупп индекса $\le n$. Хорошо известно и легко проверяется, что $\mathcal{E}_n$ — многообразие эпигрупп и любое многообразие эпигрупп содержится в $\mathcal{E}_n$ для подходящего n (см., например, [12, предложение 6 и наблюдение 10]). Очевидно, что $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}_{n+1}$ для всякого натурального n. В [12] (см. также [13, 24]) Л.Н.Шевриным сформулирован ряд вопросов об интервалах вида $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ решетки **EPI**. В частности, там спрашивается, каковы решеточные свойства этих интервалов (например, порядковые типы максимальных цепей и мощности антицепей). Как показано в диссертации, из теоремы 5 вытекают следующие два утверждения

Предложение 3.4. *Для любого натурального n интервал $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ решетки* **EPI** *содержит цепь, изоморфную цепи вещественных чисел с обычным порядком.*

Предложение 3.5. *Для любого натурального n интервал $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ решетки* **EPI** *содержит антицепь мощности континуум.*

Прежде, чем сформулировать еще два результата диссертации, сделаем некоторые дополнительные замечания. Хорошо известно, что решетка многообразий групп модулярна, но не дистрибутивна. Следовательно, она содержит подрешетку, изоморфную 5-элементной модулярной недистрибутивной решетке M_3. Обозначим через $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_3$ попарно несравнимые элементы этой подрешетки. Ясно, что многообразия $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_3$ не являются кодистрибутивными элементами решетки **EPI**. Мы видим, что задача описания таких элементов тесно связана с задачей описания многообразий групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Последняя же задача, как уже отмечалось выше, чрезвычайно трудна даже в периодическом случае. Поэтому при рассмотрении кодистрибутивных элементов решетки **EPI** естественно ограничиться такими многообразиями, в которых групповые подмногообразия устроены в том или ином смысле просто. Поскольку, как хорошо известно, решетка многообразий абелевых групп дистрибутивна, представляют интерес такие ограничения на многообразие, которые гарантировали бы абелевость всех его групповых подмногообразий. Естественным ограничением такого рода является перестановочность. Напомним, что многообразие называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет *перестановочному тождеству*, т. е. тождеству вида

$$x_1x_2\cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi}\cdots x_{n\pi},$$

где π — нетривиальная перестановка на множестве $\{1,2,\ldots,n\}$. В диссертации рассматривается чуть более жесткое условие строгой перестановочности. Многообразие называется *строго перестановочным*, если оно удовлетворяет перестановочному тождеству, в котором $1\pi \ne 1$ и $n\pi \ne n$.

Теорема 6. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{X}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

В работе [11] показано, что всякое многообразие полугрупп, являющееся специальным элементом любого из восьми определенных выше типов в решетке всех многообразий полугрупп и отличное от многообразия всех полугрупп, периодично. Теорема 6 показывает, что аналог этого утверждения для многообразий эпигрупп места не имеет, поскольку в силу этой теоремы многообразие $\mathcal{AG}$ кодистрибутивно в **EPI**.

Класс верхнемодулярных элементов произвольной решетки содержит класс ее кодистрибутивных элементов. Поскольку кодистрибутивные элементы решетки **EPI** описаны только в строго перестановочном случае, представляется естественным на данном этапе рассматривать верхнемодулярные элементы этой решетки также только в этом частном случае. Последним основным результатом диссертации является

Теорема 7. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

а) *$\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — коммутативное нильмногообразие эпигрупп, удовлетворяющее тождеству $x^2y = xy^2$;*

б) *$\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ — коммутативное многообразие эпигрупп, удовлетворяющее тождеству $x^2y = 0$.*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Б.М.Верникову за постановки задач, постоянное внимание к его работе, многочисленные полезные обсуждения и большую помощь при подготовке текстов статей и диссертации.

Список литературы

[1] Б.М.Верников. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2002. № 22(4). С. 16–42.

[2] Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. С. 53–65.

[3] Б.М.Верников, М.В.Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2004. № 30(6). С. 5–36.

[4] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 6. С. 51–60.

[5] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* II // Изв. вузов. Матем. 1992. № 7. С. 3–8.

[6] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* III // Изв. вузов. Матем. 1992. № 8. С. 21–29.

[7] М.В.Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Докл. Акад. наук. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.

[8] М.В.Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества* // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. матем., механ. 2002. № 22(4). С. 43–61.

[9] М.В.Волков, В.Ю.Шапрынский. *Решетка многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом* // Алгебра и математич. логика: Матер. междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. проф. В.В.Морозова, и молодежн. школы-конф. «Соврем. проблемы алгебры и математич. логики». Казань, 2011. С. 67–68.

[10] Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп. Под ред. Л.Н.Шеврина. 2-е изд. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979.

[11] В.Ю.Шапрынский. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 282–286.

[12] Л.Н.Шеврин. *К теории эпигрупп.* I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.

[13] Л.Н.Шеврин, Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2009. № 3. С. 3–36.

[14] Л.Н.Шеврин, М.В.Волков. *Тождества полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1985. № 11. С. 3–47.

[15] P.Crawley, R.P.Dilworth. Algebraic Lattice Theory. N.Y.: Prentice-Hall, 1973.

[16] T.Evans. *The lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. 1971. Vol. 2, № 1. P. 1–43.

[17] G.Grätzer. Lattice Theory: Foundation. Birkhäuser, Springer Basel AG, 2011.

[18] J.Jezek, R.N.McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. 1993. Vol. 46, № 1. P. 199–245.

[19] P.A.Kozhevnikov. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* // Commun. in Algebra. 2012. Vol. 4, № 7. P. 2628–2644.

[20] F.J.Pastijn. *The idempotents in a periodic semigroup* // Int. J. Algebra and Comput. 1996. Vol. 6, № 5. P. 511–540.

[21] F.J.Pastijn, P.G.Trotter. *Complete congruences on lattices of varieties and of pseudovarieties* // Int. J. Algebra and Comput. 1998. Vol. 8, № 2. P. 171–201.

[22] M.Petrich. Inverse Semigroups. New York: Wiley Interscience, 1984.

[23] M.Petrich, N.R.Reilly. Completely Regular Semigroups. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[24] L.N.Shevrin. *Epigroups* // Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra. Dordrecht: Springer, 2005. P. 331–380.

[25] M.Stern. Semimodular Lattices. Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[26] B.M.Vernikov. *Special elements in lattices of semigroup varieties* // Acta Sci. Math. (Szeged). 2015. Vol. 81, № 1–2. P. 79–109.

[27] M.V.Volkov. *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects* // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, pt. 3. P. 295–316.

[28] M.V.Volkov. *Covers in the lattices of semigroup varieties and pseudovarieties* // Semigroups, Automata and Languages. Singapore: World Scientific, 1996. P. 263–280.

[29] M.V.Volkov, T.A.Ershova. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // Monash Conf. on Semigroup Theory in Honour of G.B.Preston. Singapore: World Scientific, 1991. P. 306–322.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[30] Б.М.Верников, Д.В.Скоков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия эпигрупп.* I // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 31–43.

[31] Д.В.Скоков. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий эпигрупп* // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 723–731.

[32] Д.В.Скоков. *Специальные элементы некоторых типов в решетке многообразий эпигрупп* // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 244–250.

[33] V.Yu.Shaprynskiǐ, D.V.Skokov, B.M.Vernikov. *Special elements of the lattice of epigroup varieties* // Algebra Univ. 2016. Vol. 76, № 1. P. 1–30.

[34] D.V.Skokov, B.M.Vernikov. *Chains and anti-chains in the lattice of epigroup varieties* // Semigroup Forum. 2010. Vol. 80, № 2. P. 341–345.

Другие публикации

[35] Б.М.Верников, М.В.Волков, Д.В.Скоков. *Тождества и полумодулярность в решетках многообразий эпигрупп* // Алгебра и геометрия: Тез. Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящ. 80-летию со дня рожд. А.И.Старостина. Екатеринбург, 2011. С. 40–43.

[36] Б.М.Верников, Д.В.Скоков. *О верхнемодулярных элементах решетки многообразий эпигрупп* // Матер. конф. «Алгебра и математич. логика: теория и прилож.» и сопутствующей молодежн. летней школы «Вычислимость и вычислимые структуры». Казань, 2014. С. 162–163.

[37] Д.В.Скоков. *Кодистрибутивные и костандартные элементы решетки многообразий эпигрупп* // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск, 2014. С. 133.

[38] Д.В.Скоков. *Дистрибутивные и стандартные элементы решетки многообразий эпигрупп* // Междунар. конф. «Мальцевские чтения», посвящ. 75-летию Ю.Л.Ершова: Тез. докл. Новосибирск, 2015. С. 197.

[39] D.V.Skokov. *Lower-modular elements of the lattice of epigroup varieties* // AAA89: Workshop on General Algebra. Dresden, 2015. P. 40–41.

[40] D.V.Skokov. *Special elements of the lattice of epigroup varieties* // Groups and Graphs, Algorithms and Automata: Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor V.A.Belonogov and of the 70th Birthday of Professor V.A.Baransky. Ekaterinburg, 2015. P. 86.