

С.В. Сизый

**ЛЕКЦИИ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ**

*Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом
по математике и механике учебно-методического объединения
университетов России в качестве учебного пособия
для математических специальностей и направлений
подготовки в университетах*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 514.7
ББК 22.151
С 34

Сизый С. В. **Лекции по дифференциальной геометрии.** — Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 376 с. — ISBN 978-5-9221-0742-6.

Настоящее учебное пособие представляет собой переработанный конспект лекций по курсу «Дифференциальная геометрия» для студентов математико-механического факультета Уральского государственного университета. В пособии представлены два традиционных раздела дифференциальной геометрии — теория кривых и теория поверхностей в аффинных евклидовых пространствах.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом по математике и механике УМО университетов России в качестве учебного пособия для математических специальностей и направлений подготовки в университетах.

Ил. 94. Библиогр. 14 назв.

Учебное издание

СИЗЫЙ Сергей Викторович

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *И.Л. Легостаева*

Оригинал-макет: *И.Г. Андреева*

Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 10.07.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,5. Уч.-изд. л. 23,5. Тираж 1500 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0742-6



9 785922 107426

ISBN 978-5-9221-0742-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© С. В. Сизый, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Благодарности	6
Введение	7
§ 1. Предварительные сведения и договоренности	10
1. Векторные пространства	10
2. Ориентация	15
3. Билинейные и квадратичные формы	19
4. Евклидовы пространства	23
5. Векторные функции скалярного аргумента	32
6. Обобщенное векторное произведение	40
7. Аффинные евклидовы пространства	45

Глава I. Кривые

§ 2. Общие сведения о кривых в аффинных евклидовых пространствах	54
8. Определение гладкой кривой. Регулярность. Длина кривой	54
9. Замена параметра. Эквивалентность кривых	60
10. Кривые единичной скорости	67
§ 3. Плоские кривые. Экскурсия к истокам дифференциальной геометрии	74
11. Линии на плоскости	74
12. Касание плоских кривых. Огибающая	82
13. Репер Френе плоской кривой единичной скорости	91
14. Натуральные уравнения кривой	99
15. Репер Френе и кривизна произвольной регулярной плоской кривой	103
16. Понятие о сферическом отображении — замечательной идее Гаусса	107
17. Локальное строение плоских кривых	112
18. Эволюта и эвольвента	118

§ 4. Общая локальная теория кривых	127
19. Кривые общего вида	127
20. Репер Френе кривой общего вида	131
21. Теорема Френе–Жордана. Уравнения Френе кривой общего вида	136
22. Кривые общего вида в трехмерном пространстве	142
23. Свойства кривизн кривых общего вида	148
24. Основная теорема локальной теории кривых	153
25. Теорема о последней кривизне	158
26. Кривые с постоянными кривизнами	163

Глава II. Поверхности

§ 5. Понятие поверхности	181
27. Дифференциал гладкого отображения	181
28. Определение поверхности. Касательное пространство. Касательное расслоение	195
29. Примеры поверхностей	210
§ 6. Внутренняя геометрия поверхности	226
30. Первая фундаментальная форма	226
31. Длина кривой вдоль поверхности.	236
32. Углы на поверхности	242
33. Объем поверхности	247
34. Замена параметров на поверхности. Изометричность поверхностей.	253
§ 7. Внешняя геометрия гиперповерхностей.	266
35. Нормальное гауссово поле. Дифференциал нормального отображения	266
36. Основной оператор гиперповерхности и вторая фундаментальная форма.	274
37. Матрица основного оператора гиперповерхности. Кривизны и главные направления. Линии кривизны.	284
38. Локальное строение гиперповерхности.	296
39. Нормальная кривизна. Теорема Менье. Теорема Эйлера. Асимптотические линии	303
§ 8. Движение репера вдоль поверхности.	317
40. Производные базисных векторов. Коэффициенты связности	319
41. Уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди	325

42. Тензоры	330
43. Тензоры кривизны Леви-Чивита и Римана. Теорема «egregium» Гаусса	343
44. Ковариантное ускорение. Геодезические	350
45. Вариации кривых на поверхности. Экстремальные свойства геодезических	357
46. Ковариантное дифференцирование	362
Литература, в которую заглядывал автор при написании этой книжки	376

Благодарности

Прежде всего, автор выражает искреннюю признательность и говорит большое спасибо Игорю Олеговичу Корякову — своему старшему коллеге по кафедре алгебры и дискретной математики Уральского гос. университета. Когда автор был еще студентом, именно И. О. Коряков блестяще читал лекции по дифференциальной геометрии на математико-механическом факультете и познакомил автора с основами этой науки. Кроме того, на экзамене по дифференциальной геометрии он, преследуя воспитательные цели и добиваясь отличного знания предмета, поставил автору двойку. Лекции И. О. Корякова оказали существенное влияние на содержание и методику изложения материала в этой книжке.

Автор бесконечно благодарен и говорит огромное спасибо Евгению Витальевичу Суханову — профессору нашей кафедры. Именно он согласился взять на себя тяжелый творческий труд первого прочтения и рецензирования рукописи. Предварительное обсуждение содержания курса и последующие «рабочие» советы, высказанные Е. В. Сухановым, значительно улучшили текст этой книжки.

Автор благодарит свою милую жену Юлию Валерьевну Мокину за любовь и терпение. Она самоотверженно выдержала суровое испытание написанием мужем книги ночами.

Автор благодарит фирму Microsoft за создание великалепной праграмы проверки арфаграфии.

Отдельное спасибо всем разнообразным, обсуждавшим стилистику со мной, особенно редактору.

Кроме того, автор желает выразить благодарность многим и многим людям, которые так или иначе приняли участие в создании этой книжки, и хочет отметить, что все ошибки, недочеты и довольно фривольный стиль дальнейшего текста целиком лежат на совести автора.

Спасибо всем!

Введение

Скалярное произведение — причина геометрии.

Видишь тождество — дифференцируй!

У этой книжки два эпиграфа. Один — руководство к пониманию, другой — руководство к действию. Крепко запомните эти фразы — они служат путеводной нитью на протяжении всего дальнейшего курса лекций.

Дифференциальная геометрия — это богатая и стройная система знаний, являющаяся удивительным конгломератом, объединяющим в себе результаты и методы многих разделов математики. Дифференциальная геометрия — это наука, которая изучает разнообразные пространственные формы (в первую очередь, кривые и поверхности). Она — яркий пример переплетения и эффективного использования абстрактных результатов алгебры, математического анализа, топологии, теории функций.... Дифференциальная геометрия, по сути своей, является мировоззренческой наукой, которая изучает не что иное, как устройство окружающего мира. Ее выводы существенно формируют наши естественнонаучные и общеполитические взгляды на окружающую природу и свойства окружающего нас пространства.

В начале XX в. постепенное развитие дифференциальной геометрии привело к созданию общей теории относительности — стройной системы философских и физических воззрений на окружающую природу. Общая теория относительности А. Эйнштейна, пришедшая на смену ньютоновскому классическому естествознанию, является, в сущности, естественным физическим толкованием и практическим приложением результатов, полученных ранее в дифференциальной геометрии.

Должен признаться вам, что по своей математической специальности я не являюсь специалистом в области дифференциальной геометрии, поэтому весьма вероятно, что некоторые вопросы изложены в этой книжке не так, как это сделал бы ученый, ведущий научные изыскания в этой области.

С другой стороны, нет худа без добра, и мой сторонний взгляд математика-профессионала позволил, в процессе самостоятельного восприятия геометрии, довольно критично относиться к традиционным и закоренелым способам изложения и, в особенности, к старомодной системе обозначений. Порой дело доходило

до возмущения — настолько затрудняют понимание простых и наглядных геометрических вещей словесные штампы и старые обозначения! Традиция же излагать теорию кривых и теорию поверхностей только в трехмерном пространстве (якобы, для «наглядности» и «облегчения первоначального восприятия»), на мой взгляд, только мешает увидеть красивые общие закономерности в устройстве изучаемых объектов. Надеюсь, что в этом курсе лекций мне удалось исправить такую ситуацию. Преподавательская практика показывает, что изучение геометрии в пространствах произвольной размерности (особенно при первоначальном знакомстве с предметом) вызывает у многих студентов трепетное восхищение и гордость за силу человеческого разума! Многомерная геометрия восхищает как звездное небо над головой...

Я не хочу разводить здесь многословную общую болтовню о предмете, которому с любовью посвящаю эту скромную книжку, однако, по традиции, во введениях к книгам всего мира делают несколько предварительных замечаний и информируют читателя об устройстве дальнейшого текста, а, стало быть, и курса дифференциальной геометрии.

Текст настоящей книжки незатейливо разбивается на параграфы, каждый из которых освещает свою тему достаточно полно с точки зрения автора (и, возможно, только автора). Каждый параграф, в свою очередь, разбивается на небольшие пункты. Уважаемые студенты! Ожидаемый мною устный ответ на экзаменационный вопрос — это либо отдельный пункт (если он не очень большой), либо теорема с доказательством (любому студенту это должно быть понятно). Упорядоченность материала внутри каждого параграфа линейная, поэтому книжку рекомендуется читать подряд, а не так, как любил читать один мой однокурсник — сначала четные пункты, потом — нечетные. Однако, если у вас механически-идеальная память, вы можете позволить себе постигать дифференциальную геометрию даже каким-нибудь более идиотским способом.

В тексте настоящих лекций приведено большое количество упражнений. Не гнушайтесь выполнить предлагаемые упражнения, ибо человек начинает уютно чувствовать себя в изучаемом теоретическом материале только после решения нескольких задач. Кроме того, утверждения, содержащиеся в упражнениях, зачастую носят принципиальный характер и очень важны для построения общей картины.

Все обозначения в книжке объясняются каждый раз в момент их появления, поэтому приводить их полный список нет

надобности. Автодорожный знак  , поставленный на полях, дополнительно отмечает те места, на которые автору хочется обратить *особое внимание читателя*. Символ \Updownarrow нигде далее не встречается, а бубновый туз \blacklozenge обычно обозначает конец доказательства или завершение некоторого важного цельного фрагмента текста.

От всего сердца желаю вам крепкого здоровья, хорошего настроения и успехов в изучении удивительного раздела математики — дифференциальной геометрии. Все остальное, что хотел сказать автор, сказано в этой книжке. Читайте!

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ДОГОВОРЕННОСТИ

1. Векторные пространства

Векторное (или линейное) пространство — едва ли не самый популярный математический объект, и не случайно ваше знакомство с ним состоялось уже на первом курсе. Я настоятельно советую вам освежить в памяти основные факты о векторных пространствах, иначе дальше просто ничего не будет понятно. Повторите аксиомы векторного пространства, понятия базиса и размерности, формулы изменения координат вектора при замене базиса, определения пересечения и суммы подпространств, вспомните свойства прямой суммы подпространств. Все пригодится.

А теперь давайте договоримся об обозначениях, которые касаются векторных пространств и встретятся в этой книжке.

Наш основной персонаж — *арифметическое векторное пространство размерности m над полем \mathbf{R} действительных чисел*:

$$\vec{\mathbf{R}}^m = \left\{ \left(\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{array} \right) \middle| x^i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Это пространство состоит из всевозможных *столбцов*, содержащих m штук действительных чисел (т.е. все столбцы «высоты» m). Обратите внимание на стрелочку над буквой \mathbf{R} в обозначении $\vec{\mathbf{R}}^m$. Она напоминает, что речь идет о *векторном пространстве*; обозначение же \mathbf{R}^m (без стрелочки) мы прибережем для m -мерного *аффинного* пространства, которое появится на нашей сцене чуть позже.

Индексы у элементов столбца договоримся всегда ставить справа вверху. Такая манера может ввести некоторых читателей в заблуждение, ибо «икс в кубе» x^3 в написании ничем не отличается от «икс три». Однако удобства, доставляемые такой

манерой, в скором времени перевесят этот маленький недостаток. Поскольку, при этом, место правого верхнего индекса оказывается занятым, договоримся символ транспонирования t ставить слева вверху от транспонируемой матрицы:

$${}^t A.$$

Таким образом, элемент арифметического векторного пространства столбцов запишется так:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = {}^t(x^1, x^2, \dots, x^m),$$


что, конечно, более удобно при письме слева направо. Впрочем, целые народы на земле привыкли писать сверху вниз и у них транспонирование столбца в строку вызывает недоумение.


Единичным базисным вектором в $\vec{\mathbf{R}}^m$ будем называть столбец:

$$e_i = {}^t(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

\uparrow
i-я позиция

содержащий единичку на i -м месте, а все остальные элементы этого столбца — нули. Обратите внимание, что у векторов, в отличие от элементов столбцов, индексы ставим справа внизу. Таким образом, расположение индекса позволяет отличать вектор от числа и, во многих случаях, делает ненужным рисование стрелочки над вектором.

 *Стандартным базисом в $\vec{\mathbf{R}}^m$* будем называть совокупность единичных базисных векторов (e_1, e_2, \dots, e_m) , **взятых именно в этом естественном порядке.**

 Обратите внимание, что базисом (a_1, a_2, \dots, a_m) произвольного векторного пространства мы всегда будем называть **упорядоченную** линейно независимую систему образующих этого пространства, так что, например, (a_1, a_2, \dots, a_m) и (a_2, a_1, \dots, a_m) — суть разные базисы.

Через $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ будем обозначать линейную оболочку векторов a_1, a_2, \dots, a_k , т. е. подпространство, порожденное векторами a_1, a_2, \dots, a_k .

Довольно часто мы будем использовать для записи матриц квадратные скобки. Таким образом, например, запись $[e_1, e_2, \dots, e_m]$ означает *единичную матрицу* порядка m

(столбцы этой матрицы — базисные единичные векторы). Будем обозначать единичную матрицу жирной единицей:

$$[e_1, e_2, \dots, e_m] = \mathbf{1}_m.$$

Запись $[x]$, согласно нашей договоренности, означает столбец, имя которого x . Запись $[a_1, a_2, \dots, a_k]$, где $a_1, a_2, \dots, a_k \in \vec{\mathbf{R}}^m$, означает матрицу размера $(m \times k)$, i -й столбец которой есть $[a_i]$.

Пусть $D : \vec{\mathbf{R}}^m \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ — линейный оператор. Тогда $[D] = [De_1, De_2, \dots, De_m]$ — матрица линейного оператора D в стандартном базисе ¹⁾.

Хорошо известно, что всякий элемент векторного пространства может быть единственным образом разложен по данному базису, т. е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Коэффициенты этой линейной комбинации называются *координатами вектора* в данном базисе. Для стандартного базиса имеем

$$\begin{aligned} x = {}^t(x^1, x^2, \dots, x^m) &= \sum_{i=1}^m x^i e_i = \\ &= (e_1, e_2, \dots, e_m) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots, e_m) [x], \end{aligned}$$

↑
Это умножение строки
на столбец

поэтому в стандартном базисе $x = [x]$ для любого вектора $x \in \vec{\mathbf{R}}^m$.

В начале двадцатого века гениальный Альберт Эйнштейн подметил, что знак суммы $\sum_{i=1}^m$ в выражениях типа $\sum_{i=1}^m x^i e_i$ выполняет исключительно загромождающую функцию ²⁾. Оказывается, благодаря нашей удачной договоренности о расположении индексов, в записи подобных выражений можно спокойно обойтись без символа суммы.

¹⁾ Обратите внимание, что символ линейного оператора пишем слева от вектора.

²⁾ Разумеется, гениальность Эйнштейна обусловлена не только этой наблюдательностью. Мы еще будем иметь честь познакомиться в этой книжке с некоторыми достижениями великого Альберта.



Договоримся, что всякий раз, когда в записи встречаются одинаковые индексы на разных высотах (т. е. и внизу, и вверху), производится суммирование по этим индексам от 1 до m (пределы изменения индексов обычно ясны из контекста). Так, например, в обозначениях Эйнштейна:

$\text{tr}(a_k^j) = a_i^i$ — след матрицы (a_k^j) , т. е. сумма диагональных элементов;

$$\sum_{i=1}^m x^i e_i = x^i e_i; \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{ij} a^i a^j = g_{ij} a^i a^j;$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m R_{ikr}^l g^{ik} s_l = R_{ikr}^l g^{ik} s_l.$$

(В последнем случае тройной суммы результат, естественно, зависит от «свободного», т. е. не участвующего в суммировании, индекса r и не зависит от «связанных»¹⁾ индексов i, l, k . Иначе говоря, этот результат является величиной с одним нижним индексом r .)

Обозначения Эйнштейна мы будем часто использовать в этой книжке, особенно при записи громоздких выражений. Вот простой пример — изменение координат вектора при замене базиса.

Пусть \vec{V} — произвольное векторное пространство размерности m над полем \mathbf{R} ; (a_1, a_2, \dots, a_m) , $(a_{1'}, a_{2'}, \dots, a_{m'})$ — два его каких-нибудь базиса. Довольно распространенная манера ставить штрихи у индексов, а не у самих индексируемых элементов, на первый взгляд может показаться дикой. Однако к этой манере не так уж сложно привыкнуть, а удобства она принесет большие.

Пусть вектор $x \in \vec{V}$ имеет в первом («нештрихованном») базисе координатный столбец ${}^t(x^1, x^2, \dots, x^m)$, а во втором («штрихованном») базисе — координатный столбец ${}^t(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{m'})$. В обозначениях Эйнштейна:

$$x = x^i a_i = x^{i'} a_{i'}.$$

Известные с первого курса формулы замены базиса

$$(a_{1'}, a_{2'}, \dots, a_{m'}) = (a_1, a_2, \dots, a_m) \cdot (\gamma_{i'}^i),$$

в обозначениях Эйнштейна выглядят совсем несложно:

$$a_{i'} = \gamma_{i'}^i a_i,$$

¹⁾ Пары одинаковых индексов, стоящих на разных высотах, часто называют еще «немыми индексами».

где $(\gamma_{i'}^i)$ — матрица перехода от нештрихованного базиса (a_1, a_2, \dots, a_m) к штрихованному базису $(a_{1'}, a_{2'}, \dots, a_{m'})$. Верхний индекс у элемента $\gamma_{i'}^i$ означает номер строки, нижний — номер столбца; k -й столбец этой матрицы есть координаты вектора $a_{k'}$ в нештрихованном базисе.¹⁾

Формулы замены координат в обозначениях Эйнштейна также никого не испугают своим внешним видом:

$$x^{i'} = \tau_i^{i'} x^i,$$

где $(\tau_i^{i'}) = t(\gamma_{i'}^i)^{-1}$ — матрица преобразования координат вектора при замене базиса, т.е. матрица, обратная к транспонированной матрице перехода. Матрицу, обратную к транспонированной (или, что то же самое, транспонированную к обратной) иногда называют *контраградиентной* к исходной.



Почувствуйте разницу! При замене базиса строка преобразуется умножением на матрицу перехода справа, а столбец — умножением на обратную матрицу слева! Именно поэтому говорят — строки преобразуются *ковариантно* (т.е. согласованно с изменением), а столбцы — *контравариантно* (т.е. против изменения, ибо обратная матрица есть матрица обратного перехода).

Задачи и упражнения



1. Привыкаем к обозначениям Эйнштейна. Пусть

$$(g_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } (h_i^j) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

— две квадратные матрицы. Объясните, что такое $(g_i^k h_k^j)$ и $(g_k^j h_i^k)$? Вычислите их и расскажите соседу, чем эти объекты отличаются друг от друга. Вычислите значения выражений

$$g_i^i, \quad g_i^j g_j^i, \quad g_i^j h_j^i, \quad g_i^j h_j^k g_k^i, \quad g_i^j h_k^j g_k^l h_l^i.$$

¹⁾ На лекции в этом месте я всегда кричу так, что стекла дрожат: «Матрицу пер-р-ехода пишем справа-а-а-а!!!» Это объясняется договоренностью умножать матрицы «строка на столбец» и желанием привлечь к этой договоренности внимание студентов.

2. Вспоминаем основы линейной алгебры. Пусть

$$\begin{aligned} a_1 &= {}^t(1, 1, 0) & b_1 &= {}^t(1, 2, 2) \\ a_2 &= {}^t(1, 0, 1) & \text{и} & & b_2 &= {}^t(2, 1, -2) \\ a_3 &= {}^t(0, 1, 1) & b_3 &= {}^t(2, -2, 1) \end{aligned}$$

— два базиса пространства $\vec{\mathbf{R}}^3$. Проверьте, что это базисы. Отыщите матрицы перехода от базиса a к базису b и от базиса b к базису a . Найдите координаты вектора $x = {}^t(3, -1, 7)$ в обоих базисах. Найдите координаты вектора $y = 3a_1 - a_2 + 7a_3$ в базисе b .

2. Ориентация

Пусть $\vec{\mathbf{V}}$ — произвольное векторное пространство размерности m над полем \mathbf{R} ; (a_1, a_2, \dots, a_m) , (b_1, b_2, \dots, b_m) — два каких-нибудь его базиса. В первом пункте мы уже вспомнили, что

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \cdot T,$$

где T — матрица перехода от базиса b к базису a . Важнейшим является то обстоятельство, что матрица перехода всегда невырождена, т. е. ее определитель $\det T$ всегда отличен от нуля.



Определение 2.1. Два базиса (a_1, a_2, \dots, a_m) , (b_1, b_2, \dots, b_m) векторного пространства $\vec{\mathbf{V}}$ *одинаково ориентированы*, если $(a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \cdot T$ и $\det T > 0$.

Упражнение 2.1. Пусть $D : \vec{\mathbf{R}}^m \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ — невырожденный линейный оператор, (a_1, a_2, \dots, a_m) — какой-нибудь базис пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$. Тогда совокупность векторов $(Da_1, Da_2, \dots, Da_m)$ также является базисом пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$. Докажите, что базисы (a_1, a_2, \dots, a_m) и $(Da_1, Da_2, \dots, Da_m)$ ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда $\det [D] > 0$.

Легко понять, что отношение «быть одинаково ориентированными» на множестве всех базисов пространства $\vec{\mathbf{V}}$ является отношением эквивалентности. Обозначим эту эквивалентность буквой ω .

Упражнение 2.2. Проверьте, что отношение ω действительно является эквивалентностью, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Широко известно (в узких кругах), что всякому отношению эквивалентности на данном множестве соответствует разбиение

этого множества на классы эквивалентных между собой элементов. Число классов в этом разбиении называют *индексом* данной эквивалентности.

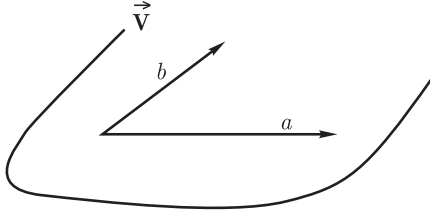


Упражнение 2.3. Докажите, что ω разбивает множество всех базисов пространства \vec{V} в точности на два класса одинаково ориентированных между собой базисов (т. е. индекс эквивалентности ω равен двум).



Определение 2.2. Каждый класс эквивалентности ω называется *ориентацией пространства* \vec{V} . Если в пространстве \vec{V} выбрана какая-нибудь ориентация, то \vec{V} называется *ориентированным пространством*. Ориентация пространства \mathbf{R}^m , содержащая стандартный базис, называется *положительной ориентацией*.

Пример 2.1. Пусть пространство \vec{V} порождено парой неколлинеарных векторов a и b на плоскости:



Рассмотрим два его (разных!) базиса (a, b) и (b, a) . Очевидно:

$$(b, a) = (a, b) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0,$$

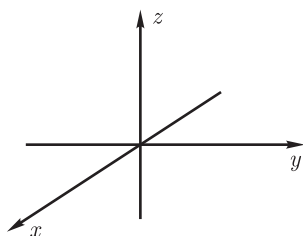
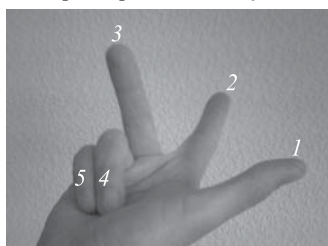


т. е. эти базисы ориентированы по-разному, и ориентированные векторные пространства, порожденные (a, b) и (b, a) , различны. (И это несмотря на то, что оба эти базиса порождают одно и то же неориентированное векторное пространство \vec{V} .) Почувствуйте разницу!


Еще пример 2.2. Посмотрите на рисунок.

На этом рисунке изображена правая рука интеллигентного примата с тремя растопыренными пальцами. Нумерация пальцев указана на рисунке и совпадает с общепринятой нумерацией среди исполнителей на клавишных музыкальных инструментах. Три растопыренных пальца-вектора с номерами 1, 2 и 3 образуют в указанном порядке так называемую *правую тройку* и являются базисом окружающего нас трехмерного пространства \mathbf{R}^3 .

Поскольку правшей среди интеллигентных приматов большинство, ориентация, содержащая этот «правый» базис, наиболее часто считается «положительной». Однако ясно, что присвоение правой ориентации звания «положительная» есть лишь предмет договоренности. ¹⁾ Именно в виде правой тройки принято рисовать пространственную систему координат:



именно правая тройка фигурирует в определении векторного произведения, именно правые тройки фигурируют в разных физических конструкциях и т. д., и т. п.

 Однако я прошу вас, как математиков, ясно понимать разницу между «правой тройкой» и «положительной тройкой» векторов. Правая ориентирована так же, как три пальца правой руки, а положительная — ориентирована так же, как стандартный базис (про который вообще трудно сказать, левый он или правый, поскольку он состоит из столбцов чисел и который, в силу каких-то предварительных договоренностей, может считаться и левым).

Определение 2.3. Цепочка подпространств

$$\vec{V}_1 \subset \vec{V}_2 \subset \dots \subset \vec{V}_k \subset \dots \subseteq \mathbf{R}^m$$

называется *ориентированным флагом* (или, короче, *орфлагом*), если:

- 1) $\dim \vec{V}_i = i$ для каждого i ,
- 2) каждое \vec{V}_i ориентировано.

Признаюсь честно, что общепринятый термин «флаг» я считаю неудачным. Я не знаю никакого разумного объяснения,

¹⁾ Смею предположить, что традиционный выбор именно правой тройки за положительную ориентацию \mathbf{R}^3 обусловлен не только пугающим большинством правшей, переоравших левшей на общем собрании, посвященном выбору положительной ориентации. Возможно этот выбор, в какой-то степени, мотивируется еще и некоторыми физическими явлениями типа «правила правой руки» или подавляющим большинством электронов с правым спином, вылетающих при β -распаде из ядер атомов бора.

почему возрастающая цепочка вложенных подпространств называется именно «флагом» (а, например, не «матрешкой», которая как раз таки является набором вложенных объектов).¹⁾

Определение 2.4. Пусть упорядоченная совокупность векторов (a_1, a_2, \dots, a_m) линейно независима. Будем говорить, что орфлаг $\vec{V}_1 \subset \vec{V}_2 \subset \dots \subset \vec{V}_k \subset \dots \subset \vec{V}_m$ порожден векторами (a_1, a_2, \dots, a_m) , если:

- 1) каждое подпространство \vec{V}_i порождено векторами (a_1, a_2, \dots, a_i) , т. е. $\vec{V}_i = \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_i)$;
- 2) ориентацию в каждом \vec{V}_i задает базис (a_1, a_2, \dots, a_i) (базисные векторы взяты именно в этом указанном порядке!).

Легко видеть, что различным упорядочениям одной и той же совокупности векторов соответствуют различные орфлаги. Следовательно, число различных орфлагов, которые можно породить данной неупорядоченной совокупностью из k линейно независимых векторов, равно числу ее различных упорядочений, а именно, $k!$.

Понятия ориентации и орфлага будут играть далеко не последнюю роль в дальнейшем изложении, поэтому продумайте и запомните их хорошенько. Этим пожеланием мы и закончим второй пункт.

Задачи и упражнения



1. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ тройка векторов

$$b_1 = {}^t(1, 2, 3),$$

$$b_2 = {}^t(3, 1, -2),$$

$$b_3 = {}^t(2, -2, \alpha)$$

образует базис положительной ориентации?

2. Узнайте, являются ли базисы

$$a_1 = {}^t(1, 1, 1, 1) \quad b_1 = {}^t(1, 2, 3, 4)$$

$$a_2 = {}^t(1, 1, -1, -1) \quad b_2 = {}^t(2, 3, 1, 2)$$

$$a_3 = {}^t(1, -1, 1, -1) \quad \text{И} \quad b_3 = {}^t(1, 1, 1, -1)$$

$$a_4 = {}^t(1, -1, -1, 1) \quad b_4 = {}^t(1, 0, -2, -6)$$

одинаково ориентированными или нет?

¹⁾ Мой старший коллега по кафедре И. О. Коряков однажды высказал такое толкование: «Одномерное подпространство — прямая — это древко, двумерное подпространство, содержащее эту прямую, — это плоское полотнище флага на древке, ну, а дальше — не знаю». Полностью согласен с его точкой зрения, но вы решайте сами — принимать или не принимать такой художественный образ.

3. Пусть (a_1, a_2, a_3, a_4) — некоторый базис пространства $\vec{\mathbf{R}}^4$. Рассмотрим два орфлага:

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3) \subset (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

и

$$(a_1) \subset (a_1, a_1 + a_2) \subset (a_1, a_2, a_2 + a_3) \subset (a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_2 + a_4).$$

Разберитесь, совпадают ли эти орфлаги или нет?

3. Билинейные и квадратичные формы

Пусть $\vec{\mathbf{V}}$ — произвольное векторное пространство над полем \mathbf{R} .

Определение 3.1. *Билинейной формой на $\vec{\mathbf{V}}$ называется всякое отображение $g: \vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{R}$ такое, что:*

$$1) g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 g(x_1, y) + \lambda_2 g(x_2, y),$$

$$2) g(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 g(x, y_1) + \lambda_2 g(x, y_2)$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ и любых $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in \vec{\mathbf{V}}$.

Иными словами, билинейная форма — это отображение, которое берет пару векторов и делает из них число, причем это отображение линейно как по первому, так и по второму аргументам.

Определение 3.2. Билинейная форма g называется *симметричной*, если для любых $x, y \in \vec{\mathbf{V}}$ выполнено $g(x, y) = g(y, x)$.

Определение 3.3. Билинейная форма g называется *положительно определенной*, если для любого $x \in \vec{\mathbf{V}}$ выполнено $g(x, x) \geq 0$, при этом $g(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \vec{0}$.

Пусть (a_1, a_2, \dots, a_m) — базис $\vec{\mathbf{V}}$ (т. е. $\vec{\mathbf{V}}$ теперь конечномерно), $x, y \in \vec{\mathbf{V}}$ — два произвольных вектора, $x = x^i a_i, y = y^j a_j$ — разложения¹⁾ этих векторов по базису, а g — билинейная форма на $\vec{\mathbf{V}}$. Не поленимся и попробуем посчитать значение $g(x, y)$:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(x^i a_i, y^j a_j) = \left(\begin{array}{l} \text{пользуемся свойствами 1 и 2 из} \\ \text{определения билинейной формы} \end{array} \right) = \\ &= \sum_{i,j} x^i y^j g(a_i, a_j), \end{aligned}$$

¹⁾ Внимание! Обозначения Эйнштейна (суммирование по немym индексам).



т.е. вычисление числа $g(x, y)$ уперлось в необходимость знать значения $g(a_i, a_j)$ билинейной формы на базисных векторах пространства \vec{V} . Пусть нам эти значения известны.¹⁾ Обозначим тогда

$$g(a_i, a_j) = g_{ij},$$

бережно сохранив месторасположение индексов i и j внизу. Следовательно,²⁾

$$g(x, y) = g_{ij}x^i y^j,$$

или, в матричной записи:

$$g(x, y) = (x^1, x^2, \dots, x^m) \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \\ = {}^t[x] \cdot (g_{ij}) \cdot [y].$$



Матрица (g_{ij}) называется *матрицей билинейной формы g в базисе (a_1, a_2, \dots, a_m)* , а числа g_{ij} — *коэффициентами билинейной формы g в базисе (a_1, a_2, \dots, a_m)* . Ясно, что указав базис линейного пространства и матрицу билинейной формы в этом базисе, мы однозначно определим билинейную форму на всем линейном пространстве.



Очевидно, что билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица в некотором базисе симметрическая, т.е. $g_{ij} = g_{ji}$. (Поразмышляйте! Я сказал: «...в некотором базисе...», но на самом-то деле — в любом базисе!). Это означает, что по коэффициентам билинейной формы очень легко узнать симметрична она или нет — надо просто применить метод их внимательного разглядывания.

Пусть снова \vec{V} — произвольное конечномерное векторное пространство над полем \mathbf{R} , $g(x, y)$ — произвольная симметричная билинейная форма на \vec{V} .

Определение 3.4. *Квадратичной формой на \vec{V} называется отображение $k : \vec{V} \rightarrow \mathbf{R}$, значение которого на любом векторе $x \in \vec{V}$ определяется равенством $k(x) = g(x, x)$.*

¹⁾ Очевидно, что в качестве значений $g(a_i, a_j)$ можно назвать любой набор действительных чисел в количестве m^2 штук и, называя разные наборы, фактически, будем задавать разные билинейные формы. Очевидно поэтому, что разных билинейных форм на \vec{V} — континуум.

²⁾ Смотри первую сноску на предыдущей странице.

Настоятельно прошу Вас, дорогие студенты, никогда не путать квадратичные формы с билинейными — это разные отображения! От разного числа аргументов! Конечно, между ними существует тесная связь. Всякая симметричная билинейная форма $g(x, y)$ однозначно определяет соответствующую ей квадратичную форму $k(x) = g(x, x)$ постановкой одного и того же аргумента на оба свободных места. Более того, верно и обратное: всякая квадратичная форма $k(x)$ однозначно определяет породившую ее билинейную форму по следующему правилу: ¹⁾

$$g(x, y) = \frac{1}{2} [k(x + y) - k(x) - k(y)].$$

Матрица (g_{ij}) исходной симметрической билинейной формы $g(x, y) = g_{ij}x^i y^j$ в базисе (a_1, a_2, \dots, a_m) называется *матрицей квадратичной формы $k(x) = g(x, x)$ в базисе (a_1, a_2, \dots, a_m)* . Очевидно, что

$$k(x) = (x^1, x^2, \dots, x^m) \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \\ = {}^t[x] (g_{ij}) [x] = g_{ij}x^i x^j.$$

Видно, что квадратичная форма — однородный многочлен второй степени от переменных x^1, x^2, \dots, x^m .

Квадратичная форма $k(x) = g(x, x) = g_{ij}x^i x^j$ называется *положительно определенной*, если положительно определена породившая ее билинейная форма $g(x, y) = g_{ij}x^i y^j$. Другими словами, квадратичная форма $k(x)$ положительно определена, если $k(x) > 0$ для любого ненулевого вектора x .

Шестью абзацами выше мы легко ответили на вопрос: как, рассматривая матрицу билинейной формы, узнать — симметрична форма или нет? Несколько более сложным является вопрос: как, рассматривая только матрицу (g_{ij}) билинейной формы, узнать — является ли билинейная форма $g(x, y) = g_{ij}x^i y^j$ (или, что то же самое, соответствующая ей квадратичная форма $k(x) = g(x, x) = g_{ij}x^i x^j$) положительно определенной, или нет? Человечество располагает ответом и на этот вопрос. Одним из вариантов такого ответа является известный

¹⁾ Это правило легко получить из равенства $k(x + y) = g(x + y, x + y) = g(x, x) + 2g(x, y) + g(y, y)$.

Критерий Сильвестра. Билинейная форма $g(x, y) = g_{ij}x^i y^j$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры матрицы (g_{ij}) положительны:

$$\Delta_1 = g_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \Delta_k = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \dots & g_{kk} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \Delta_m = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mm} \end{vmatrix} > 0. \quad \blacklozenge$$

Дорогие друзья! В этом пункте мне осталось напомнить только закон изменения матрицы (g_{ij}) билинейной (или квадратичной) формы при замене базиса в пространстве \vec{V} . Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_m), (a_{1'}, a_{2'}, \dots, a_{m'})$ — два каких-нибудь базиса \vec{V} и $a_{i'} = \gamma_{i'}^k a_k$ — выражения векторов штрихованного базиса через не штрихованные векторы, т. е. $(\gamma_{i'}^k) = T$ — матрица перехода. Посчитаем коэффициенты билинейной формы $g(x, y) = g_{ij}x^i y^j$ в штрихованном базисе:

$$g_{i'j'} = g(a_{i'}, a_{j'}) = g(\gamma_{i'}^k a_k, \gamma_{j'}^l a_l) = \gamma_{i'}^k \gamma_{j'}^l g(a_k, a_l) = \gamma_{i'}^k \gamma_{j'}^l g_{ij}.$$

Таким образом, в матричной записи закон изменения матрицы билинейной формы при замене базиса выглядит так:

$$G' = {}^t T \cdot G \cdot T,$$

где G' и G — матрицы формы $g(x, y)$ в штрихованном и в нештрихованном базисах соответственно.

Задачи и упражнения



1. Снова вспоминаем навыки из курса алгебры. Пусть

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

— матрица билинейной формы $g(x, y) : \vec{\mathbf{R}}^3 \times \vec{\mathbf{R}}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ в стандартном базисе. Вычислите значение этой формы от векторов

$$x = {}^t(3, -1, 7) \text{ и } y = {}^t(1, 2, -2).$$

Найдите матрицу формы $g(x, y)$ в базисе

$$b_1 = {}^t(1, 2, 2),$$

$$b_2 = {}^t(2, 1, -2),$$

$$b_3 = {}^t(2, -2, 1).$$

Является ли форма $g(x, y)$ положительно определенной?

2. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ квадратичная форма

$$k(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 2\alpha x^1 x^2 + 2x^1 x^3$$

положительно определена?

3. Докажите, что квадратичная форма тогда и только тогда положительно определена, когда ее матрица представляется в виде $G = {}^tB \cdot B$, где B — некоторая невырожденная вещественная матрица.

4. Евклидовы пространства

Определение 4.1. Конечномерное векторное пространство \vec{V} над полем \mathbf{R} называется *евклидовым*, если на нем задана симметричная положительно определенная билинейная форма $g(x, y)$, традиционно именуемая *скалярным произведением векторов* $x, y \in \vec{V}$.

Договоримся обозначать скалярное произведение векторов $x, y \in \vec{V}$ угловыми скобками $g(x, y) = \langle x, y \rangle$. Не полениюсь и выпишу в новых обозначениях определение скалярного произведения.

Отображение $\langle x, y \rangle : \vec{V} \times \vec{V} \rightarrow \mathbf{R}$ является *скалярным произведением векторов* пространства \vec{V} , если выполнены следующие четыре аксиомы:

- 1) $\forall x, y, z \in \vec{V} \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ — дистрибутивность,
- 2) $\forall x, y \in \vec{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R} \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ — однородность,
- 3) $\forall x, y \in \vec{V} \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ — симметричность (коммутативность),
- 4) $\forall x \in \vec{V} \langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$ — положительная определенность.



Хочу заострить ваше внимание на очевидном, но чрезвычайно важном для дальнейших рассмотрений, обстоятельстве. Если на двух экземплярах одного и того же векторного пространства \vec{V} задать разные скалярные произведения (определить разные формы $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$), то получатся **разные**

евклидовы пространства! Это обстоятельство сыграет огромную роль в теории поверхностей.

Если (a_1, a_2, \dots, a_m) — какой-нибудь базис пространства \vec{V} , то матрица (g_{ij}) билинейной формы $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ в этом базисе называется *матрицей Грама*¹⁾ (указанного базиса), а ее элементы (т. е. скалярные произведения базисных векторов) $g_{ij} = g(a_i, a_j) = \langle a_i, a_j \rangle$ — *метрическими коэффициентами*.

Если же (a_1, a_2, \dots, a_k) — произвольная система²⁾ каких-то векторов пространства \vec{V} , то *матрицей Грама системы векторов* (a_1, a_2, \dots, a_k) также будем называть матрицу, составленную из всевозможных попарных скалярных произведений векторов этой системы, т. е. матрицу (g_{ij}) , где $g_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle$.



Следует еще раз подчеркнуть, что *задать билинейную форму* на векторном пространстве означает то же самое, что *задать матрицу этой формы в каком-нибудь базисе* (см. п. 3). Именно поэтому скалярное произведение на векторном пространстве \vec{V} чаще всего задают, указывая матрицу Грама какого-нибудь базиса пространства \vec{V} .

Перечислить все свойства матрицы Грама невозможно, как невозможно перечислить все свойства, например, электрона, ведь «электрон также неисчерпаем, как и атом».³⁾ Однако основные свойства матрицы Грама (g_{ij}) и метрических коэффициентов g_{ij} , доказанные в лекциях на первом курсе, нам необходимо зафиксировать здесь для будущих нужд.

Свойства матрицы Грама.

1) На главной диагонали матрицы Грама любого базиса стоят скалярные квадраты базисных (т. е. заведомо не нулевых!) векторов, т. е. $g_{ii} > 0$.

2) Матрица Грама любой системы векторов симметрическая, т. е. $g_{ij} = g_{ji}$, ибо скалярное произведение коммутативно.




3) Матрица Грама любого базиса положительно определена (является матрицей положительно определенной квадратичной формы), т. е. все ее главные угловые миноры

¹⁾ Фамилия немецкого математика второй половины XIX в. И. П. Грама пишется с одной буквой «м» вероятно для того, чтобы не путать ее с одной тысячной килограмма.

²⁾ Не обязательно базис.

³⁾ См. Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. ПСС. 4 изд. Т. 14. С. 3–295.


$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ положительны. В частности, определитель матрицы Грама $g = \det(g_{ij}) > 0$.

 4) Объем $V[a_1, a_2, \dots, a_m]$ параллелепипеда¹⁾, построенного на векторах (a_1, a_2, \dots, a_m) равен

$$V[a_1, a_2, \dots, a_m] = \sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{\det \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_m \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, a_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m, a_1 \rangle & \langle a_m, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_m, a_m \rangle \end{vmatrix}}.$$


Очень часто говорят, что «скалярное произведение определяет на векторном пространстве \vec{V} метрическую структуру», имея в виду, скорее, не то обстоятельство, что скалярное произведение задает на \vec{V} метрику по формуле $\rho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ ²⁾, а ту глобальную ситуацию, что через скалярное произведение определяются все величины, которые в обыденной жизни принято называть «метрическими» — длины, углы, площади и объемы. Напомню эти определения.

Пусть (a_1, a_2, \dots, a_m) — базис $\vec{\mathbf{R}}^m$ и $x = x^i a_i$, $y = y^j a_j \in \vec{\mathbf{R}}^m$ — произвольные векторы.

 Длина вектора x :

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle x^i a_i, x^j a_j \rangle} = \sqrt{g_{ij} x^i x^j}.$$

Длина вектора есть квадратный корень из значения квадратичной формы от вектора x . Ясно, что этот квадратный корень — число действительное, так как всегда $\langle x, x \rangle \geq 0$.

 Косинус угла φ между двумя ненулевыми векторами x и y :

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} = \frac{g_{ij} x^i y^j}{\sqrt{g_{ij} x^i x^j} \sqrt{g_{ij} y^i y^j}}$$

¹⁾ m -мерный параллелепипед с ребрами a_1, a_2, \dots, a_m , т. е. множество векторов $\{x = \sum \alpha^k a_k \mid 0 \leq \alpha^k \leq 1\}$, называем *параллелепипедом*, построенном на векторах (a_1, a_2, \dots, a_m) . Перечислю параллелепипеды по возрастанию размерности: отрезок, параллелограмм, параллелепипед, параллелепипед, ..., параллелепипед, ..., параллелепипед, Неплохо запомнить также, что при $m = 1$ объем обычно называют длиной, а при $m = 2$ — площадью.

²⁾ Проверьте, что функция $\rho(x, y)$ действительно является метрикой, т. е. неотрицательна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника.

— а вот здесь в числителе стоит **билинейная** форма — скалярное произведение. В предыдущем пункте я уже просил не путать квадратичные формы с билинейными.

Естественный вопрос: почему дробь, стоящая в определении косинуса угла, всегда по модулю не превосходит единицы, т. е. почему эта дробь действительно является косинусом некоторого угла и данное определение законно?

Естественный ответ: законность данного определения гарантируется неравенством Коши–Буняковского. Вот оно:

Неравенство Коши–Буняковского. Для любых двух векторов x и y евклидова пространства справедливо:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

Из этого неравенства, конечно, следует, что $\left| \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \right| \leq 1$. ◆

Доказательство неравенства Коши–Буняковского наверняка рассказывалось в курсе линейной алгебры, поэтому предлагаю вам освежить его в памяти самостоятельно.

Идем далее.



Определение 4.2. Векторы $x, y \in \vec{V}$ *ортогональны* (перпендикулярны), тогда и только тогда, когда $\langle x, y \rangle = 0$.



Определение 4.3. Базис (e_1, e_2, \dots, e_m) евклидова пространства \vec{V} называется *ортонормированным*, если

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Функция $\delta_{ij} : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1\}$ носит название «*символ Кронекера*» и довольно часто будет появляться у нас в дальнейшем (причем в разных модификациях: $\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta_j^i = \delta^{ij}$).

Из определения видно, что векторы ортонормированного базиса попарно ортогональны (*ортогональность* базиса), а длина каждого базисного вектора равна единице (*нормированность* базиса).



Внимание! Распространенная условность! Стандартный базис (e_1, e_2, \dots, e_m) пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$ принято считать ортонормированным, т. е. его матрицу Грама принято полагать единичной. Однако каждому грамотному математику понятно,

что это не более чем случайная договоренность, имеющая массовый характер и принятая на нашей планете в силу исторически сложившихся обстоятельств.¹⁾

Ортонормированные базисы весьма и весьма приятны. Дело в том, что в ортонормированном базисе (e_1, e_2, \dots, e_m) евклидова пространства очень просто вычислять координаты произвольного вектора $x = x^i e_i$. Действительно, после умножения равенства $x = x^i e_i$ скалярно на вектор e_j получим $\langle x, e_j \rangle = \sum_i x^i \langle e_i, e_j \rangle = x^j \delta_{ij} = x^j$, т. е.



$$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle \cdot e_i.$$

Я думаю, этот несложный, но важный факт нетрудно и важно запомнить.

Вспомним еще пару определений.

Определение 4.4. Пусть $\vec{V} \leq \vec{\mathbf{R}}^m$ — произвольное подпространство. Будем говорить, что *вектор x ортогонален \vec{V}* , если для всякого вектора $y \in \vec{V}$ выполнено $\langle x, y \rangle = 0$, т. е. вектор x перпендикулярен каждому вектору из \vec{V} . Обозначение: $x \perp \vec{V}$.

Определение 4.5. Множество векторов $\vec{V}^\perp = \{x \in \vec{\mathbf{R}}^m | x \perp \vec{V}\}$ называется *ортогональным дополнением подпространства \vec{V}* .

Хорошо известно, что ортогональное дополнение любого подпространства само является подпространством и, кроме того, все пространство является прямой суммой произвольного подпространства и его ортогонального дополнения:

$$\vec{\mathbf{R}}^m = \vec{V} \oplus \vec{V}^\perp \text{ и } m = \dim \vec{V} + \dim \vec{V}^\perp.$$

Если $\vec{\mathbf{R}}^m = \vec{V} \oplus \vec{V}^\perp$, то произвольный вектор $x \in \vec{\mathbf{R}}^m$ можно единственным образом представить в виде суммы $x = y + z$, где $y \in \vec{V}$, а $z \in \vec{V}^\perp$. В этом случае слагаемое $z \in \vec{V}^\perp$ называют *ортогональной составляющей*, а слагаемое $y \in \vec{V}$ — *ортогональной проекцией* вектора $x \in \vec{\mathbf{R}}^m$ на подпространство \vec{V} . Совершенно естественно теперь назвать *углом между вектором*

¹⁾ Задумайтесь над этим! Ну почему, собственно, чаще всего для совокупности каких-то абстрактных столбцов из нулей и единиц мы назначаем единичную матрицу Грама?

$x \in \vec{\mathbf{R}}^m$ и подпространством $\vec{\mathbf{V}}$ угол между самим вектором $x \in \vec{\mathbf{R}}^m$ и его ортогональной проекцией на $\vec{\mathbf{V}}$.

Следующее утверждение, в виду его важности и удобства дальнейших ссылок, окрестим «леммой».

Лемма 4.1. Пусть $\vec{\mathbf{V}} \subset \vec{\mathbf{W}}$ — ориентированные подпространства в $\vec{\mathbf{R}}^m$, $\dim \vec{\mathbf{V}} = k$, $\dim \vec{\mathbf{W}} = k + 1$, $(a_1, a_2, \dots, a_k) \rightarrow$ базис $\vec{\mathbf{V}}$. Тогда существует единственный вектор $a \in \vec{\mathbf{W}}$ такой, что:

- 1) $a \in \vec{\mathbf{V}}^\perp$,
- 2) $|a| = 1$,
- 3) $(a_1, a_2, \dots, a_k, a)$ — базис $\vec{\mathbf{W}}$, определяющий в $\vec{\mathbf{W}}$ заданную ориентацию (т. е. принадлежащий заданной в $\vec{\mathbf{W}}$ ориентации). \blacklozenge

Кроме самой леммы, весьма важным для будущего понимания предмета окажется



Следствие. Для любого орфлага $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k$ существует единственная порождающая его ортонормированная совокупность векторов (b_1, b_2, \dots, b_k) .

Несмотря на всю очевидность приведенных утверждений — леммы и следствия, на всякий случай аккуратно проговорите себе их доказательства. Хуже не будет.

Идем далее. Известно, что всякую линейно независимую систему векторов (a_1, a_2, \dots, a_k) векторного пространства $\vec{\mathbf{V}}$ можно переделать в ортонормированную систему (b_1, b_2, \dots, b_k) . Сама эта «переделка» носит название *процесса ортогонализации Грама–Шмидта*.¹⁾ Давайте выясним, что происходит в процессе ортогонализации с ориентацией системы (a_1, a_2, \dots, a_k) . Понятно, что сначала для этого нужно детально вспомнить сам процесс.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

Пусть (a_1, a_2, \dots, a_k) — произвольная линейно независимая система векторов, которую нам поручено переделать. Будем строить из нее ортонормированную систему (b_1, b_2, \dots, b_k) по индукции.

Первый вектор ортонормированной системы: $b_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$.

¹⁾ Эрхард Шмидт — немецкий математик начала XX в., работавший в кругу математиков Гёттингена, центральной фигурой которого был Д. Гильберт.

Если векторы b_1, b_2, \dots, b_{i-1} уже построены ($1 < i \leq k$), то полагаем

$$\tilde{b}_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, b_j \rangle b_j.$$

Вектор \tilde{b}_i — это вспомогательный вектор. (На лекции я кричу: «Новый вектор — это следующий вектор из исходной системы минус линейная комбинация уже построенных!!!») Он пока что не единичной длины, зато уже ортогонален всем ранее построенным. Чтобы проверить это, считаем скалярное произведение ¹⁾ (далее $s < i$):

$$\begin{aligned} \langle \tilde{b}_i, b_s \rangle &= \left\langle a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, b_j \rangle b_j, b_s \right\rangle = \langle a_i, b_s \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, b_j \rangle \langle b_j, b_s \rangle = \\ &= \langle a_i, b_s \rangle - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, b_j \rangle \delta_{js}}_{\substack{\text{тут все слагаемые — нули,} \\ \text{кроме одного, при } s=j}} = \langle a_i, b_s \rangle - \langle a_i, b_s \rangle = 0. \end{aligned}$$

После этого остается нормировать вспомогательный вектор \tilde{b}_i , т. е. положить $b_i = \frac{\tilde{b}_i}{|\tilde{b}_i|}$. Очередной вектор строящегося ортонормированного базиса готов.

Описанную процедуру следует повторять до полного исчерпания первоначально завезенного запаса векторов (a_1, a_2, \dots, a_k) .

Внимательное разглядывание процесса ортогонализации (в совокупности с четким пониманием того, как устроены матрицы перехода) позволяет увидеть, что

$$(b_1, b_2, \dots, b_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{|a_1|} & * & * & \dots & * \\ 0 & \frac{1}{|\tilde{b}_2|} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{|\tilde{b}_3|} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{|\tilde{b}_k|} \end{bmatrix},$$

¹⁾ А как иначе?! Даже Чебурашка уже знает, что векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю!

где звездочками в матрице перехода обозначены не очень интересные нас числа.



Совершенно ясно, что определитель и все главные угловые миноры матрицы перехода, стоящей справа, строго положительны. Это означает, что совокупности (a_1, a_2, \dots, a_k) и (b_1, b_2, \dots, b_k) не только одинаково ориентированы, а даже порождают один и тот же орфлаг! Вот какой хороший, оказывается, процесс ортогонализации!

Закончим четвертый пункт напоминанием некоторых фактов из курса линейной алгебры ортогональных линейных операторах.

Определение 4.6. Линейный оператор $Q : \vec{\mathbf{R}}^m \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ называется *ортогональным* (синонимы: *унитарным*, *изометрическим*), если он сохраняет скалярное произведение, т.е. для любых двух векторов $x, y \in \vec{\mathbf{R}}^m$ выполнено равенство

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Известно, что в стандартном базисе

$${}^tQ \cdot Q = \mathbf{1}_m, \quad Q^{-1} = {}^tQ.$$

Так как $\langle Qx, Qx \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2 = |Qx|^2$, то ортогональный оператор сохраняет длину векторов: $|x| = |Qx|$.

Известно также, что определитель матрицы всякого ортогонального оператора равен либо 1, либо -1 . Если $\det Q = 1$, то оператор сохраняет ориентацию пространства, сохраняет длины базисных векторов и углы между ними, т.е. фактически, выполняет только вращение базиса. Если же $\det Q = -1$, то оператор изменяет ориентацию базиса, т.е. кроме вращения, выполняет еще и некоторую симметрию пространства.

Вот так.

Задачи и упражнения



1. Может ли матрица $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ быть матрицей Грама некоторого базиса?

2. Найдите угол между векторами $a = {}^t(1, -2, 3, 2)$ и $b = {}^t(2, 1, -1, 5)$, если координаты этих векторов указаны в базисе, матрица Грама которого есть

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\begin{aligned} a_1 &= {}^t(1, -2, 3, 2), \\ a_2 &= {}^t(-1, 2, 3, 2), \\ a_3 &= {}^t(1, 2, -3, 2), \\ a_4 &= {}^t(1, 2, 3, -2). \end{aligned}$$

(Отдавая дань традиции, будем считать в этой задаче матрицу Грама стандартного базиса единичной.)

4. Ребята! Пусть, как обычно, матрица Грама стандартного базиса пространства $\vec{\mathbf{R}}^4$ единичная. Тогда векторы

$$\begin{aligned} b_1 &= {}^t(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), \\ b_2 &= {}^t(1/2, 1/2, -1/2, -1/2), \\ b_3 &= {}^t(1/2, -1/2, 1/2, -1/2), \\ b_4 &= {}^t(1/2, -1/2, -1/2, 1/2) \end{aligned}$$

образуют ортонормированный базис пространства $\vec{\mathbf{R}}^4$. Проверьте, не обманул ли я вас, и найдите координаты вектора $x = {}^t(4, 6, -2, 10)$ в этом базисе.

5. Найдите базис ортогонального дополнения подпространства $\vec{\mathbf{V}} \subset \vec{\mathbf{R}}^4$, порожденного векторами $a_1 = {}^t(1, 2, 2, -1)$ и $a_2 = {}^t(1, 1, -5, 3)$. Отыщите ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $x = {}^t(4, -1, -3, 2)$ на подпространство $\vec{\mathbf{V}}$.

6. Из Японии в деревню Большие Умищи привезли на телеге четыре новеньких вектора

$${}^t(2, 1, 3, -1), \quad {}^t(7, 4, 3, -3), \quad {}^t(1, 1, -6, 0), \quad {}^t(5, 7, 7, 8)$$

и просят сделать из них ортонормированный базис того подпространства, которое они порождают. Помогите деревенским мужикам; как обычно, матрица Грама стандартного базиса пространства $\vec{\mathbf{R}}^4$ — единичная.

7. Прodelайте процесс ортогонализации для векторов ${}^t(2, 0, 0, -1)$, ${}^t(0, 1, 3, 0)$, ${}^t(1, -3, 1, 2)$, если их координаты указаны в базисе, матрица Грама которого есть

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Найдите угол между вектором $x = {}^t(2, 2, 1, 1)$ и подпространством, порожденным векторами ${}^t(3, 4, -4, -1)$, ${}^t(0, 1, -1, 2)$, если координаты всех векторов указаны в базисе, матрица Грама которого есть

$$\text{а) } (g_{ij}) = \mathbf{1}_4, \quad \text{б) } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите число диагоналей n -мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

10. Найдите длину большой диагонали n -мерного куба с ребром a и предел этой длины при $n \rightarrow \infty$.

11. Докажите, что все большие диагонали n -мерного куба образуют один и тот же угол φ_n со всеми его ребрами. Найдите этот угол и его предел при $n \rightarrow \infty$.

12. Найдите угол между большой диагональю n -мерного куба и его k -мерной гранью.

5. Векторные функции скалярного аргумента

Мудрецы не устают повторять, что шутка, произнесенная дважды, становится глупостью. Слава богу — их шутка не относится к математическим фактам, и в этом пункте мы можем смело повторить некоторые сведения из математического анализа о векторных функциях.

Пусть $I \subseteq \mathbf{R}$ — открытый интервал, т.е. множество действительных чисел одного из видов: (a, b) , $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Хорошенько представьте себе несколько различных интервалов на прямой, ибо все встречающиеся нам далее векторные функции будут рассматриваться именно на интервалах.

Пусть $x : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — непрерывная векторная функция скалярного аргумента (короче — «вектор-функция»). Я искренне питаю надежду, что фраза «вектор-функция $x(t)$ скалярного аргумента $t \in I$ » понятна всем читателям, однако, на всякий случай

расшифрую, что это такое:

$$x(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), x^3(t), \dots, x^{m-1}(t), x^m(t))$$

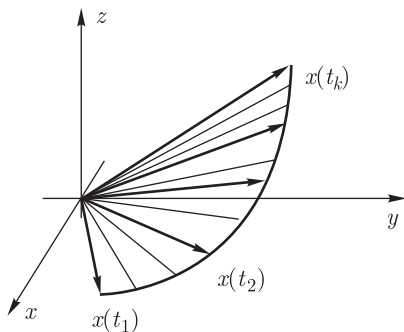
— т. е. каждому значению аргумента t сопоставляется вектор $x(t)$ из векторного пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$. Непрерывность вектор-функции означает, что все компоненты $x^j(t)$ вектора $x(t)$ непрерывны на I .



По сложившейся традиции, аргумент $t \in I$ вектор-функции $x(t)$ принято называть *параметром*. У физиков¹⁾ существуют свои взгляды на жизнь, поэтому параметр они часто называют словом «*время*», а произвольное конкретное значение параметра именуют гордым термином «*момент*».²⁾

Будем говорить, что вектор-функция $x : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ *задана параметрически*, если каким-то образом указаны все ее координатные функции $x^j(t) : I \rightarrow \mathbf{R}$, а саму запись $x(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))$ будем называть *параметрическим заданием* вектор-функции $x(t)$.

На лекции про непрерывные вектор-функции у меня в голове (а иногда и на доске) возникает примерно следующая картинка:



Это полотно демонстрирует, что при изменении параметра t , конец переменного вектора $x(t)$ описывает в пространстве $\vec{\mathbf{R}}^m$ некоторую линию. Такую линию раньше называли *годографом* вектор-функции, но сейчас этот красивый термин почему-то вы-

¹⁾ Физики — это весьма любопытные ученые люди, которые постоянно и довольно сумбурно используют математику в своей жизнедеятельности.

²⁾ Отдадим должное братьям-физикам — их терминология оказывается порой весьма удобной, например, при изучении траектории движущейся точки (движение спутника на околоземной орбите, траектория вражеского снаряда, полет шмеля в чемодане), т. е. когда пространственные координаты движущейся точки являются функциями времени t .

шел из моды. Интуитивно понятно, что годограф непрерывной вектор-функции есть непрерывная сплошная линия.¹⁾ Однако применительно к вектор-функциям и пространству $\vec{\mathbf{R}}^m$ такая картинка совершенно бессмысленна, ведь в пространстве $\vec{\mathbf{R}}^m$ нет ни точек, ни направленных отрезков, ни линий. Все эти объекты обретут право на существование лишь в аффинных пространствах, но аффинные пространства — предмет обсуждения следующих пунктов.

Определение 5.1. Пусть $t \in I$ и $t + \Delta t \in I$. Предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t),$$

если он существует, называется *производной вектор-функции $x(t)$ в точке t* , а вектор-функция $x(t)$, в случае существования этого предела, называется *дифференцируемой в точке t* . Вектор-функция называется *дифференцируемой на интервале I* , если она дифференцируема в каждой точке интервала I .



Договоримся, что точка над вектор-функцией²⁾ всегда будет обозначать **производную по параметру**. Однако, при необходимости, для производной по параметру возможно использование и других обозначений:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{dx}{dt}.$$



Разглядывая приведенное определение, легко понять, что вектор-функция дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируема каждая ее координатная функция, при этом:

$$\dot{x}(t) = {}^t\dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \dots, \dot{x}^m(t).$$

Запомните раз и навсегда — производная вектор-функции это тоже **вектор-функция!**

Определение 5.2. Вектор-функцию $x(t) : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ будем называть *гладкой*, если все ее координатные функции $x^j(t)$ имеют на I непрерывные производные сколь угодно высокого порядка.

¹⁾ Этот факт понятен лишь интуитивно только потому, что мы пока не давали никакого определения непрерывности линии. Да и определения линии мы, собственно, тоже не давали.

²⁾ Разумеется, точка не над самой вектор-функцией, а над записью ее имени.

В этой книжке мы будем иметь дело, преимущественно, с гладкими вектор-функциями. Это объясняется удобством их изучения, возможностью без лишних головных болей дифференцировать их столько раз, сколько потребуется, сложившейся традицией и расслабляющим влиянием друзей-физиков, у которых почти все изучаемые траектории движения материальных точек гладкие. Однако в целях более тонкой классификации вектор-функций мы иногда будем говорить, что *вектор функция* $x(t) : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ принадлежит классу гладкости C^k , если она имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно (хотя, быть может, уже не имеет непрерывной производной $(k + 1)$ -го порядка). Класс всех гладких функций договоримся обозначать C^∞ .

Напомню нужную для дальнейшего изложения формулу Тейлора для гладких вектор-функций (остаточный член приведен в форме Пеано):

$$x(t) = x(t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!} + o((t - t_0)^n).$$

Здесь $t, t_0 \in I; n \in \mathbf{N}$.



Очевидный факт 5.1. Оператор $\frac{d}{dt}$ (оператор взятия производной) является линейным, т. е. для любых дифференцируемых вектор-функций $x, y : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ и любого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ выполнено:

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \frac{d}{dt}x(t) + \frac{d}{dt}y(t) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(\alpha \cdot x(t)) = \alpha \frac{d}{dt}x(t).$$

Этот очевидный факт позволяет успешно дифференцировать линейные комбинации вектор-функций с постоянными коэффициентами.

Однако кроме линейных комбинаций из данных вектор-функций можно составлять и массу других конструкций. Примеры:

- $\langle x(t), y(t) \rangle$ — скалярное произведение векторов;
- $x(t) \times y(t)$ — векторное произведение векторов в 3-мерном пространстве;
- $\lambda(t) \cdot x(t)$ — произведение скалярной функции $\lambda(t)$ на вектор $x(t)$;

- $\det [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$ — определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t) : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$;
- $X(t) \cdot Y(t)$ — произведение матриц, где $X(t) : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^{k \times n}$, $Y(t) : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^{n \times s}$ — матричные функции, т. е. матрицы, столбцами которых являются вектор-функции.

Как дифференцировать подобные конструкции? Вот вопрос вопросов! Однако оказывается, что ответ на этот вопрос можно получить одним ударом, если подметить, что все приведенные конструкции являют собой примеры билинейных отображений.¹⁾


Определение 5.3. Отображение $B(x, y) : \vec{\mathbf{R}}^k \times \vec{\mathbf{R}}^n \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ называется *билинейным*, если оно линейно по каждому своему аргументу, т. е.

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y), \\ B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2) \end{aligned}$$

для любых векторов $x, x_1, x_2 \in \vec{\mathbf{R}}^k$; $y, y_1, y_2 \in \vec{\mathbf{R}}^n$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

Заметим, что билинейная форма есть частный случай билинейного отображения при $m = 1$ и $k = n$.

Упражнение 5.1. Докажите, что в случае конечномерности пространств $\vec{\mathbf{U}}$, $\vec{\mathbf{V}}$ и $\vec{\mathbf{W}}$ билинейное отображение $B(x, y) : \vec{\mathbf{U}} \times \vec{\mathbf{V}} \rightarrow \vec{\mathbf{W}}$ всегда непрерывно.

 **Лемма 5.1** (о дифференцировании билинейных отображений). Пусть отображение $B(x, y) : \vec{\mathbf{R}}^k \times \vec{\mathbf{R}}^n \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ билинейно, а вектор-функции $x : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^k$ и $y : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^n$ дифференцируемы на I . Тогда на интервале I вектор-функция $z(t) = B(x(t), y(t))$ дифференцируема и

$$\dot{z}(t) = B(\dot{x}(t), y(t)) + B(x(t), \dot{y}(t)).$$

Доказательство. Смотрим:

$$\frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [B(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - B(x(t), y(t))] =$$

¹⁾ А в случае определителя $\det [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$ мы имеем дело даже с m -линейным отображением, т. е. отображением, линейным по всем своим m аргументам-столбцам.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta t} [B(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - B(x(t), y(t + \Delta t)) + \\
&\quad + B(x(t), y(t + \Delta t)) - B(x(t), y(t))] = \\
&= B\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, y(t + \Delta t)\right) + \\
&\quad + B\left(x(t), \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} B(\dot{x}, y) + B(x, \dot{y}). \quad \blacklozenge
\end{aligned}$$

Из доказанной леммы сразу вытекают интересующие нас



Следствия.

1. $\langle x, y \rangle' = \langle \dot{x}, y \rangle + \langle x, \dot{y} \rangle$ — производная скалярного произведения векторов.

2. Если $x(t) \neq \vec{0}$ для любого $t \in I$, то

$$\frac{d}{dt} |x(t)| = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle x, x \rangle} = \frac{2 \langle x, \dot{x} \rangle}{2\sqrt{\langle x, x \rangle}} = \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{|x|}$$

— производная модуля вектор-функции.

3. $(x \times y)' = \dot{x} \times y + x \times \dot{y}$ — производная векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.

4. $(X(t) \cdot Y(t))' = \dot{X}(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot \dot{Y}(t)$ — производная произведения матричных функций.

5. $\frac{d}{dt} \det [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)] = \sum_{i=1}^m \det [x_1(t), \dots, \dot{x}_i(t), \dots, x_m(t)]$ — производная определителя матрицы, столбцы которой есть координатные столбцы вектор-функций.

Упражнение 5.2. Пусть $A(t) = (a_{ij}(t))_{m \times m}$ — квадратная матрица, $A^{ij}(t)$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}(t)$. Докажите, используя следствие 5), что $\frac{d}{dt} \det A(t) = A^{ij}(t) \cdot \dot{a}_{ij}(t)$ (суммирование от 1 до m).

После того, как мы научились дифференцировать различные произведения вектор-функций, для нас не составит никакого труда понять важнейший факт, справедливый для вектор-функций постоянной длины. Этот фундаментальный факт мироздания (известный еще Ньютону!) будет многократно применяться в различных вариациях во многих утверждениях всего последующего курса дифференциальной геометрии. Запомните, пожалуйста, этот факт очень хорошо!



Факт 5.2. Пусть $|x(t)| \equiv C = \text{const}$. Тогда (и только тогда!) в любой момент t векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ перпендикулярны.

Доказательство. Цепочка эквивалентных утверждений:

$$\begin{aligned} |x(t)| \equiv C = \text{const} &\Leftrightarrow \langle x(t), x(t) \rangle \equiv \text{const} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \dot{x}, x \rangle + \langle x, \dot{x} \rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \langle \dot{x}, x \rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \forall t \dot{x}(t) \perp x(t). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Уважаемые читатели! Подходит к концу пятый пункт этой книжки и хочется достойно закончить его некоторыми замечаниями об интегралах от векторных функций. Пусть снова $x : I \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$ — непрерывная вектор-функция, (e_1, e_2, \dots, e_m) — стандартный базис $\overrightarrow{\mathbf{R}}^m$. Тогда

$$x(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)) = x^i(t) \cdot e_i.$$

Теперь легко понять, как правильно посчитать интеграл от вектор-функции:

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t) dt &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m x^i(t) e_i \right) dt = \sum_{i=1}^m e_i \int_a^b x^i(t) dt = \\ &= {}^t \left(\int_a^b x^1(t) dt, \int_a^b x^2(t) dt, \dots, \int_a^b x^m(t) dt \right), \end{aligned}$$

т. е. для вычисления интеграла от вектор-функции нужно просто добросовестно посчитать интегралы от всех ее координатных функций. Знаменитая формула Ньютона–Лейбница в написании для вектор-функций ничем не отличается от своей скалярной родственницы:

$$\int_a^b \dot{x}(t) dt = x(b) - x(a).$$

Упражнение 5.3. Докажите, а потом запомните, что скалярное произведение вектор-функции $x(t)$ на постоянный вектор y_0 интегрируется так:

$$\int_a^b \langle y_0, x(t) \rangle dt = \left\langle y_0, \int_a^b x(t) dt \right\rangle.$$

Эта формула нам несколько раз пригодится «по-крупному».

Задачи и упражнения



1. Аккуратно напишите первые восемь слагаемых формулы Тейлора для вектор-функции

$$x(t) = {}^t(\cos t, \sin t, e^t, t^2 + 3t + 1)$$

в точке $t_0 = 0$. Подметьте закономерность и напишите общий член этой формулы Тейлора, затем — остаточные члены в форме Пеано и в форме Лагранжа.

2. На доске написано параметрическое задание трех вектор-функций $x, y, z : \mathbf{R} \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^3$:

$$\begin{aligned} x(t) &= {}^t(\cos t, \sin t, e^t), \\ y(t) &= {}^t(t^3 + t, \sin 3t, e^{t^2}), \\ z(t) &= {}^t(t^2, \sin 2t, -3t + \ln(t^2 + 1)). \end{aligned}$$

Выясните, «откуда» и «куда» действуют следующие отображения и найдите их производные:

$$\begin{aligned} &|x(t)|; \quad 5t^3 \cdot |x(t)|; \quad x(t) \times y(t); \quad (x(t) \times y(t)) \times z(t); \\ &\langle x(t), y(t) \rangle; \quad \langle x(t), y(t) \rangle \cdot z(t); \quad \det[x(t), y(t), z(t)]. \end{aligned}$$

3. Докажите, что значения вектор-функций

$$\begin{aligned} x_1(t) &= {}^t(\cos t, \sin t, e^{2t}), \\ x_2(t) &= {}^t(-\sin t, \cos t, 2e^{2t}), \\ x_3(t) &= {}^t(-\cos t, -\sin t, 4e^{2t}) \end{aligned}$$

в любой момент времени $t \in \mathbf{R}$ образуют базис пространства $\overrightarrow{\mathbf{R}}^3$.

4. Пусть $\overrightarrow{x(t)} : I \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^3$ — вектор функция класса гладкости C^1 и $x(t) \neq \vec{0}$ при любом $t \in I$. Докажите, что вектор $x(t)$ имеет постоянное направление тогда и только тогда, когда в любой момент $t \in I$ векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ коллинеарны.

5. Пусть $x(t) : I \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^3$ — вектор функция класса гладкости C^2 и для любого $t \in I$ выполнены два условия:

- 1) векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ не коллинеарны, т. е. $x(t) \times \dot{x}(t) \neq \vec{0}$;
- 2) векторы $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ компланарны, т. е.

$$\langle x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle = \det[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)] = 0.$$

Докажите, что тогда вектор $x(t)$ всегда находится в некоторой фиксированной плоскости (т. е. годограф вектор-функции $x(t)$ является плоским).

6. Объясните, используя задачу 5, почему траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы (но не проходящей через центр), является плоской. В частности, орбиты планет солнечной системы являются плоскими (поразительный факт, открытый И. Кеплером и впервые объясненный И. Ньютоном).

7. Пусть частица движется под действием центральной силы и ее траектория не проходит через центр. Докажите, что расстояние от частицы до центра максимально только тогда, когда скорость частицы минимальна. Опровергните, что скорость частицы максимальна только тогда, когда расстояние от нее до центра минимально.

6. Обобщенное векторное произведение

Мы начнем этот пункт с формулировки и доказательства леммы, которая сыграет очень важную роль в дальнейших рассуждениях. Сосредоточьтесь и сконцентрируйте все свое внимание.

Лемма 6.1. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ — дифференцируемые (или даже большие — гладкие) вектор-функции, такие, что в любой момент $t \in I$ векторы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$ линейно независимы. Тогда существует единственная дифференцируемая (или, соответственно, гладкая) вектор-функция $n(t) : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ такая, что:

- 1) $n(t) \perp x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$ для любого $t \in I$, т. е. вектор $n(t)$ всегда ортогонален каждому из векторов $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$,
- 2) $\det [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t), n(t)] > 0$ для любого $t \in I$, т. е. ориентация базиса $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t), n(t))$ всегда положительна,
- 3) $|n(t)| \equiv 1$, т. е. вектор $n(t)$ всегда имеет единичную длину.

Перед началом процесса доказательства я рекомендую читателям сравнить эту лемму с леммой из п. 4 и обнаружить изрядное сходство их утверждений. Это сходство столь значительно, что невольно возникает идея: для доказательства нашей леммы нужно просто идти по интервалу I и в каждый момент времени t сослаться на утверждение леммы п. 4. Однако такой метод ничего не скажет нам о гладкости функции $n(t)$ и, кроме того, не предъявит никакой явной конструкции вектора $n(t)$ из векторов $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$, а такую конструкцию хотелось

бы иметь. Предлагаемый ниже способ доказательства полностью удовлетворит всем нашим желаниям.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь вектор $x \in \overline{\mathbf{R}}^m$, $x = {}^t(x^1, x^2, \dots, x^m)$, и рассмотрим определитель

$$\det [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t), x] = \Delta(x)$$

— число, зависящее от взятого вектора x , который мы поставили в последний столбец этого определителя. Пусть $N^i(t)$ — алгебраическое дополнение к элементу x^i из последнего столбца. Тогда:

1) вектор $N(t) = {}^t(N^1(t), N^2(t), \dots, N^m(t))$ не зависит от x , это совершенно очевидно;

2) вектор-функция $N(t)$ — гладкая, поскольку ее координатные функции $N^i(t)$ являются определителями (а, стало быть, многочленами!), составленными из гладких координатных функций векторов $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$, а многочлен от гладких функций, безусловно, является гладкой функцией;¹⁾

3) рассмотрим скалярное произведение $\langle N, x \rangle$:

$$\langle N, x \rangle = \sum_{i=1}^m N^i x^i = \det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x] = \Delta(x),$$

это очевидно;²⁾

4) разумеется, $\langle N, x_i \rangle = \Delta(x_i) = 0$, так как определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю. Это означает, что в любой момент $t \in I$ вектор $N(t)$ перпендикулярен каждому из векторов $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$;

5) координаты N^i вектора N суть миноры матрицы $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)]$, взятые с подходящим знаком. Так как при любом $t \in I$ векторы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)$ линейно независимы, то ранг матрицы $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m-1}(t)]$ (т. е. наибольший порядок отличного от нуля минора) равен $m - 1$. Значит, среди координат вектора N есть хотя бы одна ненулевая координата, т. е. $N(t) \neq \vec{0}$ для любого $t \in I$;

¹⁾ Точнее даже так: если элементы определителя есть функции класса гладкости не ниже C^k , то сам определитель — функция класса гладкости не ниже k .

²⁾ Это очевидно только для тех, кто умеет раскладывать определитель по последнему столбцу.

6) согласно аксиоме положительной определенности скалярного произведения

$$\langle N, N \rangle = \det [x_1(t), x_2(t), \dots, N(t)] > 0.$$

Это означает, что в любой момент $t \in I$ ориентация базиса $(x_1(t), x_2(t), \dots, N(t))$ положительна.

Теперь, для завершения доказательства, остается положить

$$n(t) = \frac{N(t)}{|N(t)|}.$$

Это и есть искомая вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям леммы. Единственность построенной вектор-функции в каждый момент времени t следует из леммы п. 4. \blacklozenge

В процессе приведенного доказательства возникла замечательная конструкция — вектор N , координаты которого суть алгебраические дополнения к элементам последнего столбца матрицы $[x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x]$. Он перпендикулярен данным векторам $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in \overline{\mathbf{R}}^m$ и ориентация базиса (x_1, x_2, \dots, N) положительна.

Посчитаем, ради интереса ¹⁾, длину столь замечательного вектора N :

$$|N| = \sqrt{\langle N, N \rangle} = \sqrt{\det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N]},$$

т. е.

$$|N|^2 = \det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N].$$

Рассмотрим квадрат определителя $\det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N]$:

$$\begin{aligned} (\det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N])^2 &= \\ &= \det {}^t[x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N] \cdot \det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N] = \\ &= \det \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} {}^t[x_1] \\ {}^t[x_2] \\ \vdots \\ {}^t[x_{m-1}] \\ {}^t[N] \end{array} \right] \\ \cdot [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N] \end{array} \right) = \end{aligned}$$

¹⁾ И не только ради интереса и процветания на Земле всего жизнерадостного сообщества прогрессивных Хомо Сапиенсов. Знать длину этого вектора нам очень понадобится в дальнейшем.

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{=}{=} \\
 & \text{в ортонормированном базисе} \\
 = \det & \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_{m-1} \rangle & \langle x_1, N \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_{m-1} \rangle & \langle x_2, N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{m-1}, x_1 \rangle & \langle x_{m-1}, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_{m-1}, x_{m-1} \rangle & \langle x_{m-1}, N \rangle \\ \langle N, x_1 \rangle & \langle N, x_2 \rangle & \cdots & \langle N, x_{m-1} \rangle & \langle N, N \rangle \end{bmatrix} = \\
 = \det & \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_{m-1} \rangle & 0 \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_{m-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{m-1}, x_1 \rangle & \langle x_{m-1}, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_{m-1}, x_{m-1} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle N, N \rangle \end{bmatrix} = \\
 = \langle N, N \rangle \cdot \det & \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_{m-1} \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_{m-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_{m-1}, x_1 \rangle & \langle x_{m-1}, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_{m-1}, x_{m-1} \rangle \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Получается, что

$$(\det [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N])^2 = |N|^4 = \langle N, N \rangle \cdot g = |N|^2 \cdot g,$$

где g — определитель матрицы Грама системы векторов x_1, \dots, x_{m-1} , и, следовательно, $|N| = \sqrt{g}$.

Из свойств матрицы Грама (см. п.4) получаем $\sqrt{g} = V[x_1, \dots, x_{m-1}]$ — объем параллелопада, построенного на векторах x_1, \dots, x_{m-1} , поэтому $|N| = \sqrt{g} = V[x_1, \dots, x_{m-1}]$.



Оказывается, длина вектора N численно равна объему параллелопада, построенного на векторах x_1, \dots, x_{m-1} , которым вектор N обязан своим существованием!

О чем говорят перечисленные свойства вектора N ? Да о том, что вектор N , построенный при доказательстве нашей леммы, является *многомерным* аналогом векторного произведения в трехмерном пространстве. Судите сами: векторное произведение $c = a \times b$ пары векторов $a, b \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^3$ перпендикулярно каждому сомножителю. Тройка (a, b, c) — правая (ориентация положительна). Длина вектора c численно равна площади параллелограмма,

построенного на векторах a и b . А вот координаты вектора c есть алгебраические дополнения к элементам последнего столбца матрицы

$$\begin{bmatrix} a^1 & b^1 & \bullet \\ a^2 & b^2 & \bullet \\ a^3 & b^3 & \bullet \end{bmatrix},$$

где a^i, b^i — координаты векторов a и b . В трехмерном пространстве наш вектор N есть просто векторное произведение $N = a \times b$.



В случае двумерного пространства описанная конструкция вектора N дает вектор, перпендикулярный к данному вектору $a = {}^t(a^1, a^2) \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^2$ с координатами $N = {}^t(-a^2, a^1)$, которые являются алгебраическими дополнениями к элементам последнего столбца матрицы

$$\begin{bmatrix} a^1 & \bullet \\ a^2 & \bullet \end{bmatrix}.$$



Резонно теперь, в случае пространств произвольных размерностей, вектор $N \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$, обладающий следующими свойствами:

- 1) N перпендикулярен данным линейно независимым векторам $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$,
- 2) N имеет длину \sqrt{g} (где g — определитель матрицы Грама данной системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$),
- 3) N образует с данными векторами базис $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, N)$ положительной ориентации,

называть *обобщенным векторным произведением векторов* $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$.

Это удобное и естественное название не является общепринятым в математической литературе, но в нашей книжке мы, безусловно, будем им пользоваться. Кроме того, договоримся обозначать обобщенное векторное произведение векторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$ ($m \geq 2$) следующим образом:

$$N = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{m-1}.$$

Обратите внимание, что обобщенное векторное произведение векторов из пространства $\overrightarrow{\mathbf{R}}^m$, $m \geq 2$, является $(m-1)$ -местной операцией.

Пункт 6 закончен.

Задачи и упражнения



1. Найти обобщенное векторное произведение векторов:

а) ${}^t(3, -4)$;
 б) ${}^t(3, 2, -1), {}^t(-2, 5, -3)$;
 в) ${}^t(3, 2, -1, 4), {}^t(0, 1, -1, 3), {}^t(-2, 2, 3, 2)$;
 г) ${}^t(3, 2, -1, 4, 1), {}^t(0, 2, 1, 0, 1), {}^t(1, -1, -1, 4, 5), {}^t(-4, 0, -1, 0, 2)$.

Вычислите объемы параллелотопов, построенных на данных векторах.

2. Найдите нормальный вектор единичной длины к подпространству, порожденному векторами:

а) $x(t) = {}^t(t^2 + 2t, 3t^2, t^2 - t), \dot{x}(t) = {}^t(2t + 2, 6t, 2t^2 - 1)$;
 б) $x(t) = {}^t(t^3 + 1, 3t^2, t^3 - t^2, 2t^3), \dot{x}(t) = {}^t(3t^2, 6t, 3t^2 - 2t, 6t^2), \ddot{x}(t) = {}^t(6t, 6, 6t - 2, 12t)$.

Попробуйте объяснить, почему получившийся нормальный вектор постоянный и что это значит.

3. Докажите для обобщенного векторного произведения аналоги свойств обычного векторного произведения:

а) обобщенное векторное произведение антикоммумутативно по любой паре аргументов;
 б) обобщенное векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда аргументы линейно зависимы;
 в) обобщенное векторное произведение линейно по каждому аргументу.

4. Пусть $a, b, c \in \overrightarrow{\mathbf{R}}^4$ и вектор a не коллинеарен вектору b . Найдите необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $a \times b \times x = c$. Если вам это удалось, то найдите общее решение этого уравнения.

7. Аффинные евклидовы пространства

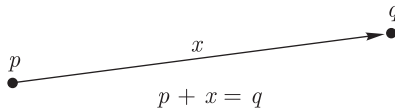
До сих пор основными объектами нашей книжки были векторы и векторные пространства. В дальнейших рассмотрениях нам будет выгодно наряду с понятием «вектор» ввести в употребление понятие «точка», которое тоже, как и понятие «вектор», в общем-то, неопределяемое¹⁾. Мы договоримся всегда различать «точки» и «векторы».

¹⁾ Можно, конечно, пытаться эти понятия определять и говорить, что вектор — это элемент векторного пространства, точка — суть элемент аффинного пространства, но такие «определения», по сути, ничего не определяют, ибо точками и векторами могут при этом являться любые объекты: направленные отрезки, матрицы, функции, воздушные шарики или, как говорил Давид Гильберт, — пивные кружки. Здесь важно лишь наличие соответствующих операций с этими объектами и выполнение аксиом соответствующего пространства.

Зачем нам это? Вот цитата, мотивирующая наши усилия: «Для построения *полноценной* геометрии одних векторов, конечно, недостаточно; *как минимум нужны еще точки*». ¹⁾ Следуя этой простой но сильной мысли, освежим в памяти светлый образ аффинного пространства, в котором удивительным образом живут на равных правах как нужные и нежные точки, так и гордые свободные векторы.

Пусть \mathbf{V} — непустое множество элементов произвольной природы, которые мы будем называть *точками* ²⁾, $\vec{\mathbf{V}}$ — векторное пространство над полем \mathbf{R} , элементы которого мы, как обычно, будем называть *векторами*. Рассмотрим естественную (с точки зрения общечеловеческой геометрической интуиции) операцию «плюс» — *откладывание вектора от точки*:

$$+ : (V \times \vec{V}) \rightarrow V$$



На представленном рисунке p и q — точки из \mathbf{V} , x — вектор из $\vec{\mathbf{V}}$, точка q есть *результат откладывания вектора x от точки p* , что естественно записывать так: $p + x = q$.

Заметим, что операция «+» некоммутативная, ибо мы можем отложить вектор от точки, но что значит «откладывать точку от вектора»? Будет удобно договориться на будущее, что запись $q - p = x$ означает просто $p + x = q$, а *разность точек $q - p$* означает вектор, *соединяющий* эти точки (обозначаемый, обычно \vec{pq}). Удобно (и привычно) называть точку q *концом*, а точку p — *началом* соединяющего их вектора.

Определение 7.1. *Аффинным пространством (над векторным пространством $\vec{\mathbf{V}}$) называется тройка $(\mathbf{V}, \vec{\mathbf{V}}, +)$, где \mathbf{V} — непустое множество точек, $\vec{\mathbf{V}}$ — векторное пространство ³⁾,*

¹⁾ См.: М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979. С. 40, четвертая и третья строчки с конца, курсив мой. Мне хочется продолжить цитируемое предложение так: «...и годы упорного умственного труда...».

²⁾ При слове «точка» я, все-таки, мысленно представляю себе не объекты произвольной природы, типа пивных кружек, а маленький черненький кружок, стоящий в конце этого предложения.

³⁾ Элементы этого векторного пространства иногда называют «свободными векторами» — этот термин любят в теоретической механике.

«+» — операция откладывания вектора от точки; при условии, что выполнены следующие аксиомы:

- 1) для любой точки $p \in \mathbf{V}$ и любого вектора $x \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$ существует единственная точка $q \in \mathbf{V}$ такая, что $p + x = q$;
- 2) для любых точек $p, q \in \mathbf{V}$ существует единственный вектор $x \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$, соединяющий эти точки: $q - p = x$;
- 3) для любой точки $p \in \mathbf{V}$ и любой пары векторов $x, y \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$ выполнено: $p + (x + y) = (p + x) + y$.¹⁾

Для крепкого запоминания этих аксиом никаких титанических усилий не требуется, для нас эти аксиомы совершенно естественны и привычны, по сути, еще со школьной скамьи. Однако, поскольку в разных учебниках приводятся, порой, различные варианты аксиоматики аффинного пространства, то чтобы быть уверенным в равносильности этих вариантов (а также для того, чтобы освоиться и привыкнуть работать в аффинных пространствах), я настоятельно советую вам выполнить следующие

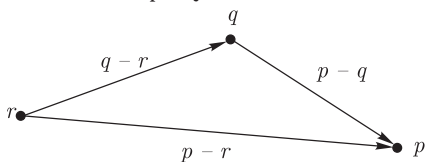
Упражнение 7.1. Докажите, что для любых точек $p, q, r \in \mathbf{V}$ и любого вектора $x \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$ выполнено:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $p - p = \vec{0}$, | 2) $p - q = -(q - p)$, |
| 3) $p + (q - p) = q$, | 4) $(p + x) - p = x$. |

Упражнение 7.2. Докажите, что пара аксиом 2) и 3) из определения аффинного пространства равносильна одной аксиоме

$$(p - q) + (q - r) = p - r.$$

Отмечу, что равенство $(p - q) + (q - r) = p - r$ иногда называют «аксиомой треугольника» или «аксиомой Шаля»²⁾. Название «аксиома треугольника» становится абсолютно понятным, если внимательно разглядывать рисунок, водя по нему пальцем:



¹⁾ Обратите внимание на разный смысл знаков плюс в постулируемом равенстве: в левой части равенства первый знак плюс — откладывание вектора от точки, а второй плюс — сложение векторов. В правой части равенства оба знака плюс есть откладывание вектора от точки. Вот как причудлива порой современная математическая символика!

²⁾ Мишель Шаль (M. Chasles, 1793–1880) — французский геометр.

Определение 7.2. Размерностью аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ называется размерность векторного пространства \vec{V} .



Пример 7.1 аффинного пространства. Рассмотрим тройку $(\mathbf{R}^m, \vec{\mathbf{R}}^m, +)$. В этой тройке множеством точек является множество \mathbf{R}^m — всевозможные m -элементные столбцы из действительных чисел; $\vec{\mathbf{R}}^m$ — арифметическое векторное пространство размерности m ; операция откладывания вектор-столбца от точки-столбца определяется совершенно естественным образом — как покоординатное сложение двух столбцов.

Совершенно очевидно, что для тройки $(\mathbf{R}^m, \vec{\mathbf{R}}^m, +)$ выполнены все аксиомы из определения аффинного пространства, поэтому $(\mathbf{R}^m, \vec{\mathbf{R}}^m, +)$ — аффинное пространство. Будем обозначать это аффинное пространство символом \mathbf{R}^m (без стрелочки над буквой) и называть *арифметическим аффинным пространством размерности m* .

Наконец-то стала понятна моя прихоть — ставить стрелочку над обозначением векторного пространства! Оказывается, это нужно чтобы отличать векторные пространства от аффинных пространств, вектор-столбцы — от точек-столбцов, и т. д.

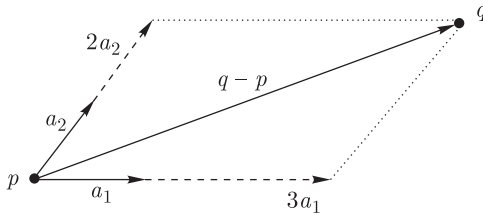
Из курса алгебры известно ¹⁾, что аффинные пространства одинаковой размерности изоморфны ²⁾, поэтому приведенный выше пример конечномерного аффинного пространства является, в некотором смысле, единственно возможным и каноническим. Осмотрите его и запомните, ведь именно в этом аффинном пространстве нам предстоит в дальнейшем жить и работать.

Определение 7.3. Репером в аффинном пространстве $(V, \vec{V}, +)$ называется упорядоченный набор $(p; a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $p \in V$ — точка, называемая *началом координат*, (a_1, a_2, \dots, a_n) — базис векторного пространства \vec{V} . *Координатами точки $q \in V$ в репере $(p; a_1, a_2, \dots, a_n)$ называются координаты вектора \vec{pq} в базисе (a_1, a_2, \dots, a_n) . Вектор \vec{pq} называется *радиус-вектором точки q в репере $(p; a_1, a_2, \dots, a_n)$* .*

Пример 7.2. На рисунке ниже точка q имеет в репере $(p; a_1, a_2)$ на аффинной двумерной плоскости координаты $(3, 2)$:

¹⁾ См., напр.: Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975. С. 333 и около.

²⁾ Разумеется, в случае конечных размерностей.



Легко сообразить, что в аффинном пространстве \mathbf{R}^m точка-столбец $p = {}^t(p^1, p^2, \dots, p^m) \in \mathbf{R}^m$ имеет в некотором репере набор координат в точности (p^1, p^2, \dots, p^m) тогда и только тогда, когда началом координат в этом репере является точка $o = {}^t(0, 0, \dots, 0)$, а в качестве базиса взят стандартный базис (e_1, e_2, \dots, e_m) пространства \mathbf{R}^m . Договоримся называть репер $(o; e_1, e_2, \dots, e_m)$ *стандартным*.



В дальнейших рассмотренных (особенно в главе «Поверхности») нам понадобится следующее простое определение.

Определение 7.4. Пусть в аффинном пространстве $(\mathbf{V}, \vec{\mathbf{V}}, +)$ зафиксирована некоторая точка $p \in \mathbf{V}$. Множество всех векторов $a \in \vec{\mathbf{V}}$, отложенных от точки $p \in \mathbf{V}$, очевидно, является **векторным пространством**, изоморфным пространству $\vec{\mathbf{V}}$. Оно называется *центроаффинным пространством, отложенным от точки $p \in \mathbf{V}$ (приклеенным к точке $p \in \mathbf{V}$)* и обозначается символами $\vec{\mathbf{V}}_p$ или $T_p \mathbf{V}$.

Определение 7.5. Аффинное пространство $(\mathbf{V}, \vec{\mathbf{V}}, +)$ называется *евклидовым*, если векторное пространство $\vec{\mathbf{V}}$ является евклидовым.



Сразу отметим, что в аффинном евклидовом пространстве $(\mathbf{V}, \vec{\mathbf{V}}, +)$ множество точек \mathbf{V} является метрическим пространством, ибо расстояние между любыми точками p и q множества \mathbf{V} (метрика на \mathbf{V}) определяется очень легко и естественно:

$$\rho(p, q) = |\vec{pq}| = \sqrt{\langle q - p, q - p \rangle}.$$

Упражнение 7.3. Проверьте, что так определенная функция $\rho(p, q)$ действительно является метрикой.



Еще раз (как и в п.4) прошу обратить внимание, что если на двух экземплярах одного и того же аффинного пространства $(\mathbf{V}, \vec{\mathbf{V}}, +)$ задать *разные* скалярные произведения,

то получатся *разные* аффинные евклидовы пространства, т.е. пространства с разными метриками! Это обстоятельство сыграет огромную роль в теории поверхностей.

Заканчивая седьмой пункт нашей книжки, напомним некоторые полезные факты об отображениях аффинных пространств.

Определение 7.6. Пусть \mathbf{V} и \mathbf{V}' — аффинные пространства над векторными пространствами $\vec{\mathbf{V}}$ и $\vec{\mathbf{V}}'$ соответственно. Отображение $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ называется *аффинным*, если существует линейный оператор $\vec{A} : \vec{\mathbf{V}} \rightarrow \vec{\mathbf{V}}'$ такой, что для любых двух точек $p, q \in \mathbf{V}$ и любого вектора $x \in \vec{\mathbf{V}}$ выполнено

- 1) $A(p) - A(q) = \vec{A}(p - q)$ или, что то же самое,
- 2) $A(p + x) = A(p) + \vec{A}(x)$.

Определение 7.7. Аффинное отображение $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ евклидовых аффинных пространств \mathbf{V} и \mathbf{V}' называется *изометрией*, если для любых двух точек $p, q \in \mathbf{V}$ выполнено

$$|A(p) - A(q)| = |p - q|,$$

т.е. отображение A сохраняет расстояние в аффинном евклидовом пространстве.



Упражнение 7.4. (Очень известный факт). Докажите, что отображение $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ евклидовых аффинных пространств является изометрией тогда и только тогда, когда соответствующий линейный оператор $\vec{A} : \vec{\mathbf{V}} \rightarrow \vec{\mathbf{V}}'$ ортогонален.

Ну, и, наконец, я заострю ваше внимание на простом наблюдении. Пусть $A : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ — аффинное отображение. Зафиксируем в \mathbf{R}^m какой-нибудь репер с начальной точкой $o = {}^t(0, 0, \dots, 0)$. Тогда для любого вектора $\vec{x} \in \vec{\mathbf{R}}^m$ (стрелка над вектором \vec{x} поставлена для того, чтобы отличить в пространстве \mathbf{R}^m «вектор \vec{x} » от «точки x с радиус-вектором \vec{x} ») выполняется

$$A(o + \vec{x}) = A(o) + \vec{A}(\vec{x}), \quad \text{т.е. } A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x}).$$

Последнее равенство означает буквально следующее: всякое аффинное преобразование пространства есть перенос исходного начала координат — точки $o = {}^t(0, 0, \dots, 0)$ — в некоторую точку p_0 с последующим запуском в действие линейного оператора \vec{A} . Так, например, если \vec{A} — ортогональный оператор (преобразование A — изометрия), то возможны два случая: $\det \vec{A} = 1$ и $\det \vec{A} = -1$. В первом случае ориентация пространства сохраняется, а изометрия A является композицией параллельного

переноса начальной точки o в точку p_0 и некоторого поворота векторов исходного репера (с сохранением длин векторов и углов между ними). Такая изометрия обычно называется *движением*. Во втором случае ($\det \vec{A} = -1$) ориентация пространства меняется на противоположную, и такую изометрию часто называют *симметрией*.¹⁾

Я считаю, что к наступившему моменту мы разложили по полочкам нашего сознания все необходимые предварительные сведения и достигли кое-каких договоренностей про термины и обозначения. Если что-то оказалось упущенным, то далее вспоминать и договариваться будем уже по ходу основного изложения.

Друзья! Мы настолько прониклись духом трепетного ожидания волнующей встречи с настоящей геометрией, что встречаем конец этого пункта, а вместе с ним и всего первого параграфа, не только с удовлетворением, но и с безграничной радостью. Впереди нас ждет много интересного!

Задачи и упражнения



1. В плоскости $\pi \subset \mathbf{R}^3$, проходящей через три точки: $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, 0)$ и $C(-3, 0, 4)$ зафиксирован репер $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$. Точка $p \in \pi$ имеет в этом репере координаты $(5, 3)$. Найдите координаты точки p в стандартном репере пространства \mathbf{R}^3 . Найдите в плоскостном репере координаты точки пересечения плоскости π с прямой

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-6}{0} = \frac{z+2}{3}.$$

2. Найдите длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве \mathbf{R}^5 , если в стандартном репере

$$A(2, 4, 2, 4, 2), \quad B(6, 4, 4, 4, 6), \quad C(5, 7, 5, 7, 2).$$

Напишите канонические уравнения высоты этого треугольника, проходящей через точку A .

3. Параллелограмм в \mathbf{R}^4 построен на векторах

$$\begin{aligned} a_1 &= {}^t(0, 2, 1, 1), & a_2 &= {}^t(1, -2, 0, 3), \\ a_3 &= {}^t(2, 2, 1, -1), & a_4 &= {}^t(3, 2, 2, 5), \end{aligned}$$

¹⁾ Употребительны также термины «движение первого рода» и «движение второго рода» для случаев $\det \vec{A} = 1$ и $\det \vec{A} = -1$ соответственно.

отложенных от точки $p_0(3, 1, 0, 1)$. Проверьте, лежит ли точка $q(4, 2, 1, 5)$ внутри этого параллелотопа, или снаружи? Найдите длину высоты, опущенной из конца вектора a_4 на грань (a_1, a_2, a_3) , и напишите уравнения этой высоты. Найдите объем грани (a_1, a_2, a_3) .

4. Какие фигуры в аффинных пространствах R^2 , R^3 и R^4 задаются уравнениями

$$a) |x - p| = 4, \quad б) |x - p| + |x - q| = 4,$$

если p, q — фиксированные точки?

5. Найдите точки пересечения сферы $|x - p| = 4$ и прямой $x = q + ta$ в R^4 , если $p(1, 2, 1, 3)$, $q(1, 2, 1, 2)$, $a = {}^t(1, -2, 0, 3)$.

6. Напишите уравнение гиперплоскости¹⁾ с нормальным вектором $n = {}^t(3, -2, -4, 5)$, проходящей через точку $A(1, 2, -3, 4)$.

7. Найдите точку B , симметричную точке $A(1, 2, 3, 4)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3$, где

$$p_0 = {}^t(1, 4, -2, 3), \quad a_1 = {}^t(0, 2, 1, 1), \\ a_2 = {}^t(1, -2, 0, 3), \quad a_3 = {}^t(2, 2, 1, -1).$$

8. В пространстве \mathbf{R}^4 найдите угол между двумерными плоскостями $x = p_0 + t_1a_1 + t_2a_2$ и $x = q_0 + t_1b_1 + t_2b_2$, если

$$p_0(3, 1, 0, 1), \quad a_1 = {}^t(1, 0, 0, 0), \quad a_2 = {}^t(0, 1, 0, 0), \\ q_0(2, 1, 1, 3), \quad b_1 = {}^t(1, 1, 1, 1), \quad b_2 = {}^t(1, -1, 1, -1).$$

9. Найдите выражение радиуса R сферы, описанной около n -мерного куба через его ребро a . Сравните величины R и a при разных $n \in \mathbf{N}$.

10. Докажите, что ортогональные проекции вершин n -мерного куба на любую большую диагональ этого куба делят ее на n равных частей.

11. Аффинное отображение $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ пространства \mathbf{R}^3 переводит точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(0, 1, 7)$ в точки $A'(0, 1, 1)$, $B'(2, 1, 0)$, $C'(-2, 0, 3)$, $D'(0, 1, 4)$ соответственно. Найдите точку p_0 и матрицу оператора \vec{A} в стандартном базисе. Найдите образ точки $q(2, -1, 4)$ при этом отображении.

¹⁾ Гиперплоскостью в аффинном пространстве \mathbf{V} называют аффинное подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности всего пространства \mathbf{V} .

12. Изометрия $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ пространства \mathbf{R}^2 , сохраняющая ориентацию, переводит точку $(1, 0)$ в точку $(0, 0)$, а точку $(0, 1)$ — в точку $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$. Найдите точку p_0 и матрицу оператора \vec{A} в стандартном базисе. Отыщите неподвижную точку этой изометрии.

13. Изометрия $A(x) = p_0 + \vec{A}(\vec{x})$ пространства \mathbf{R}^3 поворачивает точки пространства вокруг оси $x = y = z$ на угол $\pi/4$, после чего сдвигает их в направлении этой оси на расстояние 1. Найдите точку p_0 и матрицу оператора \vec{A} в стандартном базисе.

Глава I. Кривые

§ 2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ В АФФИННЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

8. Определение гладкой кривой. Регулярность. Длина кривой

Приступим к делу и зафиксируем в аффинном пространстве \mathbf{R}^m стандартный репер $(o; e_1, e_2, \dots, e_m)$. Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$ — некоторая вектор-функция, определенная на интервале I . Договоримся называть значением вектор-функции $\alpha(t)$ (в момент t) в аффинном пространстве \mathbf{R}^m ту точку, радиус-вектор которой в стандартном репере $(o; e_1, e_2, \dots, e_m)$ есть именно $\alpha(t)$. Не опасаясь путаницы, будем в дальнейшем обозначать такую точку $o + \alpha(t)$ просто $\alpha(t)$.

Определение 8.1. Гладкой кривой в аффинном пространстве \mathbf{R}^m называется гладкая вектор-функция $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ со значениями в аффинном пространстве \mathbf{R}^m .

Множество $\alpha(I) = \{\alpha(t) | t \in I\}$ всех точек, являющихся значениями функции $\alpha(t)$ называется *образом кривой $\alpha(t)$ в аффинном пространстве \mathbf{R}^m* . Будем говорить, что кривая $\alpha(t)$ задана *параметрически*, если явно указаны все ее координатные функции:

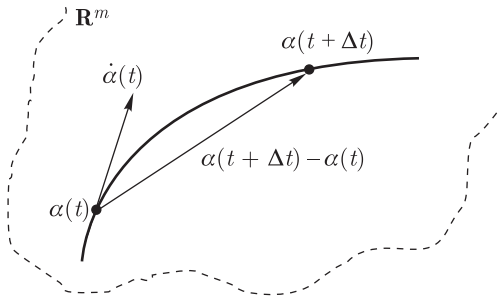
$$\alpha(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)).$$



Таким образом, кривая — это *гладкое отображение* интервала во множество точек аффинного пространства.

Замечание. Если нужда заставит нас рассматривать кривую $\alpha(t)$, определенную не на интервале, а на отрезке $[a, b]$, то будем называть ее *гладкой*, если на интервале (a, b) кривая $\alpha(t)$ — гладкая в смысле предыдущих определений, а в крайних точках a и b у вектор-функции $\alpha(t)$ существуют соответствующие одно-сторонние производные сколь угодно высокого порядка.

Рассмотрим картинку.



На ней изображены: извилистая пунктирная линия, символизирующая безграничность аффинного пространства \mathbf{R}^m , образ кривой $\alpha(t)$ в этом пространстве и два вектора. Четко просматривается *вектор* секущей $\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)$, соединяющий две точки $\alpha(t)$ и $\alpha(t + \Delta t)$ кривой α . Поскольку разность между двумя точками является *вектором*, то значение выражения

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \dot{\alpha}(t)$$

(производная кривой α в точке t) является *вектором*. Вектор $\dot{\alpha}(t)$, будучи предельным положением секущего вектора, является *направляющим вектором касательной* к кривой α в точке t .¹⁾ Кроме того, помня и уважая физический смысл производной, мы иногда будем называть вектор $\dot{\alpha}(t)$ *вектором (мгновенной) скорости* точки $\alpha(t)$.



Моментально пишется уравнение касательной к кривой $\alpha(t)$ в \mathbf{R}^m в момент времени t_0 :

$$p = \alpha(t_0) + u\dot{\alpha}(t_0),$$

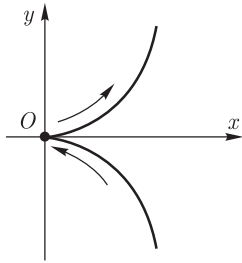
где p — произвольная точка касательной, $u \in \mathbf{R}$ — параметр.

Ясно, что направляющий вектор $\dot{\alpha}(t_0)$ касательной к кривой должен быть отличен от нуля, иначе написанное уравнение просто теряет смысл. Вот первый пришедший мне в голову пример подобной потери смысла.

Пример 8.1. Рассмотрим кривую $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданную параметрически: $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3)$. Легко сообразить, что в декарто-

¹⁾ Точнее, направляющим вектором касательной к образу кривой α , но мы частенько (не в ущерб пониманию, конечно) будем допускать подобную вольность речи, отождествляя кривую с ее образом.

вой прямоугольной системе координат XOY (т. е. в стандартном репере), образ этой кривой имеет уравнение $x^3 = y^2$, т. е.



$y = \pm\sqrt{x^3}$. Эта кривая называется «полукубическая парабола». Ее производная в точке $t_0 = 0$ равна $\dot{\alpha}(t) = (2t, 3t^2)|_{t_0=0} = (0, 0)$ — это нулевой вектор! Направляющий вектор касательной к α в точке $t_0 = 0$ (а касательная-то существует — это ось OX !) нам придется научиться находить из других соображений в одном из следующих пунктов. Поскольку производная $\dot{\alpha}(t)$ является вектором мгновенной скорости, то

в этом примере точка $\alpha(t)$, двигаясь с ростом параметра t снизу вверх по полукубической параболе, просто-напросто «тормозит» в начале координат и ее скорость там нулевая.

Чувствуется, что «торможение», т. е. обращение в нуль вектора скорости в некоторой точке, может создать определенные неприятности при изучении кривых.¹⁾ Дадим следующее определение. Оно позволит нам, для начала, приятные и неприятные точки хотя бы называть по-разному.



Определение 8.2. Гладкая кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *регулярной в момент времени* $t \in I$, если $\dot{\alpha}(t) \neq \vec{0}$. Кривая $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *регулярной на интервале* I , если она регулярна в каждой точке этого интервала.

Замечание. Довольно часто прилагательное «регулярная» мы будем употреблять и применительно к функциям вида $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, подразумевая при этом, что функция f является непрерывно-дифференцируемой и ее производная отлична от нуля в каждой точке интервала I .

Таким образом, регулярные кривые — это храбрые джигиты, которые на интервале I нигде не тормозят. Свойство регулярности интуитивно является очень хорошим, ибо в каждой точке регулярной кривой определен ненулевой касательный вектор, следовательно, для регулярной кривой легко написать уравнение касательной. Кроме этого, регулярные кривые имеют еще массу замечательных свойств, о которых мы поговорим в следующих пунктах, а сейчас давайте пойдем дальше. Я предлагаю вам мысленно прогуляться пешком.

¹⁾ В таких точках, например, невозможно сразу написать уравнение касательной к кривой.

Почти любому человеку известно, что если идти два часа со скоростью 5 километров в час, то пройдешь 10 километров, причем независимо от того, по прямой дороге ты идешь, или по кривой. Тут важен модуль скорости, а не ее направление. Математик способен на большее. Он, даже стоя на месте, в состоянии сообразить, что если идти со скоростью $|v|$ в течение промежутка времени Δt , то преодолеешь расстояние $|v| \cdot \Delta t$. Если же, как назло, при ходьбе модуль скорости изменяется, то математика это не остановит. Для нахождения пройденного пути ℓ он разобьет время передвижения на маленькие промежутки Δt_k , скорость $|v_k|$ на каждом из этих промежутков объявит величиной постоянной, найдет пути $|v_k| \cdot \Delta t_k$, пройденные на каждом из промежутков времени, и все их сложит: $\ell \approx \sum_k |v_k| \cdot \Delta t_k$.

Если же вы попытаетесь упрекнуть хитрого математика, что он нашел длину пройденного пути лишь приближенно, то услышите достойный ответ: хотите посчитать точнее — уменьшайте величину промежутков Δt_k . Правда, возрастет их число, но зато на каждом из них скорость $|v_k|$ меньше отличается от реальной, поэтому и результат будет точнее:

$$\ell = \lim_{\max |\Delta t_k| \rightarrow 0} \sum_k |v_k| \cdot \Delta t_k = \int_{\substack{\text{момент} \\ \text{финиша}}}^{\substack{\text{момент} \\ \text{старта}}} |v| dt.$$

Вскрытые здесь соображения математика дают весьма веские основания для следующего определения.



Определение 8.3. *Длиной $\ell[\alpha]$ кривой $\alpha(t) : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется интеграл от модуля скорости этой кривой:*

$$\ell[\alpha] = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

В том случае, когда некоторый промежуток $[c, d]$ лежит строго внутри интервала I , мы иногда будем употреблять понятный термин *длина дуги кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ между точками c и d* (или, даже менее корректно: *длина дуги*¹⁾ *между точками $\alpha(c)$*

¹⁾ Что такое дуга?

и $\alpha(d)$) и использовать обозначение

$$\ell[\alpha]_c^d = \int_c^d |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

Отметим, что в случае неограниченного интервала I длинной кривой $\alpha(t) : I \rightarrow R^m$ называют значение соответствующего несобственного интеграла $\ell[\alpha] = \int_I |\dot{\alpha}(t)| dt$, если такой интеграл сходится.

Заметим также, что интеграл, указанный в приведенном определении длины кривой на отрезке, всегда существует, так как модуль скорости гладкой кривой есть скалярная функция, заведомо непрерывная и ограниченная на отрезке $[a, b]$. Кривая $\alpha(t)$, у которой между любой парой точек t_1 и t_2 существует длина дуги $\ell[\alpha]_{t_1}^{t_2}$, традиционно называется *спрямляемой*. Мы, таким образом, всюду далее будем иметь дело только со спрямляемыми кривыми, однако я хочу предостеречь читателей от излишней расслабленности. Не все кривые спрямляемы! В курсе математического анализа строятся примеры не спрямляемых кривых. И не следует считать эту деятельность злонамеренным вредительством! Эти примеры необходимы для четкого понимания понятий «интеграл» и «длина». Они служат как делу построения общей теории, так и делу воспитания грамотных математиков.

Задачи и упражнения



1. Лестница AB длины a скользит своими концами по осям прямоугольной системы координат, которую студенты заботливо натерли мылом. Прямые AC и BC , параллельные координатным осям, пересекаются в точке C , из которой проведен перпендикуляр CM к лестнице AB . Точка M обозначена этой буквой не случайно, поскольку перепуганный монтер, почуввав скольжение лестницы, сползает по ней вниз так, что сливается с точкой M в одно перепуганное целое. Найдите параметрическое задание траектории монтера. (*Астроида*.)

2. Колесо радиуса a катится по ровной прямой дороге. Найдите параметризацию траектории точки K , жестко связанной с колесом и находящейся на расстоянии d от его центра ($d < a$ — *эпициклоида*, $d = a$ — *циклоида*, $d > a$ — *гипоциклоида*).

3. Луч OL вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω . Точка M движется по лучу OL со скоростью, пропорциональной расстоянию $|OM|$. Найдите параметризацию траектории точки M . (*Логарифмическая спираль*.)

4. На плоскости XOY на оси OY в точке $(0, a)$ стоит тракторная тележка. Трактор поставили в начало координат и привязали к тракторной тележке веревочкой длины a . Трактор пошел по оси OX . Тележка, естественно, покатилаь за ним так, что веревочка длины a всегда является касательной к траектории тележки. Найдите параметризацию этой траектории. (Вы будете смеяться, но эта линия называется *трактриса*.)

5. Таракан равномерно бежит по полу кабины лифта, пропавшая окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Лифт равномерно движется вверх вдоль оси OZ со скоростью b . Найдите параметрическое задание траектории таракана в \mathbf{R}^3 . (*Винтовая линия*.)

6. Найдите параметризацию кривой, образ которой есть пересечение сферы радиуса R и прямого кругового цилиндра диаметра R , одна из образующих которого проходит через центр сферы. (*Кривая Вивьяни*.)

7. Найдите параметризацию кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$, удовлетворяющей уравнению $\ddot{\alpha}(t) = \vec{a}$, где \vec{a} — фиксированный вектор.

8. Траектория электрона $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ в постоянном магнитном поле задается уравнением $\ddot{\alpha} = \dot{\alpha} \times \vec{H}$, где \vec{H} — постоянный ненулевой вектор (напряженности магнитного поля). Докажите, что траектория электрона — винтовая линия.

9. Напишите уравнения касательной к кривой $\alpha(t)$ в точке $t_0 = 1$, если:

а) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3)$; б) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3, 2t)$; в) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3, 2t, t^4)$.

10. Найдите наиболее удаленные от начала координат касательные к астроида $\alpha(t) = {}^t(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$.

11. Найдите длину одной арки циклоиды.

12. Найдите длину первого витка *спирали Архимеда* $\rho = a\varphi$.

13. Найдите длину *кардиоиды* $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

14. Найдите длину одного витка винтовой линии.

15. Найдите длину дуги между двумя произвольными точками следующих кривых:

а) $y = \ln x$; б) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$;

в) $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$

г) $\alpha(t) = {}^t(\cos t, \sin t, t, \ln(\cos 2t))$.

16. Найдите параметризацию кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки A до произвольной точки M , пропорциональна углу кривой к коэффициенту касательной, проведенной в точке M .

9. Замена параметра. Эквивалентность кривых

Перейдем теперь к рассмотрению чрезвычайно важного понятия в дифференциальной геометрии — понятия замены параметра у кривой.

Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^m$ — две гладкие кривые, определенные на интервалах I и J соответственно.



Определение 9.1. Говорят, что кривая β получается из кривой α заменой параметра φ , если найдется гладкое отображение φ такое, что:

- 1) $\varphi : J \xrightarrow{\text{на}} I$, т. е. φ — сюръекция;
- 2) $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0$ для всех $\theta \in J$, т. е. φ — регулярно;
- 3) $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta))$ для любого $\theta \in J$, т. е. $\beta = \alpha \circ \varphi$.

Вот рисунок, неплохо иллюстрирующий ситуацию:

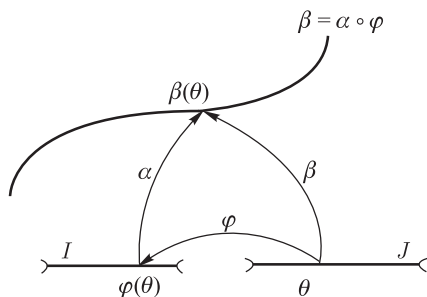


Рис. 9.1

Если кривая β получается из кривой α заменой параметра, то часто говорят просто: *кривые α и β связаны заменой параметра*, не указывая явно, какая кривая из какой получается. Железное оправдание такой вольности речи заключается в следующем простом, но очень важном наблюдении.



Важное наблюдение 9.1. Бинарное отношение между кривыми «быть связанными заменой параметра» является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Доказательство. Рефлексивность очевидна. Всякая кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ получается из самой себя (т. е. из кривой $\alpha : I \rightarrow \rightarrow bf R^m$) заменой параметра $\varphi : I \xrightarrow{\text{на}} I$, где $\varphi(\theta) = \theta$ — тождественное отображение, которое, конечно, регулярно, т. к. $\dot{\varphi} \equiv 1$.

Симметричность нашего бинарного отношения устанавливается чуть сложнее, так как придется вспомнить счастливые мгновения из лекций по математическому анализу на первом курсе. Пусть кривая $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^m$ получается из кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ заменой параметра $\varphi : J \rightarrow I$, т. е. $\beta = \alpha \circ \varphi$. Поскольку производная $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала J и непрерывна на нем, то она либо всюду положительна на J , либо всюду отрицательна. Это означает, что сама функция φ строго монотонна на J , и, стало быть, $\varphi : J \rightarrow I$ — биекция. Это, в свою очередь, означает, что существует обратная функция $\psi = \varphi^{-1} : I \xrightarrow{\text{на}} J$, которая, так же как и φ , строго монотонна, непрерывна и дифференцируема. Поскольку φ — регулярна, производная обратной функции $\dot{\psi} = \frac{1}{\dot{\varphi}}$ также регулярна (на интервале I), следовательно, ψ — прекрасная замена параметра и кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ получается из кривой $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^m$ следующим образом: $\alpha = \beta \circ \psi$. Значит, если кривая α связана с кривой β заменой параметра φ , то кривая β связана с кривой α заменой параметра φ^{-1} , симметричность доказана и вольность фразы «кривые α и β связаны заменой параметра» оправдана.

Транзитивность. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\gamma : K \rightarrow \mathbf{R}^m$ — три гладкие кривые, последовательно связанные заменой параметров $\varphi : J \rightarrow I$ и $\phi : K \rightarrow J$, т. е. $\beta = \alpha \circ \varphi$, $\gamma = \beta \circ \phi$. Очевидно, кривые α и γ также связаны между собой: $\gamma = \alpha \circ \varphi \circ \phi$, где композиция отображений $(\varphi \circ \phi) : K \rightarrow I$, будучи композицией гладких регулярных сюръекций, является заменой параметра (см. рис. 9.2).

Итак, бинарное отношение между кривыми «быть связанными заменой параметра» есть отношение эквивалентности. \blacklozenge



В дальнейшем, совершенно законно опираясь на проверенное наблюдение, мы будем вместо фразы «кривые α и β связаны заменой параметра» говорить короче: «кривые α и β эквивалентны», если, разумеется, в контексте не идет речь о каком-либо другом отношении эквивалентности на множестве кривых.

Прямо из определения следует, что у двух регулярных эквивалентных кривых образы совпадают. Казалось бы, справедливо

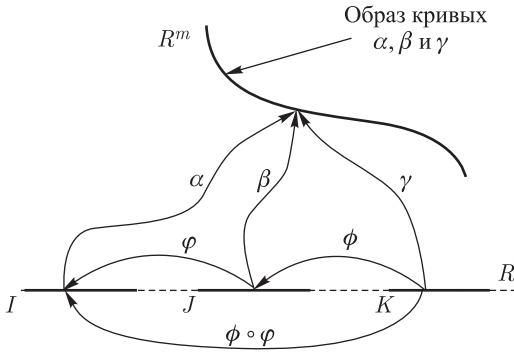


Рис. 9.2

и обратное утверждение — если образы регулярных кривых совпадают (смотрим снова рис. 9.1), то кривые α и β должны быть эквивалентны. Естественная кандидатура на замену параметра — функция $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta$. Однако отображение α^{-1} не всегда существует, а даже когда оно существует (т.е. когда кривая α — инъективна, без точек самопересечения и наложений), обратное утверждение не всегда верно. Вот пример не эквивалентных инъективных регулярных кривых с одинаковыми образами.

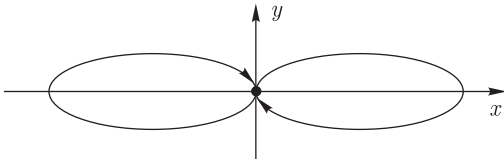
Рассмотрим кривую $\tilde{\alpha} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданную параметрически:

$$\tilde{\alpha}(t) = (\sin t, 2 \sin(2t)).$$

Образом этой кривой является «восьмерка», вальжжно лежащая на боку, а точка плоскости $(0, 0) = \tilde{\alpha}(\pi k), k \in \mathbf{Z}$, является точкой самопересечения. Слегка модифицируем отображение $\tilde{\alpha}$, например, взяв

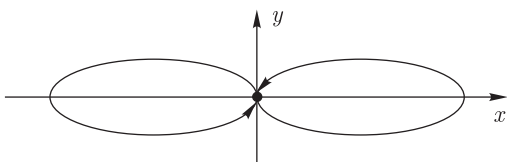
$$\alpha(t) = (\sin(2 \operatorname{arctg} t), 2 \sin(4 \operatorname{arctg} t)).$$

Кривая α осуществляет теперь взаимно-однозначное отображение $\alpha : \mathbf{R} \xrightarrow{\text{на}} \alpha(\mathbf{R})$ и проходит через начало координат только однажды (при $t = 0$). Образ кривой α — снова «восьмерка», но только с «кажущимся» самопересечением в начале координат:



Абсолютно точно такой же образ имеет кривая $\beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$\beta(t) = (-\sin(2 \operatorname{arctg} t), 2 \sin(4 \operatorname{arctg} t)) :$$



Обе кривые, α и β , регулярны, инъективны, имеют один и тот же образ, но композиция $\varphi = (\alpha^{-1} \circ \beta) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ не является даже непрерывным отображением!

На самом деле, из подробного курса анализа известно: чтобы доказать эквивалентность двух регулярных инъективных кривых, имеющих одинаковый образ, достаточно наложить на кривые еще одно условие — условие *простоты* кривой.

Инъективная кривая $\alpha : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *простой*, если она является взаимно-непрерывным (или, как еще говорят, *монеморфным*) отображением, т.е. для любой точки $p \in \alpha(I)$, лежащей на образе этой кривой, существует сколь угодно малая открытая окрестность $O(p) \subseteq \mathbf{R}^m$ этой точки в аффинном пространстве \mathbf{R}^m (открытый шар с центром в точке p) такая, что прообраз $\alpha^{-1}(O(p) \cap \alpha(I))$ есть открытое связное подмножество на прямой R (т.е. подынтервал в I , а еще точнее — открытая связная окрестность точки $\alpha^{-1}(p)$).

В нашем патологическом примере «восьмерки» с проколотой точкой в начале координат требование монеморфности кривой $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ очевидно не выполняется. Всякая сколь угодно малая окрестность точки $(0, 0)$ будет содержать и кусок «восьмерки», проходящий через начало координат, и два «конца» кривой, входящие в начало координат. Это означает, что прообраз всякой достаточно малой окрестности $\alpha^{-1}(O((0, 0)) \cap \alpha(\mathbf{R}))$ проколотой точки состоит, по меньшей мере, из трех непересекающихся открытых интервалов $(-\infty, a)$, (b, c) , $(d, +\infty)$, где $a < b < 0 < c < d$, что очень мешает отображению $\varphi = (\alpha^{-1} \circ \beta) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ быть непрерывным. Мы не будем здесь далее углубляться в эти достаточно тонкие вопросы существования замены параметров, поскольку эти вопросы не вполне соответствуют запланированному содержанию этого пункта.



Следует отметить, что классы эквивалентных кривых называются *непараметризованными кривыми*, хотя многие авторы (в основном более традиционного и «ортодоксального» направления) называют их просто кривыми, а конкретные вектор-функции в аффинных пространствах (кривые в смысле нашего определения) называют *параметризованными кривыми*, или

путями. ¹⁾ Я не буду в этой книжке принимать подобную точку зрения, так как она мне не нравится. Весьма убедительную критику понятия непараметризованной кривой и разумные доводы в пользу параметризованных кривых можно найти на страницах с 241 по 242 прекрасной книжки М. М. Постникова. ²⁾

Определение 9.2. Будем говорить, что две кривые $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^m$ *положительно эквивалентны*, если они связаны заменой параметра $\varphi : J \rightarrow I$ и, при этом, $\dot{\varphi}(\theta) > 0$ для любого $\theta \in J$.

Упражнение 9.1. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности на множестве всех кривых.

Более тонкое (по сравнению с простой эквивалентностью) понятие положительной эквивалентности изобретено для того, чтобы ухватить эффект сохранения или изменения направления движения точки по образу кривой (по «пути») при замене параметра. Физический смысл положительной эквивалентности виден из следующего примера.

Пример 9.1. Рассмотрим три регулярные кривые, определенные на одном и том же интервале ³⁾: $\alpha(t), \beta(\theta), \gamma(\tau) : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^2$. Вот их параметрические задания:

- 1) $\alpha(t) = {}^t(t, t)$, (видно, что $\dot{\alpha}(t) = {}^t(1, 1) \neq \vec{0}$ при любом $t \in I = (0, 1)$);
- 2) $\beta(\theta) = {}^t(\theta^3, \theta^3)$, ($\dot{\beta}(\theta) = {}^t(3\theta^2, 3\theta^2) \neq \vec{0}$ при любом $\theta \in J = (0, 1)$);
- 3) $\gamma(\tau) = {}^t(1 - \tau, 1 - \tau)$, ($\dot{\gamma}(\tau) = {}^t(-1, -1) \neq \vec{0}$ при любом $\tau \in K = (0, 1)$).

Образ каждой из этих кривых — диагональ единичного квадрата на плоскости без концевых точек (см. рис. 9.3).

¹⁾ Хотя в моем представлении слово «путь» куда более подходит для обозначения именно образа эквивалентных кривых — один и тот же путь в зависимости от параметризации точка может проходить по-разному (ускоряясь, замедляясь, равномерно и т. д.), что соответствует разным кривым с одинаковым образом в смысле нашего определения.

²⁾ См.: *Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия.* — М.: Наука, 1979.

³⁾ Педантичное разъяснение — кривые заданы на трех разных интервалах, у каждого интервала свое имя и по каждому бегают свой параметр. На интервале I бегают параметр t , на интервале J — параметр θ , на интервале K — параметр τ . Но эти интервалы совпали $I = J = K = (0, 1)$.

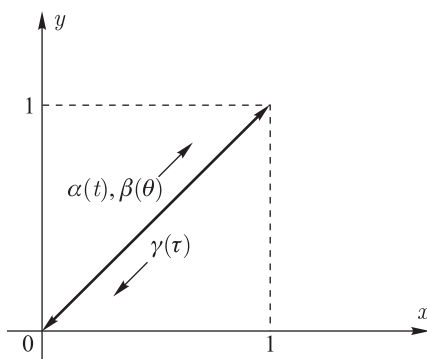


Рис. 9.3

Эти три кривые эквивалентны:

$$t = \varphi(\theta) = \theta^3, \quad \varphi : J \rightarrow I; \quad t = \psi(\tau) = 1 - \tau, \quad \psi : K \rightarrow I$$

— соответствующие замены параметров. Видно, что $\dot{\varphi}(\theta) = 3\theta^2 > 0$, а $\dot{\psi}(\tau) = -1 < 0$. Это означает, что кривые α и β положительно эквивалентны, а кривые α и γ — нет. При возрастании параметра точки кривых α и β бегут по диагонали квадрата в одну сторону, а точка кривой γ — в противоположную (т.е. векторы скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\gamma}$ противоположны). Принято говорить: «при положительной эквивалентности направление обхода кривой сохраняется».

Предостережение. Ради краткости речи, студенты иногда употребляют словосочетание «отрицательно эквивалентны», имея в виду кривые α и γ , связанные заменой параметра ψ с отрицательной производной $\forall \tau \in K \dot{\psi}(\tau) < 0$. Это словосочетание крайне неудачно, ибо отношение «быть отрицательно эквивалентными» на множестве кривых, как легко понять, не является транзитивным, т.е. вообще не является отношением эквивалентности.

Представляется правдоподобным, что длины эквивалентных кривых совпадают — образы-то у них одинаковы. Интуитивно ясно, что свойство «быть регулярной» сохраняется при замене параметра. Легко верится, что при параллельных переносах, поворотах и симметриях, у кривых также сохраняются регулярность и длина. Сформулируем все эти наши ощущения в виде леммы и, под занавес девятого пункта, аккуратно докажем ее.

Лемма 9.1. Свойство регулярности и длина кривой инвариантны¹⁾ относительно замены параметра и изометрии.

Доказательство.

1). Замена параметра.

Инвариантность регулярности. Пусть кривые α и β связаны заменой параметра $\alpha(\varphi(\theta)) = \beta(\theta)$, α — регулярна. Тогда $\dot{\beta}(\theta) = \dot{\alpha}(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta)$. Так как $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0$, $\dot{\alpha} \neq \vec{0}$, то β — регулярна.

Инвариантность длины кривой.

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\beta : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbf{R}^m$ и пусть, например, $\varphi(a_0) = a$, $\varphi(b_0) = b$ (т. е. φ — всегда монотонно возрастает, $\dot{\varphi} > 0$). Считаем:

$$\begin{aligned} \ell[\beta] &= \int_{a_0}^{b_0} |\dot{\beta}(\theta)| d\theta = \int_{a_0}^{b_0} |(\alpha(\varphi(\theta)))^\bullet| d\theta = \\ &= \int_{a_0}^{b_0} |\dot{\alpha}(\varphi(\theta))| \dot{\varphi}(\theta) d\theta = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt = \ell[\alpha]. \end{aligned}$$

2). Изометрия.

Инвариантность регулярности. Пусть $Ax = p_0 + Qx$ — изометрия \mathbf{R}^m , Q — ортогональный оператор. Пусть $\beta(t) = A\alpha(t)$, $t \in I$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\beta(t + \Delta t) - \beta(t)] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [A\alpha(t + \Delta t) - A\alpha(t)] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [p_0 + Q\alpha(t + \Delta t) - p_0 - Q\alpha(t)] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Q \left(\frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} \right) = Q\dot{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Это означает, что $\dot{\beta}(t) \neq \vec{0}$, так как Q не меняет длин векторов.

¹⁾ Синоним заморского слова «инвариантны» — «неизменны».

Инвариантность длины кривой. Считаем:

$$\ell[\beta] = \int_{a_0}^{b_0} |\dot{\beta}(t)| dt = \int_{a_0}^{b_0} |Q\dot{\alpha}(t)| dt = \int_{a_0}^{b_0} |\dot{\alpha}(t)| dt = \ell[\alpha].$$

Что и требовалось доказать. ◆

На этом п. 9 закончим.

Задачи и упражнения



1. Пусть $t, \theta \in (-\infty; +\infty)$ — область изменения параметров. Покажите, что кривые $\alpha(t) = {}^t(t, t)$ и $\beta(\theta) = {}^t(\theta^3, \theta^3)$ не эквивалентны, хотя имеют одинаковый образ.

2. Пусть теперь $t, \theta \in (0; +\infty)$ — область изменения параметров. Покажите, что теперь кривые $\alpha(t) = {}^t(t, t)$ и $\beta(\theta) = {}^t(\theta^3, \theta^3)$ эквивалентны.

3. Эквивалентны ли кривые $\alpha(\tau) = {}^t(a \cos \tau, b \sin \tau)$ и $\beta(t) = {}^t\left(a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2}\right)$, если $t \in (-\infty; +\infty)$, $\tau \in (-\pi, \pi)$?
А если $t, \tau \in (-\infty; +\infty)$?

4. Придумайте пять разных кривых, образами которых служит окружность $x^2 + y^2 = R^2$. Какие из ваших кривых эквивалентны? Какие положительно эквивалентны? Какие из ваших кривых инъективны?

5. Дайте понять преподавателю, что образ кривой $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$ — веточка гиперболы.

6. Покажите, что $\alpha(t) = {}^t\left(a \ln \frac{t + \sqrt{a^2 + t^2}}{a}, \sqrt{a^2 + t^2}\right)$ есть параметризация цепной линии $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.

10. Кривые единичной скорости

После внимательного прочтения п. 9 стало ясно, что множество всех кривых разбивается на классы положительно эквивалентных между собой кривых. В каждом таком классе находится великое множество кривых с одинаковыми образами. Их точки проходят этот образ с возрастанием параметра в одинаковом направлении, но, быть может, по-разному — с разными скоростями, равномерно, ускоряясь и т. п. В общем, глаза разбегаются.

Представьте себе, что вы — полководец и к вам пришла на переговоры о перемирии делегация, состоящая сразу из всех офицеров неприятеля — 12 000 штук. Ясно, что переговоров не

получится. Нужно выбрать одного парламентаря-представителя и тогда с ним можно будет хорошенько поговорить.

Вот и в геометрии во многих вопросах оказывается удобнее (да и просто комфортней) выбрать из каждого класса эквивалентных кривых канонического представителя с целью последующего его изучения. Априори, на роль канонического представителя (эдакого парламентаря на переговорах по теоретическим вопросам) можно выбирать любую кривую. Желательно, конечно, чтобы эта кривая была наиболее доступна для изучения, чтобы ее свойства легко обнаруживались, будучи простыми и ясными. Попробуем, поэтому, из каждого гигантского класса всех положительно эквивалентных кривых взять самую естественную и простую — такую кривую, у которой точка движется по образу кривой равномерно, со скоростью, модуль которой равен единице. Разумеется, направление у вектора скорости такой кривой может быть в разные моменты разным (а именно — по касательной к траектории движения), но длина вектора скорости всегда одинакова — единица.

Определение 10.1. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *кривой единичной скорости*, если $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ (т. е. $\forall t \in I |\dot{\alpha}(t)| = 1$).

Свойства у кривых единичной скорости ожидаются действительно приятные и понятные.

Во-первых, кривые единичной скорости заведомо всегда и везде регуляры, ведь $|\dot{\alpha}| \equiv 1$, т. е. $\dot{\alpha} \neq \vec{0}$.

Во-вторых, ускорение $\ddot{\alpha}$ кривой единичной скорости всегда перпендикулярно ее скорости $\dot{\alpha}$ — говорят, что $\ddot{\alpha}$ направлено по *нормали* к кривой $\alpha(t)$. (Механики сказали бы — «ускорение всегда центростремительное»!). Это важнейшее свойство вектор-функций постоянной длины мы доказали в п. 5.

В-третьих, длина кривой единичной скорости вычисляется особенно просто. Смотрите:

$$\ell[\alpha] = \int_a^{a+s} |\dot{\alpha}(t)| dt = \int_a^{a+s} 1 \cdot dt = s$$

— длина кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ между точками $\alpha(a)$ и $\alpha(a+s)$ равна s .¹⁾

¹⁾ Разумеется, если s отрицательно, то длину дуги кривой придется считать отрицательной — движение-то происходит против направления возрастания параметра (т. е. против направления вектора скорости кривой).

Это означает, что у кривых единичной скорости мы имеем дело с редким и замечательным явлением — если параметр увеличить на величину s , то длина кривой увеличится на ту же величину s ; приращение параметра равно приращению длины дуги самой кривой. Это неудивительно — если в начальный момент времени $t_0 = a$ вы включите секундомер, и с единичной скоростью будете двигаться s секунд, то вы пройдете точно s метров.

Можно также вообразить себе, что кривая единичной скорости (кривая — это отображение!) просто причудливо располагает интервал I в пространстве \mathbf{R}^m , не изменяя его длины, т. е. изометрично «вкладывает» его в \mathbf{R}^m , как тонкий нерастяжимый шнурок от папиного ботинка (см. рис. 10.1).

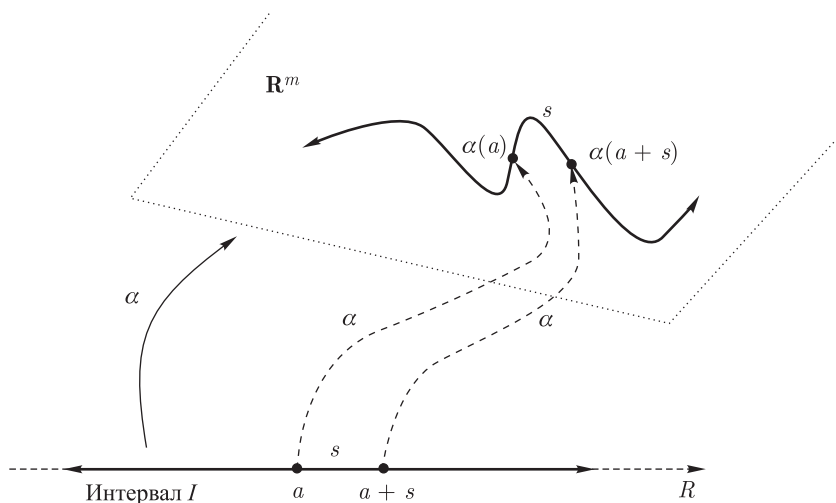


Рис. 10.1

Вызывает опасение лишь то, что в наугад выбранном классе положительно эквивалентных кривых может вообще не оказаться кривой единичной скорости. Наши надежды выбрать из каждого класса эквивалентных кривых достойного представителя-парламентера со столь заманчиво-простыми свойствами могут рухнуть! Сразу развеим это опасение — кривая единичной скорости есть в каждом классе регулярных кривых.

Теорема 10.1. *Всякая регулярная кривая положительно эквивалентна некоторой кривой единичной скорости.*

Доказательство. Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — регулярна и $t_0 \in I$. Рассмотрим длину дуги

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta.$$

Видим, что


$$\dot{s} = \dot{\psi}(t) = |\dot{\alpha}(t)| > 0$$

— производная всюду положительна, функция $\psi(t)$ непрерывна и монотонна на I , следовательно, $\psi(t)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение

$$\psi : I \xrightarrow{\text{на}} J = \psi(I)$$

интервала I на интервал J .¹⁾

Это означает, что для функции $\psi(t)$ существует обратная функция²⁾ $\varphi(s) : J \rightarrow I$, и $\varphi(\psi(t)) = t$, т.е. $\varphi \circ \psi = id|_I$ — тождественное отображение на интервале I .

 Возьмем в качестве искомой замены параметра эту самую обратную функцию $t = \varphi(s)$ и рассмотрим новую кривую $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, т.е. вместо бывшего параметра t новым параметром у кривой станет длина дуги s . Функция $\varphi(s)$ прекрасно подходит на роль замены параметра, так как

$$\forall s \in J \quad \dot{\varphi}(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\frac{d\psi}{dt}} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} > 0.$$

Поскольку $\dot{\varphi} > 0$ всюду на J , кривая $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ положительно эквивалентна кривой $\alpha(t)$ и является кривой единичной скорости:

$$\left| \dot{\beta}(s) \right| = |\dot{\alpha}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}(s)| = \left| \dot{\alpha}(t) \cdot \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} \right| \equiv 1. \quad \blacklozenge$$

¹⁾ То, что множество $J = \psi(I)$ действительно является интервалом, следует из теоремы Больцано–Коши — непрерывная функция обязана принимать все промежуточные значения.

²⁾ Которая, кстати, тоже монотонна, непрерывна и дифференцируема — известные факты из курса математического анализа.



Итак, чтобы из произвольной регулярной кривой $\alpha(t)$ сделать кривую единичной скорости, нужно заменить ее параметр на длину дуги, т. е. в качестве замены параметра взять функцию, обратную к функции

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta.$$

Теоретически, конечно, здесь все выглядит красиво, верно и ясно. Однако буквально, на практике, такую процедуру проделать трудно (и, как правило, — даже невозможно). Два основных возможных препятствия:

- 1) невозможно найти функцию $s = \psi(t)$, т. е. не вычисляется в явном виде интеграл $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha(\theta)| d\theta$ — это обычное явление даже для весьма простых подынтегральных функций;
- 2) невозможно разрешить относительно t уравнение $s = \psi(t)$, т. е. невозможно явно найти обратную функцию $t = \psi^{-1}(s)$ — это не менее обычное явление даже для алгебраических уравнений степени выше четвертой;

Тем не менее, в специально подобранных примерах в конце этого пункта и в тщательно продуманных задачах из специальных сборников оба этих «невозможных» этапа удастся проделать и по заданной кривой $\alpha(t)$ явно отыскать положительно эквивалентную ей кривую $\beta(s)$ единичной скорости, у которой параметром является длина дуги. Теоретически такая кривая $\beta(s)$ существует всегда.

Определение 10.2. Кривая $\beta(s)$, параметром которой является длина дуги этой кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки этой кривой, называется *натурально параметризованной кривой*. Параметр s (длина дуги кривой $\beta(s)$) в этом случае называется *натуральным параметром*. Договоримся: натуральный параметр всегда обозначать буквой s .



Внимание! Опыт показывает, что в студенческих головах распространена путаница. Студенты говорят: «У кривой единичной скорости параметром служит длина дуги». Ясно, что это не так. Длина дуги является параметром у *натурально параметризованной* кривой! Натурально параметризованная кривая, конечно, является кривой единичной скорости. Обратное-то не верно! У произвольной кривой единичной скорости параметром может быть что угодно! Вот простой пример кривой

единичной скорости, которая не является натурально параметризованной кривой.

Пример 10.1. Рассмотрим кривую $\alpha(t) : [51, 53] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. Эта кривая, очевидно, единичной скорости: $|\dot{\alpha}(t)| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \equiv 1$. Длина всей кривой $\alpha(t)$ равна $\ell[\alpha] = \int_{51}^{53} 1 \cdot dt = 2$, что никак не дотягивает до значений самого параметра, бегающего в промежутке $[51, 53]$ и, следовательно, параметр t никак не может являться длиной дуги.

Однако поспешу вас успокоить — понятия кривой единичной скорости и натурально параметризованной кривой действительно очень близки. Из любой кривой единичной скорости можно подходящим сдвигом параметра сделать натурально параметризованную кривую. Чтобы понять, как это исполнить, достаточно аккуратно выполнить следующее

Упражнение 10.1. Докажите последовательно два утверждения:

- 1) пусть $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ — положительно эквивалентные кривые единичной скорости. Тогда существует число t_0 такое, что $\alpha(t) = \beta(t - t_0)$;
- 2) пусть $\alpha(t)$ — кривая единичной скорости. Тогда найдется такое число s_0 , что кривая $\beta(s) = \alpha(s - s_0)$ — натурально параметризована.

Прочувствуйте разницу между кривыми единичной скорости и натурально параметризованными кривыми и поразите глубиной своего понимания экзаменатора на экзамене. Тогда для получения отличной оценки вам останется только ответить на все остальные вопросы и решить все предложенные на экзамене задачи. Вот так.

Задачи и упражнения



1. Составьте натуральную параметризацию окружности радиуса R с центром в начале координат, лежащей в \mathbf{R}^2 .

2. Найдите кривую единичной скорости, положительно эквивалентную цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

3. Найдите натуральную параметризацию циклоиды

$$\alpha(t) = {}^t(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)).$$

4. Составьте натуральную параметризацию следующих окружностей, лежащих в \mathbf{R}^3 :

а) $x^2 + (y - 1)^2 = R^2, \quad z = 1;$

б) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x + y + z = 0.$

5. Напишите в своей тетрадке натуральную параметризацию винтовой линии $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, bt)$.

6. Перепараметризируйте следующие кривые натуральным параметром:

а) $\alpha(t) = {}^t(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t);$

б) $\alpha(t) = {}^t(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t).$

7. Найдите кривую единичной скорости, положительно эквивалентную кривой $\alpha(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^4$:

$$\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, b \cos t, b \sin t).$$

§ 3. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ. ЭКСКУРСИЯ К ИСТОКАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Перед вами параграф, содержание которого принадлежит скорее уже истории, нежели современной математике. В духе геометров XVII–XVIII вв. мы будем рассматривать здесь плоские кривые, точнее — кривые вида $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Нужно сказать, что в те далекие времена, когда еще не было вертолетов и телевизоров, а о трамвайных компостерах можно было только мечтать, изучение кривых на плоскости было очень популярным занятием. В работах того времени, зачастую без строгих определений линии, кривой и длины, изучались многие свойства объекта, интуитивно воспринимаемого как «линия». При этом в геометрию постепенно стали проникать идеи и методы рожденных в ту же эпоху дифференциального исчисления и алгебры векторов. Конечно, сейчас эти многочисленные работы кажутся старомодными, но из них постепенно сложились целые направления современной математики и механики.

С точки зрения логики построения курса дифференциальной геометрии выделение плоских кривых в отдельный параграф объясняется не только данью традиции и уважением к истории или необходимостью проведения математического ликбеза¹⁾ среди студентов. Регулярные кривые на плоскости — это простейший случай «гиперповерхностей», рассмотрение которых состоится в этой книжке несколькими параграфами позже. Многие эффекты, свойственные гиперповерхностям, математик-преподаватель продемонстрирует в «игрушечном» виде уже для плоских кривых и это внесет в дальнейшее изучение гиперповерхностей приятный элемент узнавания и радости.

11. Линии на плоскости

Линия на плоскости, казалось бы, — интуитивно ясное и вполне очевидное геометрическое понятие. Однако история показывает, что точное (и достаточно общее) определение линии давалось человечеству с большим трудом.

¹⁾ Ликбез — ликвидация безграмотности — лозунг и программа 30-х годов XX в. в СССР.

В элементарной геометрии понятие линии до сих пор носит очень мутный характер и описывается разными словами, вроде «длина без ширины». По существу, в школьной элементарной геометрии изучение линий сводится к изучению приятных примеров — отрезков, окружностей, ломаных и прямых. Не располагая общими методами, «школьная» математика довольно глубоко проникает в изучение различных свойств конкретных линий, создавая у нас впечатление ясности и завершенности древнегреческой геометрической картины окружающего мира.

Чуть позже, в школьном курсе математики, появляются многочисленные графики различных функций, которые прекрасно соответствуют нашему интуитивному пониманию линии. Поскольку в школе встречаются только «хорошие» функции, то у нас возникает ощущение, что линия вообще и есть график подходящей функции. Эта школьная идиллия порождает у нас искреннее удивление и настоящее восхищение, когда в университете мы сталкиваемся с примерами линий, обладающих различного рода «парадоксальными» свойствами (отсутствием длины, изломом в каждой точке и т. п.).



Однако спору нет, каждый из нас согласен, что определение линии должно быть таким, чтобы график гладкой функции f , т. е. множество точек плоскости $\Gamma = \{(x, y) | y = f(x), x \in D(f)\}$, обязательно являлся линией. При этом мы интуитивно понимаем, что наоборот неверно — не всякая линия есть график некоторой функции.¹⁾ Отметим для себя это обстоятельство и пойдем дальше.

В аналитической геометрии линия на плоскости определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению вида $F(x, y) = 0$. При этом, как правило, в качестве функции $F(x, y)$ берется многочлен и соответствующие линии называются алгебраическими кривыми. Если же этот многочлен — многочлен первой или второй степени, то возникают «классические» объекты изучения аналитической геометрии — прямые и квадрики на плоскости.

Разумеется, идеи аналитической геометрии ведут (и привели многих математиков XVII–XVIII столетий) к соблазну определять саму линию на координатной плоскости как множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению $F(x, y) = 0$ с функцией $F(x, y)$ достаточно произвольного вида.

¹⁾ Например, окружность не может являться графиком никакой (однозначной) функции.

Попробуем встать на этот путь и пофантазировать, каким таким загадочным условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы получающиеся множества точек можно было бы, в соответствии с нашей интуицией, называть линиями.

Ясно, что нам хочется иметь дело с линиями типа следа карандаша на бумаге (проведенными без отрыва, непрерывными целиком или, по крайней мере, состоящими из непрерывных кусков). Поэтому первое, что приходит в голову — попросить функцию $F(x, y)$ быть непрерывной.¹⁾

Второе, о чем нам следует позаботиться с точки зрения здравого смысла, — уравнение $F(x, y) = 0$ должно иметь заведомо бесконечное, и даже несчетное, множество решений, т. е. функция $F(x, y)$ должна иметь несчетное множество нулей на плоскости. В самом деле, посмотрим на следующие уравнения:

Уравнение	Решение
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Пустое множество
$x^2 + y^2 = 0$	Точка $(0, 0)$
$\sin^2 x + \sin^2 y = 0$	Точки вида $(\pi k, \pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$

Множества точек, задаваемых этими уравнениями, язык как-то сам собой не поворачивается назвать линиями.

Наконец, третье разумное требование на функцию $F(x, y)$ вытекает из нашего желания иметь дело с плавными гладкими линиями без изломов (например, с линиями, у которых в каждой точке можно провести одну касательную). Используя воспоминания из курса математического анализа о геометрическом смысле производной, попросим от функции $F(x, y)$, на всякий случай, сразу много (запас карман не тянет!) — чтобы функция $F(x, y)$ была гладкой, т. е. имела все (непрерывные) частные производные сколь угодно высокого порядка.²⁾

Теперь, с учетом приведенных соображений, возникает пыльное желание «сразу дать определение» — взять и назвать «глад-

¹⁾ Легко понять, что если не требовать непрерывности функции $f(x, y)$, то уравнением $f(x, y) = 0$ можно задать вообще любое множество $A \in \mathbb{R}^2$. Для этого достаточно взять $f(x, y) = 1 - \chi_A$, где χ_A — характеристическая функция множества A , равная единице в точках множества A и нулю — в остальных точках плоскости.

²⁾ Это уже очень сильное требование на функцию! Наше первоначальное требование непрерывности становится теперь ненужным, поскольку гладкая функция автоматически непрерывна.

кой линией» всякое множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — гладкая функция двух переменных с несчетным множеством нулей. Иными словами, если $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция с несчетным множеством нулей, то «гладкой линией» хотелось бы назвать множество

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

— полный прообраз нуля при отображении F .

Следующий пример — холодный дождик на нашу пыльную пруть.



Пример 11.1. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2-y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 > 1, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

Графиком функции $z = F(x, y)$ является поверхность, которая симметрична относительно оси OZ по всем перпендикулярным к оси OZ направлениям. Это станет совершенно понятно, если вы увидите, что $F(x, y)$ зависит, по сути, только от величины $r^2 = x^2 + y^2$. Действительно, для каждого радиуса $r > 1$ функция $F(x, y)$ принимает одно и то же значение $e^{\frac{1}{1-r^2}}$ во всех точках окружности $r^2 = x^2 + y^2$, а все эти окружности лежат на плоскости XOY и имеют общий центр — начало координат. Чтобы вообразить себе форму этой поверхности, взгляните на рис. 11.1. На этом рисунке изображено одно из сечений поверхности $z = F(x, y)$ вертикальной плоскостью¹⁾, проходящей через ось OZ (все такие вертикальные сечения нашей поверхности выглядят одинаково!):

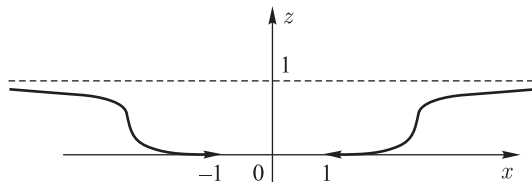


Рис. 11.1

Теперь ясно, что поверхность $z = F(x, y)$ представляет собой «тазик» с плоским дном (единичный круг), причем стенки

¹⁾ Например, плоскостью XOZ .

тазика очень гладко примыкают к его днищу в точках единичной окружности. Можно совершенно строго проверить, что функция $F(x, y)$ — всюду гладкая.

Упражнение 11.1. Докажите самостоятельно, пользуясь только определением частных производных, что функция $F(x, y)$ — гладкая в точках единичной окружности (в месте примыкания стенок к днищу тазика).¹⁾

Итак, в нашем примере функция $F(x, y)$ — непрерывная, всюду гладкая, имеет несчетное множество нулей и уравнение $F(x, y) = 0$ задает на плоскости XOY единичный круг! Единичный круг, по нашему разумению, — никак не линия!

Если приведенный пример являлся лишь холодным дождиком на нашу пылкую прыть, то следующий неожиданный и феноменальный результат, открытый американским математиком Уитни, есть не что иное, как умиротворяющий удар опытного боксера.



Теорема 11.1 (Уитни). Пусть $M \subseteq \mathbf{R}^2$ — произвольное замкнутое множество точек на плоскости. Тогда существует всюду гладкая функция $F(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $M = F^{-1}(0)$.

Вот так! Оказывается любое замкнутое множество на плоскости можно задать уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — подходящая гладкая функция. Доказательство этой замечательной теоремы, к сожалению, выходит за рамки нашего курса, однако прекрасным упражнением каждому студенту будет попытка самостоятельно его разобрать и понять — способность самостоятельно разбираться в сложных текстах является неотъемлемой составляющей частью общематематической культуры.

Упражнение 11.2. Разберите самостоятельно доказательство теоремы Уитни (см., например, М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр 3. С. 16–21).

Мы видим, что наши попытки определить линию на плоскости как множество точек, задаваемых уравнением $F(x, y) = 0$, наталкиваются на определенные сложности. Мы понимаем, что, кроме гладкости, на функцию $F(x, y)$ нужно наложить еще какие-то условия. Но как же мы можем их сформулировать, если не знаем пока самого основного — что такое линия! Очень трудно

¹⁾ Собственно, сомнения в гладкости функции F и возникают только в точках единичной окружности. Гладкость функции F в остальных точках плоскости XOY очевидна.

сформулировать какие-то требования к уравнению $F(x, y) = 0$, не зная, что мы собственно хотим, поскольку так и не сформулировали до сих пор, каким должно быть множество его решений!

Мы попали в ситуацию, когда мне, как автору этой книжки, уже больше невозможно тянуть и закручивать интригу. Нужно волевым усилием постулировать определение линии. Следует иметь в виду, что в разных разделах математики существуют разные определения линии, удовлетворяющие нуждам данного раздела. Разумеется, все эти определения берутся не с потолка, а являются плодом серьезного и длительного осмысления явлений окружающего мира.

Для нужд дифференциальной геометрии будет очень удобно встать на точку зрения гениального француза Камилля Жордана, который, основываясь на механических представлениях, предложил понимать линию как след (траекторию) движущейся точки. Поскольку мы абсолютно готовы принять эту точку зрения не только интуитивно, но и технически (в смысле предварительной математической подготовки), сформулируем наконец основное определение этого пункта.



Определение 11.1. *Линией на плоскости (гладкой жордановой линией)* называется образ $\alpha(I)$ некоторой гладкой кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Только не говорите разочарованно: «Фу, что тут было сто лет думать! Что тут гениального?». Простота и ясность этого определения — его достоинство, а его естественность (как будто оно «само собой разумеющееся») стала возможна только после формирования в человеческих мозгах общенаучной культуры — а это процесс чудовищно трудный и длится столетиями.



Замечание 11.1. Требование гладкости кривой $\alpha(t)$ в определении линии выглядит малозначимым и занесенным в определение случайно, как бы по инерции речи. Однако оно, оказывается, имеет решающее значение! В 1890 г. итальянский математик Дж. Пеано поразил математический мир, построив *непрерывную* кривую $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, образом которой является единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. Впоследствии выяснилось, что не только квадрат, но и любые локально связные множества ¹⁾ в евклидовом аффинном пространстве произвольной размерности

¹⁾ Множество называется *локально связным*, если каждая его точка обладает сколь угодно малой связной окрестностью, состоящей из точек этого множества. Окрестность называется *связной*, если ее нельзя разбить на два подмножества, замыкания которых не пересекаются.

(например, куб, шар, и даже бесконечномерный параллелотоп с красивым названием «гильбертов кирпич»!) являются непрерывными образами отрезка. ¹⁾ Однако было доказано, что для *гладких* кривых $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ такие удивительные эффекты невозможны. ²⁾

Между прочим, приведенное замечание — лишний повод задуматься о «естественности» и «очевидности» определения жордановой линии.

Посмотрим теперь, как прекрасно укладываются в жорданово определение линии наши интуитивные примеры гладких линий, почерпнутые из жизненного опыта.

Пример 11.1 — график функции. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ всегда является линией. Действительно, график функции $y = f(x)$, т. е. множество $\Gamma = \{(x, y) | y = f(x)\}$, очевидно является образом, например, такой кривой: $\alpha(t) = (t, f(t))$ — это один из многих возможных способов параметризации линии Γ . Между прочим, кривая $\alpha(t) = (t, f(t))$ всегда заведомо регулярна, так как функция $f(x)$ дифференцируема на области определения и $\dot{\alpha}(t) = (1, f'(t)) \neq \vec{0}$.

Пример 11.2 — образ уравнения $F(x, y) = 0$. Вопрос о том, когда у гладкой функции полный прообраз нуля $F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | F(x, y) = 0\}$ является линией, действительно непростой. Достаточные условия того, что $F^{-1}(0)$ — линия, дает известная теорема «о неявной функции» из курса математического анализа. Эти достаточные условия вполне достаточны (каламбур) для нужд нашего курса геометрии, поэтому здесь я только сформулирую в наших обозначениях теорему о неявной функции и далее в эту проблематику мы углубляться не будем.

Определение 11.2. Пусть $F(x, y)$ — гладкая функция. Вектор ³⁾

$$\text{grad } F(x_0, y_0) = {}^t(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)),$$

¹⁾ Это частный случай так называемой теоремы Хана–Мазуркевича. Она справедлива для произвольного метризуемого локально связного континуума (непустого связного бикompактного хаусдорфова топологического пространства).

²⁾ Это следствие так называемой теоремы Сарда. Из нее следует, что образ гладкой кривой имеет меру нуль и не может иметь внутренних точек.

³⁾ Не могу удержаться и хочу сказать хотя бы в подстрочном примечании, что градиент, на самом деле, является не вектором, а ковектором, но об этом у нас пойдет речь гораздо позже.

где $F_x = \partial F / \partial x$, $F_y = \partial F / \partial y$, называется *градиентом* функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .



Теорема 11.2 (о неявной функции). Пусть $U \subseteq \mathbf{R}^2$ — открытое множество, $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, множество $M = F^{-1}(0)$ непусто и $\text{grad } F \neq \vec{0}$ во всех точках множества M . Тогда для любой точки $p = (x_0, y_0) \in M$ существует окрестность $O(p) \subseteq \mathbf{R}^2$ такая, что $O(p) \cap M$ — график некоторой гладкой функции (либо $y = y(x)$, либо $x = x(y)$). \blacklozenge

Таким образом, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ задавало линию на плоскости, достаточно, чтобы в точках множества $M = F^{-1}(0)$ градиент функции F был отличен от нуля. При этом, естественно, линия $M = F^{-1}(0)$ является образом некоторой регулярной кривой¹⁾, так как графики функций $y = y(x)$ или $x = x(y)$ есть образы регулярных кривых $(t, y(t))$ или $(x(t), t)$.

Задачи и упражнения



1. Применяя смекалку, нарисуйте на плоскости XOY следующие линии (везде подразумевается, что $a > 0$):

а) $x^3 + y^3 = 3axy$ (декартов лист);

б) $y^2 = x^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$ (строфоида);

в) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (лемниската Бернулли);

г) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (просто забавная замкнутая линия четвертого порядка).

2. Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2$. Нарисуйте линии $F(x, y) = C$ для значений $C = 1$, $C = 2$, $C = 4$, $C = 25$ (линии уровня функции $F(x, y)$). Найдите векторы $\text{grad } F(3, 4)$, $\text{grad } F(-2, 0)$, $\text{grad } F(1, 1)$ и отложите их от тех точек, в которых они вычислены. Куда направлен градиент функции $F(x, y)$ и что он показывает?

3. Пусть

$$F(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{12-4x^2-3y^2}\right)}, & \text{если } 4x^2 + 3y^2 > 12, \\ 0, & \text{если } 4x^2 + 3y^2 \leq 12. \end{cases}$$

Проверьте, что функция $F(x, y)$ — всюду гладкая. Нарисуйте на плоскости XOY множество $F^{-1}(0)$.

¹⁾ Возможно — совокупностью образов нескольких регулярных кривых.

12. Касание плоских кривых. Огибающая

В этом пункте мы рассмотрим классический вопрос — что значит, что две кривые касаются?

Вынужден извиниться, что в этом пункте я довольно часто буду допускать вольность речи и называть кривую линией, а линию — кривой. При этом я, конечно, помню, что кривая — это отображение, а линия — образ отображения, но оговорки типа «линия $\alpha(t)$ » или «кривая $F(x, y) = 0$ » будут проскальзывать довольно часто. Например, в предложении «Что значит, что две кривые касаются?» нужно было бы вместо слова «кривые» употребить слово «линии», но я верю, что подобные оплошности никого в дальнейшем не введут в заблуждение.

Начнем с систематизации уравнений касательной прямой к линиям, заданным на плоскости различными способами.

Первый способ. Линия — образ гладкой регулярной кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданной своей явной параметризацией $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Тогда $\dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ — направляющий вектор касательной прямой и уравнение касательной в момент t_0 выглядит так:

$$p(u) = \alpha(t_0) + u\dot{\alpha}(t_0).$$

Здесь $p(u) = p(x(u), y(u))$ — точка аффинного пространства \mathbf{R}^2 , $\alpha(t_0)$ — начальная точка прямой (точка касания), $u \in \mathbf{R}$ — параметр. В параметрическом виде это уравнение выглядит так:

$$\begin{cases} x = x(t_0) + u\dot{x}(t_0) \\ y = y(t_0) + u\dot{y}(t_0) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix},$$

причем вторая запись более предпочтительна в силу наших договоренностей о векторах (которые — столбцы!) и об операции откладывания вектора от точки в аффинном пространстве.

Второй способ. Линия — график гладкой функции $y = f(x)$, т. е. образ кривой $\alpha(t) = (t, f(t))$. Тогда $\dot{\alpha}(t_0) = (1, f'(t_0))$ — направляющий вектор касательной к графику в точке $(x_0, f(x_0))$ и параметрические уравнения касательной выглядят так:

$$\begin{cases} x = x_0 + u, \\ y = y_0 + uf'(x_0). \end{cases}$$

После исключения параметра $u \in \mathbf{R}$ все становится совсем уж знакомым:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Третий способ. Линия задана как образ уравнения $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — гладкая функция, градиент которой отличен от нуля в точках множества $F^{-1}(0)$. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in F^{-1}(0)$. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) наша линия является образом какой-то кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, причем $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$.

Разумеется, координаты точек кривой $\alpha(t)$ (а в пределах рассматриваемой окрестности — и только этих точек!) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Значит, налицо тождество: $F(\alpha(t)) \equiv 0$, т. е. $F(x(t), y(t)) \equiv 0$.

В эпиграфе этой книжки сказано: «Видишь тождество — дифференцируй!». Последуем хорошему совету (и, заодно, вспомним правила дифференцирования):

$$F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} \equiv 0.$$



В наших обозначениях последнее тождество записывается так:

$$\langle \text{grad } F(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle \equiv 0$$

— скалярное произведение вектора $\text{grad } F$ на касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$ тождественно равно нулю! Это означает, что градиент всегда (в любой момент t) перпендикулярен касательному вектору и, стало быть, является направляющим вектором *нормали* к кривой $\alpha(t)$ ¹⁾. Вот рис. 12.1, прекрасно иллюстрирующий ситуацию:

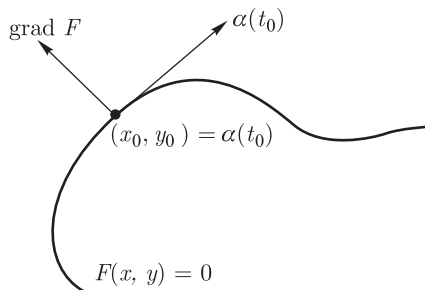


Рис. 12.1

Теперь, используя сведения, полученные в курсе аналитической геометрии, мгновенно пишем уравнение касательной к линии $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) :

$$F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0,$$

¹⁾ Это известный факт из курса математического анализа — градиент функции $F(x, y)$ всегда перпендикулярен к линии уровня функции $F(x, y)$ и направлен в сторону возрастания $F(x, y)$.

и уравнение нормали в точке (x_0, y_0) :

$$-F_y(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_x(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

Эти уравнения удобны тем, что для их написания не нужно отыскивать явную параметризацию той самой кривой $\alpha(t)$, образом которой является линия $F^{-1}(0)$.

Определение 12.1. Говорят, что две линии *касаются* в некоторой точке, если они имеют в этой точке общую касательную прямую.

Разумеется, что касающиеся линии пересекаются в той точке, где у них имеется общая касательная. Допуская известную вольность речи, будем говорить, что кривые $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ касаются, если для некоторых значений параметров t_0, θ_0 выполнены два условия:

- 1) $\alpha(t_0) = \beta(\theta_0)$ — эти «кривые пересекаются»,
- 2) $\dot{\alpha}(t_0) \parallel \dot{\beta}(\theta_0)$ — касательные векторы этих кривых в точке пересечения коллинеарны.

Сформулируем условие касания двух линий на плоскости для случая, когда одна линия задана как образ уравнения $F(x, y) = 0$, а вторая линия задана как образ некоторой кривой $\alpha(t)$.



Лемма 12.1 (условие касания). *Кривые $\alpha(t)$ и $F(x, y) = 0$ касаются в точке $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда $F(\alpha(t_0)) = F(x_0, y_0) = 0$ и*

$$\langle \text{grad } F(x_0, y_0), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0.$$

Вот иллюстрирующий рис. 12.2.

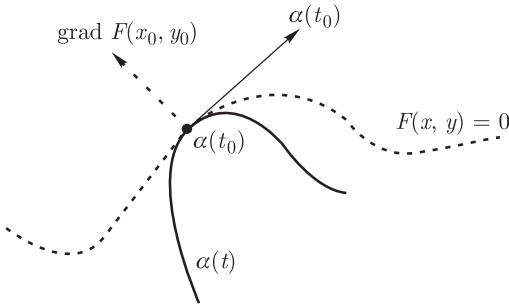


Рис. 12.2

Я прошу вас самостоятельно проговорить вслух доказательство этой очевидной леммы, водя по рис. 12.2 указательным пальцем.

Пойдем дальше. Представьте себе две касающиеся окружности. Они, вообще говоря, могут быть разных радиусов, касаться либо внешним, либо внутренним образом — это неважно. Важно то, что две окружности, в зависимости от расположения и величины радиусов, могут как довольно сильно отличаться, так и весьма походить друг на друга в окрестности точки касания. На рис. 12.3 изображены две пары касающихся окружностей, причем радиусы внешних окружностей одинаковы, а внутренних — различны:

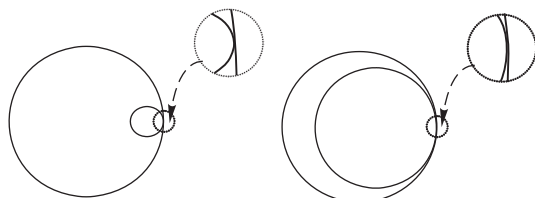


Рис. 12.3

Разница в поведении линий (окружностей) в окрестности точки касания видна как невооруженным, так и вооруженным глазом, хотя у этих окружностей в точке касания одна общая касательная прямая. Из курса математического анализа известно, что весьма тонко «способы прикосновения» двух линий на плоскости описываются понятием «касание k -го порядка». Давайте вспомним это классическое понятие.

Пусть имеется какая-то гладкая кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ и кривая $F(x, y) = 0$ (т. е. линия $F^{-1}(0)$). Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$f(t) = F(\alpha(t)) = F(x(t), y(t)).$$

Теперь внимательно глядим на рис. 12.2 и сосредоточенно рассуждаем.

1. Если при некотором значении параметра $t_0 \in I$ окажется выполненным условие $f(t_0) = 0$, то наши кривые пересекаются. Действительно, равенство $f(t_0) = 0$ означает, что точка $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ с первой кривой подходит в уравнение $F(x, y) = 0$, т. е. лежит на второй кривой.

2. Если при том же самом $t_0 \in I$ оказывается выполненным вдобавок еще и условие $f'(t_0) = 0$, то в точке пересечения наши кривые касаются. Действительно:

$$f'(t_0) = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} = \langle \text{grad } F(x_0, y_0), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0,$$

а это и есть условие касания двух кривых, сформулированное семью абзацами выше в виде леммы. Можно сказать, что в этом случае, векторы скоростей двух наших кривых коллинеарны.

3. Если при этом же самом $t_0 \in I$, вдобавок к первым двум условиям, оказывается выполнено еще и условие $f''(t_0) = 0$, то, как нетрудно понять, в точке пересечения оказываются коллинеарны не только векторы скорости данных кривых, но и становятся одинаковыми векторы их центростремительных ускорений. С механической точки зрения это означает, что радиусы поворота точек при движении по своим траекториям одинаковы, то есть кривые в окрестности точки пересечения выглядят совсем «похоже» друг на друга.

Приведенные этапы наблюдения за вспомогательной функцией $f(t)$ исторически вызвали к жизни следующее (теперь уже классическое) определение.



Определение 12.2. Кривая $\alpha(t)$ в момент $t_0 \in I$ имеет с линией $F^{-1}(0)$ касание порядка k , если для функции $f(t) = F(\alpha(t))$ выполнены условия:

0. $f(t_0) = 0$.
1. $f'(t_0) = 0$.
2. $f''(t_0) = 0$.
3. $f'''(t_0) = 0$.
- ⋮
- k . $f^{(k)}(t_0) = 0$.
- $k + 1$. $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$.

Между прочим, функцию $f(t) = F(\alpha(t))$ можно трактовать еще и как «меру отличия» точек кривой $\alpha(t)$ от точек линии $F^{-1}(0)$ (Пояснение: если $f(t) = F(\alpha(t)) = 0$, то точка $\alpha(t)$ «подходит» в уравнение $F(x, y) = 0$; а если $f(t) = F(\alpha(t)) = C \neq 0$, то число C — своеобразный показатель, на сколько точка $\alpha(t)$ «не подходит» в уравнение $F(x, y) = 0$).

Приведенное определение говорит нам, что в случае касания k -го порядка «величина различия» $f(t) = F(\alpha(t))$ есть бесконечно малая k -го порядка: $f(t) = o((t - t_0)^k)$. Ясно, что чем выше порядок касания, тем меньше оказывается эта «величина различия» касающихся кривых, а точки кривой $\alpha(t)$, взятые из окрестности $O(\alpha(t_0))$, «почти подходят» в уравнение $F(x, y) = 0$.

Многочисленные задачи про конструкцию касания k -го порядка вы, надеюсь, с успехом порешаете на практических занятиях. Сейчас я напому только классические названия, очень важные для дальнейшего изложения.

Определение 12.3. Окружность, имеющая в некоторой точке $\alpha(t_0)$ с кривой $\alpha(t)$ порядок касания не ниже второго, называется *соприкасающейся*. Радиус соприкасающейся окружности называется *радиусом кривизны кривой* в точке касания $\alpha(t_0)$. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны* кривой в точке $\alpha(t_0)$.

В окрестности точки касания соприкасающаяся окружность очень «похожа» на саму кривую. Соприкасающаяся окружность в окрестности точки касания больше других окружностей «напоминает» кривую, которой касается (см. рис. 12.4).

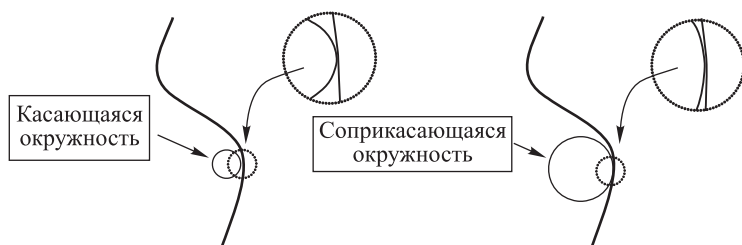


Рис. 12.4

Большая просьба — отнеситесь уважительно и хорошенько запомните эти простые (казалось бы!) геометрические понятия: соприкасающейся окружности, центра и радиуса кривизны кривой. Чуть позже мы обязательно вернемся к этим понятиям — они оказали развитию естествознания неоценимую услугу. Смею вас заверить — европейская цивилизация обязана этим понятиям многими своими достижениями. Некоторые такие достижения будут упомянуты в нашей книжке, а мы сейчас пойдем дальше.

Давайте вспомним еще одно важное понятие, имеющее непосредственное отношение к теме «касание линий». Вероятно, вы уже познакомились с этим понятием в курсе дифференциальных уравнений, когда рассматривали так называемые «особые решения».



Определение. Пусть на плоскости задано семейство линий C_t , где $t \in I \subseteq \mathbf{R}$ — параметр (т. е. для каждого $t \in I$ — своя линия). Линия L называется *огibaющей* семейства линий C_t , если в каждой своей точке линия L касается одной из линий семейства C_t .

Вот рис. 12.5, иллюстрирующий это определение:

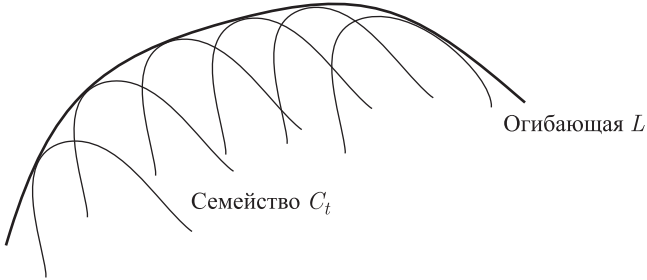


Рис. 12.5

На этом рисунке линии семейства C_t весьма удачно (и довольно прихотливо!) располагаются на плоскости так, что оказывается возможным провести огибающую, т. е. кривую \mathcal{L} , которая касается каждой линии семейства C_t . На первый взгляд кажется, что столь удобное расположение линий в семействах случается не часто и поэтому огибающая — довольно редкое явление, требующее для своего возникновения редкого и удачного стечения обстоятельств. Однако следующее простое наблюдение показывает, что вопреки кажущейся причудливости, огибающая — очень распространенное явление.



Наблюдение 12.1. Всякая регулярная кривая является огибающей семейства своих касательных прямых.

Естественный вопрос — как искать огибающую, если задано семейство линий C_t ? Дадим ответ на этот вопрос для довольно типичного случая, когда семейство линий C_t задается уравнением вида $F(x, y, t) = 0$, где x, y — текущие координаты точки на линии C_t , t — параметр. Разумеется, что при каждом значении параметра t выполнено $\text{grad } F = (F_x, F_y) \neq \vec{0}$.

Будем искать огибающую \mathcal{L} семейства C_t как образ некоторой кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Выдвигаем ясное требование — при каждом значении параметра t точка $\alpha(t)$ с огибающей \mathcal{L} лежит на соответствующей кривой C_t . Это требование означает, что

$$F(x(t), y(t), t) \equiv 0.$$

«Видишь тождество — дифференцируй!»:

$$F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_t \equiv 0.$$

Поскольку \mathcal{L} — огибающая, в каждый момент t кривая $\alpha(t)$ касается линии C_t . Условие касания линий $F(x, y, t) = 0$ и $\alpha(t)$ известно:

$$\langle \text{grad } F, \dot{\alpha}(t) \rangle = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} = 0.$$

Из этого условия касания и тождества $F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_t \equiv 0$ получается, что

$$F_t(x, y, t) \equiv 0.$$

Таким образом, возникает система из двух условий:

$$\begin{cases} F(x, y, t) \equiv 0, \\ F_t(x, y, t) \equiv 0. \end{cases}$$

Множество точек (x, y) , удовлетворяющих этой системе, называется *дискриминантой* (или *дискриминантным множеством*) семейства C_t . Дискриминанту можно найти, например, исключив из полученной системы параметр t или выразив явно из данной системы переменные $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Наши предыдущие рассуждения показывают, что огибающая линия \mathcal{L} содержится в дискриминанте. Однако известно, что дискриминанта может содержать не только точки огибающей, но и разного рода «особые» точки кривых семейства C_t — точки самопересечения, точки возврата, точки прикосновения и т. п. (см. рис. 12.6).

Достаточные условия того, что дискриминанта все-таки является огибающей, дает следующее

Предложение. Пусть в точках решения системы

$$\begin{cases} F(x, y, t) \equiv 0, \\ F_t(x, y, t) \equiv 0 \end{cases}$$

производные F_x и F_y ограничены и хотя одна из них отлична от нуля. Тогда эта система определяет только огибающую.

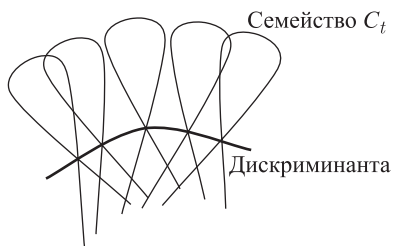


Рис. 12.6

Доказательство. Пусть, например, $F_y(x(t), y(t), t) \neq 0$. Дифференцируем по t первое уравнение системы: $F_x \cdot \dot{x} + F_y \times \dot{y} + F_t \equiv 0$. В силу второго уравнения $F_t = 0$, следовательно, получается условие касания линий семейства $F(x, y, t) = 0$ и кривой $\alpha(t)$:

$$F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} = \langle \text{grad } F, \dot{\alpha}(t) \rangle = 0. \quad \blacklozenge$$

Задачи и упражнения



1. Напишите уравнение касательной к циклоиде в произвольной точке. Объясните, почему грязь с дороги неизбежно попадает на спину велосипедисту, даже если заднее колесо велосипеда прикрыто щитком.

2. Напишите уравнения касательной и нормали к линиям:
 а) $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ в точке $t_0 = \pi/3$;
 б) $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \pi/4$;
 в) $x^3 + y^3 = 3xy$ в точке $A(3/2, 3/2)$;
 г) $\rho = 2a \cos \varphi$ в точке $\varphi_0 = \pi/4$.

3. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ перпендикулярна прямой $x - 2y + 8 = 0$?

4. Задача-перепевочка фундаментального факта мироздания из п. 5. Докажите, что если все нормали плоской линии проходят через фиксированную точку, то эта линия есть окружность или ее часть. Обобщите это утверждение для кривых в \mathbf{R}^m .

5. Под каким углом пересекаются линии:

- а) $y = \sin x$ и $y = \cos x$; б) $x^2 + y^2 = 8x$ и $y^2 = x^3/(2-x)$?

6. Докажите, что тангенс угла μ , образованного касательной к линии $\rho = \rho(\varphi)$ с радиус-вектором, проведенным в точку касания, задается формулой $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{d\rho/d\varphi}$. Проверьте, что этот угол μ у логарифмической спирали $\rho = Ca^\varphi$, $a > 0$, постоянный. Докажите, что этим свойством могут обладать только прямые, окружности и логарифмические спирали.

7. Найдите порядок касания линий $y = \sin x$ и $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$ в начале координат.

8. Найдите уравнение окружности, имеющей с параболой $y = x^2$ в начале координат касание наибольшего порядка.

9. Найдите уравнение параболы, имеющей с линией $y = \ln x$ наибольший порядок касания в точке $A(1, 0)$.

10. Найдите многочлен $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, имеющий с линией $y = f(x)$ в точке $A(0, f(0))$ касание n -го порядка. Сделайте из этой задачи правильный вывод.

11. Найдите огибающую семейства прямых, на которых лежит лестница постоянной длины a , если ее концы скользят по осям прямоугольной системы координат.

12. Прямая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг точки, равномерно движущейся по второй прямой. Найдите огибающую этого семейства прямых.

13. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы $y^2 = 2ax$, перпендикулярных к ее оси.

14. Найдите огибающую семейства нормалей к кривой

$$\alpha(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)).$$

15. На зеркало, имеющее форму полуокружности, падает пучок параллельных лучей света. Найдите огибающую семейства отраженных лучей. (*Каустика*.)

16. Докажите, что семейство линий, ортогональных к линиям семейства $F(x, y) = C$, есть семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $\frac{dx}{\partial F/\partial x} = \frac{dy}{\partial F/\partial y}$.

13. Репер Френе плоской кривой единичной скорости

В середине девятнадцатого века Франция дала миру целый ряд замечательных ученых, работавших в разных областях науки. От сороковых до шестидесятых годов ведущим математиком Франции был Жозеф Лиувилль — прекрасный ученый, преподаватель и организатор. В кругу профессора Лиувилля работало много замечательных математиков, в том числе и герои настоящего пункта — Жан Фредерик Френе (1816–1900) и Жозеф Альфред Серре (1819–1885). Они являются авторами, пожалуй, одного из основных и часто применяемых понятий дифференциальной геометрии кривых — понятия подвижного репера вдоль кривой и «уравнений движения» этого репера.¹⁾

Рассмотрим произвольную регулярную кривую $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ (см. рис. 13.1).

От каждой точки кривой $\alpha(t)$ можно отложить два вектора — *единичный вектор касательной* $\vec{\tau}(t)$ (обозначение $\vec{\tau}$ от латинского *tangential* — «касательный») и *единичный вектор нормали*

¹⁾ Френе открыл «уравнения Френе» в 1847 г. Независимо от него, Серре открыл эти формулы в 1851 г., но печатный вариант работы Френе вышел только в 1852 г. Сейчас трудно установить, кто из них реально был первым в этом вопросе, да и вопросы приоритета выглядят совершенно ничтожно по сравнению со значимостью самого открытия.

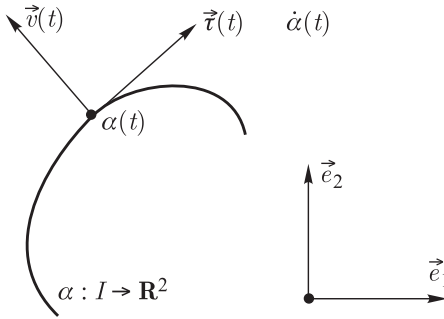


Рис. 13.1

$\vec{\nu}(t)$ (*normal*) к кривой $\alpha(t)$. Строго говоря, здесь мы имеем дело с парой гладких вектор-функций $\vec{\tau}, \vec{\nu} : I \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^2$, которые, для краткости речи, условимся называть просто *касательной* ($\vec{\tau}$) и *нормалью* ($\vec{\nu}$). Можно представлять себе, что эта пара векторов $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ «ползет» по кривой $\alpha(t)$ при изменении параметра t . Именно такой вдохновенный полет кинематической фантазии приводит изначально бездыханный репер в движение и объясняет часто употребляемый термин «подвижный репер вдоль кривой» (как будто какая-то колючая раскоряка $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ движется вдоль дорожки α , плавно повторяя ее изгибы и поскрипывая на крутых поворотах).



Определение 13.1. Репер $(\alpha(t); \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ называется *репером Френе* плоской регулярной кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, если выполнены следующие три условия:

- 1) в любой момент $t \in I$ имеем $|\vec{\tau}(t)| = |\vec{\nu}(t)| = 1$ и $\langle \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t) \rangle = 0$;
- 2) в любой момент $t \in I$ вектор $\vec{\tau}(t)$ сонаправлен с вектором скорости $\dot{\alpha}(t)$;
- 3) в любой момент $t \in I$ пара векторов $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ имеет положительную ориентацию (т.е. ориентирована так же, как стандартный базис (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , заботливо изображенный в правом нижнем углу рис. 13.1).

Пару векторов $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$, рассматриваемую как базис векторного пространства $\overline{\mathbf{R}}^2$ (без начальной точки $\alpha(t)$), мы будем называть *базисом Френе*. Ясно, что базис Френе в каждый момент $t \in I$ является базисом центраффинного пространства $\overline{\mathbf{R}}_{\alpha(t)}^2$ (см. п. 7).

В этом пункте мы начнем изучать свойства репера Френе для кривых единичной скорости. Дело в том, что если $\alpha(s)$ является

кривой единичной скорости, то просто-напросто $\vec{\tau}(s) = \dot{\alpha}(s)$, поэтому все свойства репера Френе в этом случае выглядят особенно ясно.

Пусть $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ — параметризация кривой единичной скорости. Тогда $\vec{\tau}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$, $\vec{\nu}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$ — параметризации векторов касательной и нормали. Действительно, $|\vec{\tau}| \equiv |\vec{\nu}| \equiv 1$, $\vec{\tau} \perp \vec{\nu}$, и

$$\det [\vec{\tau}, \vec{\nu}] = \begin{vmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{vmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \equiv 1 > 0,$$

что означает положительную ориентацию пары $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$.



Обратите внимание, что, по сути, второй вектор репера Френе $\vec{\nu}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$ получается из первого вектора $\vec{\tau}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ применением операции обобщенного векторного произведения. Это тот самый «игрушечный» (двухмерный) случай обобщенного векторного произведения, который упоминался нами в п.6. Разумеется, я обращаю ваше внимание на присутствие здесь конструкции обобщенного векторного произведения вовсе не для придания нашему изложению заумного и наукообразного вида. В дальнейшем, в случае пространства произвольной размерности, последний вектор репера Френе как раз и будет определяться через обобщенное векторное произведение всех предыдущих векторов репера.

Сейчас мы узнаем, каковы скорости (т.е. производные) базисных векторов репера Френе при движении вдоль кривой.

Теорема 13.1 (Френе–Серре). Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — кривая единичной скорости. Тогда существует гладкая скалярная функция $k(s) : I \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что в любой момент $s \in I$ выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s) = \vec{\tau}(s), \\ \dot{\vec{\tau}}(s) = k(s) \cdot \vec{\nu}(s), \\ \dot{\vec{\nu}}(s) = -k(s) \cdot \vec{\tau}(s). \end{cases}$$

Приведенные условия называются теперь *уравнениями Френе*¹⁾, а функция $k(s)$ — *кривизной* кривой $\alpha(s)$.

Нужно сказать, что первое уравнение в формулировке теоремы Френе–Серре я выписал только в силу исторически сло-

¹⁾ Это исторически сложившееся название. На самом деле эти условия являются не «уравнениями», а тождественными соотношениями.

жившейся традиции написания системы уравнений Френе — оно является лишь напоминанием определения вектора касательной. Содержательную часть теоремы составляют, конечно же, второе и третье уравнения системы.

Доказательство. Так как $|\vec{\tau}| \equiv 1$, то $\dot{\vec{\tau}} \perp \vec{\tau}$ (смотри важный факт из п. 5). Следовательно, $\dot{\vec{\tau}} \parallel \vec{\nu}$ и существует скалярная функция $k(s)$ такая, что $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$.

Умножим это равенство скалярно на $\vec{\nu}(s)$:

$$\langle \dot{\vec{\tau}}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = k(s) \langle \vec{\nu}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = k(s).$$

Это значит, что функция $k(s)$ — гладкая, так как скалярное произведение гладких функций является гладкой функцией.

Далее, $|\vec{\nu}| \equiv 1$, следовательно, $\dot{\vec{\nu}} \perp \vec{\nu}$ и существует скалярная функция $m(s)$ такая, что

$$\dot{\vec{\nu}}(s) = m(s)\vec{\tau}(s).$$

Нормаль всегда была, есть и будет перпендикулярна касательной, поэтому налицо тождество $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle \equiv 0$. Видишь тождество — дифференцируй!

$$\langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}} \rangle \equiv 0.$$

Вставим в это тождество выражения для $\dot{\vec{\tau}}$ и $\dot{\vec{\nu}}$:

$$\langle k(s)\vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, m(s)\vec{\tau} \rangle \equiv 0,$$

$$k(s) \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle + m(s) \langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle \equiv 0,$$

и, так как $\langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle \equiv \langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle \equiv 1$, получаем

$$k(s) + m(s) \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad m(s) \equiv -k(s),$$

а это, собственно, и требовалось. ◆

Сделаю несколько важных замечаний.



Замечание 13.1. Легко запомнить уравнения Френе в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица «перехода» $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$, связывающая совокупности векторов $\begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{\nu}} \end{bmatrix}$, является кососимметрической.



Замечание 13.2. С точки зрения линейной алгебры уравнения Френе есть не что иное, как разложения скоростей (т. е. производных) базисных векторов по базису Френе.



Замечание 13.3 (для любителей механических представлений). Поскольку $\vec{\tau}(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$, а вектор $\vec{\nu}(s)$ всегда единичной длины, то модуль кривизны $|k(s)|$ — это длина вектора $\vec{\tau}(s)$. А поскольку сам вектор $\vec{\tau}(s)$ есть вектор постоянной длины, то его производная $\dot{\vec{\tau}}(s)$ есть не что иное, как *скорость поворота* вектора касательной $\vec{\tau}(s)$ вокруг точки касания («угловая скорость»). Таким образом, кривизну $k(s)$ можно представлять себе как *величину скорости вращения* касательного вектора $\vec{\tau}(s)$ или, что то же самое, — величину «угловой скорости» нормального вектора $\vec{\nu}(s)$ (поскольку базисные векторы находятся в «жесткой связке»). Это прекрасно согласуется с нашими интуитивными представлениями — чем «кривее» кривая, тем быстрее поворачивается ее нормальный вектор при равномерном движении вдоль этой кривой.



Замечание 13.4 (для еще более искушенных механиков). Поскольку $|k(s)| = |\dot{\vec{\tau}}(s)| = |\ddot{\alpha}(s)|$, то модуль кривизны есть модуль нормального (центростремительного) ускорения точки $\alpha(s)$ при движении по кривой. Тангенциальное ускорение точки $\alpha(s)$ при этом равно нулю, так как $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ (см. п. 10). Это тоже согласуется с нашей интуицией — чем сильнее ¹⁾ тянешь точку перпендикулярно траектории движения, тем более искривленной будет получаться дальнейшая траектория (тем больше кривизна $k(s)$).

Два последних замечания демонстрируют нам, что кривизна кривой — это прекрасная числовая характеристика ее «искривленности». Чем больше кривизна, тем более изогнута линия в окрестности рассматриваемой точки. Следующие результаты подкрепляют такую репутацию кривизны с геометрической точки зрения.

Теорема 13.2 (характеризация прямой и окружности). Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — кривая 1-скорости, $k(s)$ — ее кривизна, $M = \alpha(I)$ — образ кривой $\alpha(s)$ на плоскости \mathbf{R}^2 . Тогда:

¹⁾ Словечко «сильнее» здесь поставлено не только ради усиления художественного образа, но и в буквальном смысле. Согласно второму закону Ньютона сила пропорциональна ускорению, а речь как раз идет об увеличении нормального ускорения.

- 1) $k \equiv 0 \Leftrightarrow M$ — прямая или ее часть,
 2) $k \equiv \text{const} \neq 0 \Leftrightarrow M$ — окружность радиуса $R = \frac{1}{|k|}$ или ее часть.


Доказательство. 1. Имеем $\ddot{\alpha} = \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$, поэтому $k \equiv 0 \Leftrightarrow \ddot{\alpha} \equiv \vec{0}$ (так как $\vec{\nu} \neq \vec{0}$).

Пусть $\ddot{\alpha} \equiv \vec{0}$. Интегрируем это тождество: $\dot{\alpha}(s) - \dot{\alpha}(s_0) \equiv \vec{0}$, следовательно, $\dot{\alpha}(s) \equiv \dot{\alpha}(s_0) \equiv \text{const}$. Еще раз интегрируем:

$$\int_{s_0}^s \dot{\alpha}(s_0) d\sigma = \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0) = \int_{s_0}^s \dot{\alpha}(s) d\sigma = \alpha(s) - \alpha(s_0).$$

В результате получаем уравнение прямой $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$ с начальной точкой $\alpha(s_0)$ и направляющим вектором $\dot{\alpha}(s_0)$.

Обратное очевидно: если $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$ — прямая, то после двукратного дифференцирования получаем, что $\ddot{\alpha} \equiv \vec{0}$. Следовательно, $k \equiv 0$.

 2. Возьмем кривую $\alpha(s)$, у которой $k \equiv \text{const} \neq 0$. Внимание! Замечательный и важный прием рассуждения! Рассмотрим конструкцию:

$$p(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s).$$

При каждом конкретном значении параметра s мы «идем» от точки $\alpha(s)$ вдоль нормального вектора $\vec{\nu}(s)$ на фиксированное расстояние $\frac{1}{k}$. В результате операции откладывания вектора $\frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$ от точки $\alpha(s)$ получаем, конечно, точку $p(s)$. Посчитаем производную $\dot{p}(s)$ и воспользуемся, по ходу дела, уравнением Френе:

$$\dot{p}(s) = \left(\alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s) \right)' = \dot{\alpha}(s) + \frac{1}{k}\dot{\vec{\nu}}(s) = \vec{\tau}(s) + \frac{1}{k}(-k\vec{\tau}(s)) \equiv \vec{0}.$$

Это означает, что $p(s) \equiv \text{const} = p_0$. Точка-то оказалась неподвижной и постоянной! Это значит:

$$\alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s) \equiv p_0,$$

$$\alpha(s) - p_0 = \frac{1}{k}\vec{\nu}(s).$$

Так как $|\vec{\nu}| \equiv 1$, длина вектора $\alpha(s) - p_0$ равна

$$|\alpha(s) - p_0| = \frac{1}{|k|}.$$

Это означает, что все точки кривой $\alpha(s)$ находятся на фиксированном расстоянии $\frac{1}{|k|}$ от неподвижной точки p_0 , т. е. $\alpha(s)$ — окружность радиуса $R = \frac{1}{|k|}$ с центром в точке p_0 .

Обратное утверждение очевидно: если $\alpha(s) = p_0 + R\vec{\nu}(s)$ — окружность радиуса R , то «лобовое» вычисление показывает, что

$$|k(s)| = |\langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle| = |\langle \ddot{\alpha}, \vec{\nu} \rangle| \equiv \frac{1}{R},$$

т. е. кривизна окружности постоянна и является величиной, обратной к радиусу этой окружности. \blacklozenge

Определение 13.2. Пусть $\alpha(s)$ — произвольная кривая единичной скорости, $k(s)$ — ее кривизна. Величина $\frac{1}{|k(s_0)|}$ называется *радиусом кривизны* кривой $\alpha(s)$ в точке s_0 .

Между прочим, в предыдущем п. 12 мы уже давали определение радиуса кривизны кривой $\alpha(s)$ как радиуса соприкасающейся окружности к кривой в точке $\alpha(s_0)$. Разумеется, математики — разумные люди и не будут давать разным понятиям одинаковые названия. Сейчас я вам это докажу. Вот задача на ближайшее будущее.

Задача. Составить уравнение соприкасающейся окружности к произвольной кривой $\alpha(s)$ единичной скорости в произвольной точке s_0 и доказать, что ее радиус равен $\frac{1}{|k(s_0)|}$.

Решение. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке p :

$$|z - p| = R,$$

где z — текущая точка. Надо найти p и R . Чтобы избавиться от модуля, удобнее возвести это уравнение в квадрат:

$$\langle z - p, z - p \rangle = R^2,$$

т. е. окружность задается как образ уравнения

$$F(z) = \langle z - p, z - p \rangle - R^2 = 0.$$

Вспомогательная функция

$$f(s) = F(\alpha(s)) = \langle \alpha(s) - p, \alpha(s) - p \rangle - R^2.$$

Соприкасающаяся окружность имеет порядок касания не ниже второго, т. е. в точке касания s_0 должны быть выполнены три условия: $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = 0$ и $f''(s_0) = 0$, которые дадут нам систему для нахождения p и R .

1). $f(s_0) = 0$. Это означает, что $|\alpha(s_0) - p| = R$, следовательно, окружность и кривая пересекаются в точке $\alpha(s_0)$ (это мы и так сразу понимали!).

2). $f'(s_0) = 0$. Считаем производную:

$$f'(s) = \langle \dot{\alpha}(s), \alpha(s) - p \rangle + \langle \alpha(s) - p, \dot{\alpha}(s) \rangle = 2 \langle \vec{\tau}(s), \alpha(s) - p \rangle.$$

Эта производная должна быть равна нулю в точке s_0 . Значит, $\langle \vec{\tau}(s_0), \alpha(s_0) - p \rangle = 0$. Это означает, что радиус $\alpha(s_0) - p$ соприкасающейся окружности перпендикулярен кривой $\alpha(s)$ в точке касания и направлен по нормали: $\alpha(s_0) - p = \lambda \cdot \vec{\nu}(s_0)$ (это мы тоже сразу понимали из геометрических представлений!).

Первые два условия ничего нового для нашей геометрической интуиции не сообщили.

3). Рассмотрим, наконец, условие $f''(s_0) = 0$. Считаем вторую производную и используем свое знание уравнений Френе:

$$\begin{aligned} f''(s) &= (2 \langle \vec{\tau}(s), \alpha(s) - p \rangle)' = \\ &= 2 \langle \dot{\vec{\tau}}(s), \alpha(s) - p \rangle + 2 \langle \vec{\tau}(s), \dot{\vec{\tau}}(s) \rangle = 2 \langle k(s) \vec{\nu}(s), \alpha(s) - p \rangle + 2. \end{aligned}$$

В точке s_0 это выражение должно быть равно нулю, т. е.

$$2 \langle k(s_0) \vec{\nu}(s_0), \alpha(s_0) - p \rangle + 2 = 0.$$

Получаем

$$2 \langle k(s_0) \vec{\nu}(s_0), \lambda \cdot \vec{\nu}(s_0) \rangle + 2 = 0,$$

т. е.

$$k(s_0) \cdot \lambda \cdot \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle = -1.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{-1}{k(s_0)}$. Больше нам ничего и не нужно, ибо из равенства $\alpha(s_0) - p = \lambda \cdot \vec{\nu}(s_0)$ мгновенно следует, что радиус соприкасающейся окружности равен

$$|\alpha(s_0) - p| = \frac{1}{|k(s_0)|},$$



а ее центр находится в точке $p = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \vec{\nu}(s_0)$. ◆

Определение 13.3. Точка $p = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \vec{V}(s_0)$ (т. е. центр соприкасающейся окружности в точке $\alpha(s_0)$) называется *центром кривизны* кривой $\alpha(s)$ в момент s_0 .

Запомните, пожалуйста, это определение, а также замечательную связь кривизны кривой и радиуса соприкасающейся окружности — они нам еще пригодятся в этом параграфе, а я на этом п. 13 заканчиваю.

14. **Натуральные уравнения кривой**

В этом пункте я продемонстрирую вам замечательный факт — плоская натурально параметризованная кривая полностью определяется некоторой начальной точкой, направлением движения из этой точки и своей функцией кривизны. Этот факт является частным случаем так называемой «основной теоремы локальной теории кривых», которую мы докажем в следующем параграфе для кривых в пространстве произвольной размерности. Однако плоский случай традиционно выделяется в отдельное рассмотрение по двум причинам. Во-первых, он особенно нагляден, во-вторых, в плоском случае оказывается возможным указать в явном виде процесс «восстановления» кривой единичной скорости по кривизне и начальным данным (точка и направление движения из этой точки). Более того, мы получим, в некотором смысле, готовые формулы, дающие параметризацию искомой кривой через ее функцию кривизны. В случае пространств более высокой размерности получить такие же формулы для произвольных кривых не представляется возможным.

Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — кривая единичной скорости. Зафиксируем момент $s_0 \in I$:

$$\alpha(s_0) = (x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0)$$

— это «начальная» точка на кривой; угол θ_0 — это угол между положительным направлением оси OX и вектором касательной $\vec{T}_0 = \vec{T}(s_0)$ — «начальный» угол (см. рис. 14.1).

«Теорема» 14.1. *По функции кривизны $k = k(s)$ и начальным условиям $[(x_0, y_0), \theta_0]$ кривая единичной скорости $\alpha(s)$ в окрестности момента s_0 восстанавливается однозначно.*

Обратите внимание — я намеренно заключил слово «теорема» в кавычки. Как уже говорилось, это утверждение является

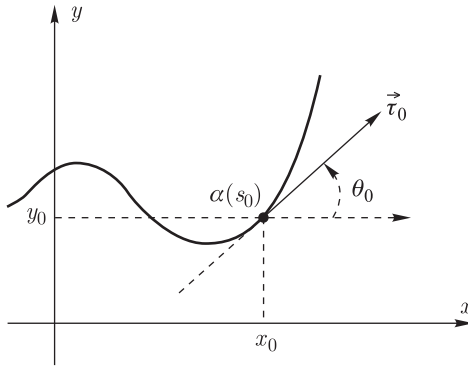


Рис. 14.1

частным случаем более общей теоремы, с которой нам предстоит познакомиться в дальнейшем. Кроме того, до настоящего момента мы никак не уточняли термины «восстанавливается» и «однозначно», которые фигурируют в приведенной формулировке «теоремы». Мы пока даже не очень понимаем, что ожидать от расплывчатого слова «восстанавливается» (что, собственно, надо доказывать-то?) и, признаюсь вам заранее, я вообще в этом пункте не буду доказывать «однозначность» получающейся кривой. Но хоть в чем-то мне надо быть последовательным, поэтому следующее слово я тоже вынужден заключить в кавычки.

«Доказательство». Вашему вниманию предлагаются следующие рассуждения, представляющие «процесс восстановления».

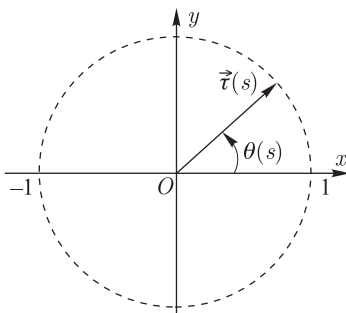


Рис. 14.2

Пусть $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ — искомая гладкая кривая¹⁾ и $\vec{\tau}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ — неизвестный пока касательный вектор искомой кривой. Мысленно отложим его от начала координат (от точки $o(0, 0)$).²⁾ Поскольку $\vec{\tau}(s)$ — вектор единичной длины, то его конец окажется на единичной окружности (см. рис. 14.2).

Это означает, что в окрестности момента s_0 можно указать такую функцию $\theta(s)$ (угол между осью Ox и вектором $\vec{\tau}(s)$ в мо-

¹⁾ Мы молчаливо предположим, что она существует!

²⁾ Более красочная фантазия: бережно снимем касательный вектор с кривой и не меняя его направления (!) переместим его начало в начало координат.

мент s), что

$$\vec{\tau}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)),$$

причем $\theta(s)$ — гладкая функция.¹⁾

Тогда

$$\dot{\vec{\tau}} = (-\dot{\theta}(s) \cdot \sin \theta(s), \dot{\theta}(s) \cdot \cos \theta(s)) = \dot{\theta}(s) \cdot (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)),$$

т. е. $\dot{\vec{\tau}}(s) = \dot{\theta}(s) \cdot \vec{\nu}(s)$.

Но из уравнений Френе мы знаем, что на самом деле $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s) \cdot \vec{\nu}(s)$, поэтому

$$\dot{\theta}(s) = k(s).$$



Это еще раз напоминает нам механический смысл кривизны кривой как *скорости поворота касательного вектора* (скорости изменения угла его наклона к оси OX) и, между прочим, подтверждает нашу веру в гладкость функции $\theta(s)$.

После получения ключевого соотношения $\dot{\theta}(s) = k(s)$ дальнейшее развитие событий очевидно. Поскольку функция $k(s)$ и начальные условия $[(x_0, y_0), \theta_0]$ нам даны, а $\vec{\tau}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$, то последовательно находим желаемое:



$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s) ds, \\ x(s) &= x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \theta(s) ds, \\ y(s) &= y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \theta(s) ds. \end{aligned}$$

Обведите у себя в тетрадке эти формулы в рамочку — они как раз и позволяют вычислить (если повезет взять эти жуткие интегралы!) параметризацию искомой кривой $\alpha(s)$. «Доказательство» «теоремы» на этом заканчивается. ◆

¹⁾ Раз уж мы молчаливо предположили существование гладкой искомой кривой, то нам придется принять, что и функция $\theta(s)$ обязана быть гладкой, ибо она равна, например, $\arccos(\dot{x}(s))$.

Весь предыдущий рассказ этого пункта позволяет, наконец, дать такое

Определение 14.1. Уравнение $k = k(s)$ или равносильные ему параметрические уравнения $k = k(t), s = s(t)$ называются *натуральными уравнениями* кривой $\alpha(s)$.

Согласно «теореме» 14.1 эти уравнения определяют кривую $\alpha(s)$ с точностью до расположения на плоскости, т. е. с точностью до изометрии, а в совокупности с начальными условиями $[(x_0, y_0), \theta_0]$ натуральные уравнения определяют кривую $\alpha(s)$ однозначно.



Замечание 14.1. Педагогический опыт автора показывает, что студенты взяли моду путать понятия «натуральные уравнения» кривой и «натуральная параметризация» кривой. Балбесы! Я им не завидую, особенно на экзамене.

В заключение п. 14 хочется еще раз посоветовать, что все рассуждения получились у нас очень уж нестрогими, скорее это были некоторые «наброски» идей и рассуждений, которые обретут законную силу в следующем параграфе. Однако для педантичных читателей, любителей строгости и завершенности рассуждений, приведу назревшее к этому моменту упражнение. Оно расставит все точки над «и».

Упражнение 14.1. Аккуратно докажите основную «теорему» этого пункта, рассматривая формулы Френе как систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

с неизвестными $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ (реально две неизвестные скалярные функции) и заданной функцией $k = k(s)$. Кривая $\alpha(s)$ тогда получится из найденного решения $\vec{\tau}(s)$ этой системы:

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \vec{\tau}(s) ds.$$

Аккуратное решение этого упражнения должно узаконить все вольности и «нестрогости», возникшие в этом пункте, поскольку «восстановление» и «однозначность» кривой $\alpha(s)$ будут трактоваться теперь как существование и единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи и упражнения



1. Детская задачка — напишите натуральные уравнения окружности радиуса 741.

2. Какие кривые задаются натуральными уравнениями ($a > 0$):

$$\text{а) } k = \frac{a}{a^2 + s^2}; \quad \text{б) } \frac{1}{k} = as; \quad \text{в) } s^2 + \frac{1}{k^2} = 16a^2;$$

$$\text{г) } \frac{1}{k^2} = 2as; \quad \text{д) } \frac{1}{k^2} + a^2 = \frac{a^2}{e^{2s+a}}.$$

3. Нарисуйте схематично кривую, выходящую из начала координат в направлении вектора e_1 (оси OX), у которой кривизна пропорциональна длине дуги: $k = as$, $a > 0$. (*Клоттоида*.)

4. Пусть в некоторой точке $s_0 \in I$ кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ выполнены условия $k(s_0) = 0$, $\dot{k}(s_0) = 0$ и $\ddot{k}(s_0) \neq 0$. Докажите, что в некоторой достаточно малой окрестности точки $\alpha(s_0)$ соприкасающаяся окружность кривой $\alpha(s)$ не пересекает саму кривую $\alpha(s)$ нигде, кроме точки $\alpha(s_0)$.

5. Докажите, что циклоида является *изохронной траекторией*, т. е. если арку циклоиды расположить в вертикальной плоскости вершиной A вниз, то время, затрачиваемое материальной точкой на скатывание по циклоиде из произвольной точки B до вершины A под действием силы тяжести, не зависит от начального положения точки B на циклоиде. (Факт, открытый Х. Гюйгенсом.)



15. Репер Френе и кривизна произвольной регулярной плоской кривой

До сих пор мы рассматривали репер Френе и кривизну кривых единичной скорости (и, надо сказать, обнаружили массу интересных полезных свойств). Пусть теперь $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — произвольная регулярная кривая. Мы уже обсуждали в п. 10, что теоретически эта кривая всегда эквивалентна некоторой кривой единичной скорости, однако практически отыскать натуральную параметризацию регулярной кривой может оказаться сложно и даже невыполнимо. Поэтому для практических нужд весьма полезно знать, как выглядят уравнения Френе для произвольно параметризованной кривой, и уметь вычислять кривизну, не переходя к натуральной параметризации. Решению этих задач мы и посвятим настоящий пункт.

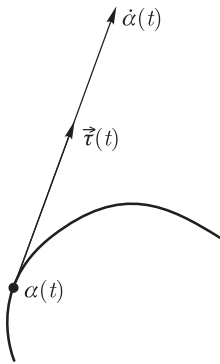


Рис. 15.1

Итак, пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — регулярна. Очевидно, что ее единичный вектор касательной $\vec{\tau}(t)$ получается нормированием вектора скорости (см. рис. 15.1):

$$\vec{\tau}(t) \dot{\alpha}(t) \alpha \vec{\tau}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}.$$

Следовательно, единичный вектор нормали имеет координаты

$$\vec{\nu}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}.$$

Таковы векторы репера Френе для произвольной плоской регулярной кривой.

Найдем теперь кривизну. Поскольку $\alpha(t)$ — регулярна, то $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ — кривая единичной скорости. Так как $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(t)| dt$, то $\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = |\dot{\alpha}(t)|$. Посчитаем теперь производные кривой $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \beta'(s(t)) \cdot \dot{s}(t) = \dot{\beta}(s) \cdot |\dot{\alpha}(t)| = \vec{\tau}(s(t)) \cdot |\dot{\alpha}(t)|, \\ \ddot{\alpha}(t) &= \frac{d|\dot{\alpha}(t)|}{dt} \cdot \vec{\tau} + |\dot{\alpha}(t)| \cdot \vec{\tau}'(s) \cdot \dot{s}(t) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} |\dot{\alpha}(t)| \right) \cdot \vec{\tau} + |\dot{\alpha}(t)|^2 \cdot k(s(t)) \cdot \vec{\nu}. \end{aligned}$$

При вычислении второй производной мы воспользовались уже известным нам уравнением Френе для кривых единичной скорости $\vec{\tau}'(s) = k(s) \cdot \vec{\nu}(s)$. Любители линейной алгебры скажут, что мы получили разложение вектора второй производной по базису Френе, а любители механики скажут, что мы разложили ускорение $\ddot{\alpha}(t)$ на *тангенциальную* (коэффициент перед $\vec{\tau}$) и *нормальную* (коэффициент перед $\vec{\nu}$) составляющие.¹⁾

¹⁾ Еще раз обращаю ваше внимание на механический смысл кривизны — у кривой единичной скорости кривизна есть величина нормального ускорения.

Посчитаем определитель, столбцами которого являются векторы скорости и ускорения:

$$\begin{aligned} \det [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] &= \det \left[|\dot{\alpha}| \cdot \vec{\tau}, |\dot{\alpha}| \cdot \vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 \cdot k \cdot \vec{\nu} \right] = \\ &= \det \left[|\dot{\alpha}| \cdot \vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^2 \cdot k \cdot \vec{\nu} \right] = |\dot{\alpha}|^3 \cdot k \cdot \det [\vec{\tau}, \vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3 \cdot k. \end{aligned}$$



Отсюда мгновенно находим кривизну:

$$k(t) = \frac{\det [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3},$$

благо кривая регулярна, т. е. $|\dot{\alpha}| \neq 0$ и на $|\dot{\alpha}|^3$ можно смело делить. Это общая «инженерная» формула. Обведите ее в рамочку.

Теперь легко написать «рабочие» формулы для вычисления кривизны кривых, заданных различными способами. Например, для параметрически заданной кривой в декартовой прямоугольной системе координат:

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

— в знаменателе стоит «неприятная» степень с дробным показателем. Ничего не поделаешь, так устроена матушка природа — функция кривизны часто имеет особенности.

Упражнение 15.1. Найдите кривизну кривой, заданной в виде $y = f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат.

Упражнение 15.2. Найдите кривизну кривой, заданной в виде $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат.

Посмотрим теперь, как выглядят уравнения Френе произвольной плоской регулярной кривой. Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — регулярная кривая и $\beta(s)$ — положительно эквивалентная ей кривая единичной скорости, т. е. $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Договоримся, что нижний индекс у векторов репера Френе временно будет обозначать ту кривую, к которой эти векторы относятся. Тогда, очевидно, в любой момент $t \in I$

$$\vec{\tau}_\alpha(t) = \vec{\tau}_\beta(s(t)),$$

$$\vec{\nu}_\alpha(t) = \vec{\nu}_\beta(s(t)).$$

Находим производные

$$\dot{\vec{\tau}}_\alpha(t) = \dot{\vec{\tau}}_\beta(s) \cdot \dot{s}(t),$$

$$\dot{\vec{\nu}}_\alpha(t) = \dot{\vec{\nu}}_\beta(s) \cdot \dot{s}(t).$$

Уравнения Френе для кривой единичной скорости (т. е. выражения для векторов $\vec{\tau}_\beta$ и $\vec{\nu}_\beta$) мы уже знаем из п. 13, кроме того, $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$, поэтому окончательно получаем *уравнения Френе для произвольной плоской регулярной кривой*:



$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = |\dot{\alpha}(t)| \cdot \vec{\tau}(t), \\ \dot{\vec{\tau}}(t) = |\dot{\alpha}(t)| \cdot k(t) \cdot \vec{\nu}(t), \\ \dot{\vec{\nu}}(t) = |\dot{\alpha}(t)| \cdot (-k(t)) \cdot \vec{\tau}(t). \end{cases}$$

Эти соотношения отличаются от уравнений Френе для кривой единичной скорости только наличием множителя $|\dot{\alpha}|$ в каждом соотношении (который, разумеется, равен единице для кривой единичной скорости). В матричной форме уравнения Френе для произвольной плоской регулярной кривой выглядят так:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} \\ \dot{\vec{\nu}} \end{bmatrix} = |\dot{\alpha}| \cdot \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix}.$$

Все комментарии к этим уравнениям и различные толкования смысла функции кривизны прочитайте еще раз в п. 13 — они остаются в силе и для произвольных плоских регулярных кривых, а я на этом п. 15 заканчиваю, поскольку все наши цели, анонсированные в начале этого пункта, оказались достигнуты.

Задачи и упражнения



1. Возьмите эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вычислите его кривизну и укажите на нем точки, где кривизна максимальна и где минимальна.

2. Найдите кривизну следующих кривых:

а) $y = \sin x$; б) $y^2 = 2ax$;
в) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3)$; г) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

3. Напишите уравнение соприкасающейся окружности к линии $y = \sin x$ в точке $A(\pi/2, 1)$.

4. Докажите, что в точке кривой, где кривизна принимает экстремальное значение, соприкасающаяся окружность имеет с кривой касание порядка, не ниже третьего.

5. Найдите векторы репера Френе и кривизну циклоиды

$$\alpha(t) = t(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)).$$

Аккуратно запишите уравнения Френе для этой циклоиды и убедитесь в их справедливости.

6. Докажите, что если в точке t_0 кривизна кривой $\alpha(t)$ принимает минимальное значение, то образ кривой $\alpha(t)$ в некоторой окрестности точки $\alpha(t_0)$ лежит внутри соприкасающейся окружности к кривой $\alpha(t)$ в точке $\alpha(t_0)$.

16. Понятие о сферическом отображении — замечательной идее Гаусса

В этом пункте мы восстановим историческую справедливость и отдадим должное великолепной идее Карла Фридриха Гаусса, который задолго до появления работ Френе и Серре придумал способ определения кривизны кривых и поверхностей.¹⁾ Речь идет о так называемом «сферическом отображении».

Гаусс обратил внимание на следующее обстоятельство — если рассматривать кривые на плоскости \mathbf{R}^2 или поверхности в пространстве \mathbf{R}^3 , то в каждой точке рассматриваемого объекта (кривой или поверхности) можно построить в некотором смысле единственный нормальный вектор единичной длины (см. рис. 16.1).

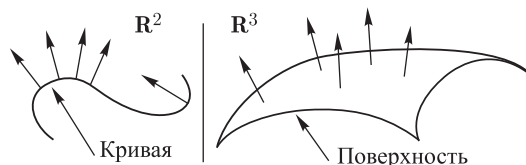


Рис. 16.1

Здесь существенно, что «размерность»²⁾ объекта (кривой или поверхности) на единицу меньше размерности пространства, в котором находится этот объект. Например, для «одномерной» кривой в трехмерном пространстве это не так — в каждой точке кривой в \mathbf{R}^3 существует бесконечно много «нормальных» векто-

¹⁾ Работы Гаусса по теории поверхностей выполнены в начале XIX в., в то время как уравнения Френе датируются 1847 г.

²⁾ Термин «размерность» пока будем воспринимать лишь интуитивно, поэтому он взят в кавычки — мы дадим определение размерности кривой и поверхности во второй главе этой книжки.

ров (в том числе и единичных). Векторов, которые перпендикулярны касательному вектору в этой точке — аж целая плоскость (см. рис. 16.2).

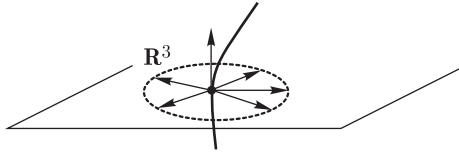


Рис. 16.2

Вероятно, в детстве вам приходила в голову мысль о том, что в диаметрально противоположных точках земного шара вертикально растущие елки растут в противоположные стороны. Если нет, то обдумайте хорошенько эту мысль сейчас, и вот в каком ракурсе — в разных точках плоской кривой (или поверхности в \mathbf{R}^3) нормальные векторы могут торчать в разные стороны — посмотрите еще раз на рис. 16.1. Очевидно, что чем более изогнута кривая (или поверхность), тем больше разброс направлений у ее нормальных векторов. Вы когда-нибудь изгибали руками массажную щетку или видели, как сворачивается испуганный еж?

Гауссу пришла мысль выделить на кривой небольшой участок вокруг некоторой точки T (в случае поверхности — небольшую площадку вокруг точки T), аккуратно снять с выделенной дольки все единичные нормальные векторы и бережно, не меняя их направлений, отложить собранные нормальные векторы от начала координат (см. рис. 16.3).

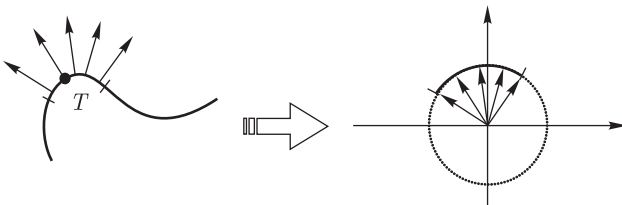


Рис. 16.3

Ясно, что концы перенесенных в начало координат единичных нормальных векторов окажутся на единичной окружности (а в случае поверхности в \mathbf{R}^3 — на единичной сфере), и утыкают на единичной окружности некоторую дугу (а концы векторов, перенесенных с поверхности, утыкают на единичной сфере некоторую площадку). Сегодня математики называют эту процедуру перенесения нормальных векторов *сферическим отображением Гаусса*.



Теперь внимание! Чем более изогнута исходная кривая (поверхность), тем больше разброс направлений нормальных векторов, тем большего размера дуга окружности (площадка на сфере) окажется утыканной при сферическом отображении!

После этих наблюдений для определения кривизны Гауссу осталось только технично применить понятие предела из математического анализа, которым он владел в совершенстве. Он назвал кривизной кривой (поверхности) в точке T величину

$$K = \lim_{\substack{\text{Размер окрестности} \\ \text{точки } T \rightarrow 0}} \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Размер области на сфере,} \\ \text{утыканной при сферическом} \\ \text{отображении} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{Размер окрестности} \\ \text{точки } T \end{array} \right)}.$$

Под словом «размер» в этой формуле понимается либо длина дуги (в случае сферического отображения кривой), либо площадь площадки (в случае сферического отображения поверхности). Так определенную величину K мы называем теперь *гауссовой кривизной*. Интуитивно ясно, что чем более изогнута кривая (поверхность), тем больше числитель дроби, стоящей под знаком предела, тем больше должно получаться значение гауссовой кривизны K .

Вот такими общими словами я первоначально познакомил вас с фундаментальными понятиями дифференциальной геометрии — сферическим (нормальным) отображением и гауссовой кривизной. Более формальные и строгие определения находятся в следующей главе этой книжки, и мы не станем сейчас сильно забегать вперед в погоне за общностью и красотой геометрических понятий.

Давайте снова обратимся к милому для этого параграфа случаю и рассмотрим плоскую регулярную кривую $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$. Оказывается, гауссова кривизна кривой $\alpha(t)$ в произвольной точке $\alpha(t_0)$ есть не что иное, как наша родная кривизна $k(t_0)$, возникшая при изучении репера Френе. Чтобы продемонстрировать это чудесное совпадение двух (казалось бы!) разных понятий кривизны, нам придется более строго формализовать понятия сферического отображения и гауссовой кривизны именно для случая плоской кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$. Этим и займемся.

Пусть \mathbf{S}^1 — единичная окружность с центром в начале координат, расположенная, разумеется, в плоскости \mathbf{R}^2 .

Определение 16.1. Отображение $\sigma : \alpha(I) \rightarrow \mathbf{S}^1$, сопоставляющее каждой точке $\alpha(t)$ кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ точку на единичной окружности \mathbf{S}^1 с радиус-вектором $\vec{v}(t)$, называется *сферическим*

отображением. Дуга окружности $\sigma(\alpha(I)) \subseteq \mathbf{S}^1$ — образ сферического отображения σ .

Пусть $\alpha|_{t_0}^{t_1}$ — дуга кривой $\alpha(t)$ между точками t_0 и t_1 , т. е. множество точек плоскости $\alpha|_{t_0}^{t_1} = \{\alpha(t) | t_0 \leq t \leq t_1; t_0, t_1 \in I\}$, которое является частью линии $\alpha(I)$. Через $\ell[\beta]$ обозначаем, как обычно, длину дуги β . Таким образом, например, $\ell[\sigma(\alpha|_{t_0}^{t_1})]$ означает длину дуги единичной окружности, являющуюся образом дуги $\alpha|_{t_0}^{t_1}$ при сферическом отображении.

Последуем далее идеям Гаусса и дадим



Определение 16.2. Величина

$$K(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\ell[\sigma(\alpha|_{t_0}^t)]}{\ell[\alpha|_{t_0}^t]}$$

называется *гауссовой кривизной* кривой $\alpha(t)$ в точке t_0 .

Замечание 16.1. Согласно нашему определению гауссова кривизна $K(t_0)$ всегда является неотрицательной величиной, поскольку в ее определении участвуют лишь неотрицательные величины — длины дуг. Для того чтобы приписать величине $K(t_0)$ определенный знак, имеющий особый геометрический смысл, сам Гаусс прибегал к некоторым дополнительным построениям. Мы пока это делать не будем, так как столь подробная проработка понятия гауссовой кривизны пока не входит в наши планы.

Теорема 16.1. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — регулярная кривая, $k(t)$ — ее функция кривизны, $\sigma : \alpha(I) \rightarrow \mathbf{S}^1$ — сферическое отображение, $t_0 \in I$ — фиксированный момент. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\ell[\sigma(\alpha|_{t_0}^t)]}{\ell[\alpha|_{t_0}^t]} = |k(t_0)|.$$

Доказательство. Возьмем момент t настолько близким к моменту t_0 , чтобы изменение угла наклона вектора \vec{v} к оси OX было монотонным на промежутке $[t_0, t]$ (или $[t, t_0]$). У единичной окружности длина дуги равна центральному углу φ (см. рис. 16.4).

Таким образом,

$$\ell[\sigma(\alpha|_{t_0}^t)] = \varphi = \arccos \frac{\langle \vec{v}(t_0), \vec{v}(t) \rangle}{|\vec{v}(t_0)| \cdot |\vec{v}(t)|} = \arccos \langle \vec{v}(t_0), \vec{v}(t) \rangle.$$

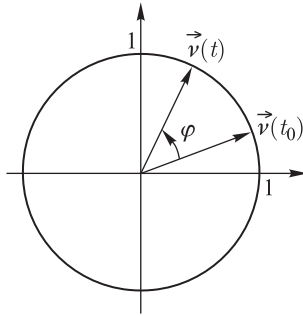


Рис. 16.4

Посчитаем теперь интересующий нас предел:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\ell[\sigma(\alpha|_{t_0}^t)]}{\ell[\alpha|_{t_0}^t]} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\arccos \langle \vec{v}(t_0), \vec{v}(t) \rangle}{\int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(t)| dt} = (\text{по правилу Лопиталя}) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{-\langle \vec{v}(t_0), \dot{\vec{v}}(t) \rangle}{|\dot{\alpha}(t)| \cdot \sqrt{1 - \langle \vec{v}(t_0), \vec{v}(t) \rangle^2}} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{k(t) \cdot |\dot{\alpha}(t)| \cdot \langle \vec{v}(t_0), \vec{\tau}(t) \rangle}{|\dot{\alpha}(t)| \cdot \sqrt{1 - \langle \vec{v}(t_0), \vec{v}(t) \rangle^2}} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{k(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = k(t_0).
 \end{aligned}$$

Что, собственно, и требовалось. ◆



Обратите внимание, что кривизна $k(t_0)$ кривой в данной точке $\alpha(t_0)$ никак не зависит от способа параметризации рассматриваемой кривой, так как она равна гауссовой кривизне, т. е. величине, для определения которой понятие параметризации совершенно не используется.¹⁾ Таким образом, кривизна плоской кривой является «чисто» геометрической характеристикой линии и зависит только от «изогнутости» этой линии в окрестности рассматриваемой точки.

¹⁾ Для определения гауссовой кривизны используется только понятие длины кривой, а длина кривой инвариантна относительно замены параметра.

Этим замечанием, пожалуй, мы и закончим наше первоначальное знакомство с понятиями сферического отображения и гауссовой кривизны.

Задача и упражнение



1. Возьмите цепную линию $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, найдите ее репер Френе и аккуратно выпишите формулы, задающие ее сферическое отображение. Следуя идеям Гаусса, вычислите гауссову кривизну $K(t_0)$ цепной линии в ее вершине. Сравните полученный результат со значением кривизны $k(t_0)$ цепной линии в ее вершине.

17. Локальное строение плоских кривых

Основная задача этого пункта — понять, как может вести себя гладкая кривая в некоторой достаточно малой окрестности своей точки, т. е. рассмотреть «локальное строение» кривой. По ходу решения этой задачи мы нарисуем фрагменты линий, соответствующих разным типам поведения кривой в окрестности рассматриваемой точки. При этом на протяжении всего пункта мы не будем стремиться к абсолютной строгости наших рассуждений, поскольку наша цель — разглядеть основные эффекты и уловить суть рассуждений двухсотлетней давности, а не придавать им абсолютно корректные формулировки в духе современных университетских учебников по математическому анализу.

Итак, наша задача — изучать форму линий в окрестностях различных точек и классифицировать эти формы. Где-то я слышал выражение: «Хочешь познать явление — изучай его особенности!». Разумеется, что нас как раз и будут интересовать возможные особенности поведения кривой. Подобно ботаникам, которые классифицируют растения и дают им названия, мы будем классифицировать и наделять именами точки на кривых, в окрестностях которых происходят те или иные явления.

Начнем вот с каких наблюдений. Мы видели в п. 8, что в точках кривой, где нарушается ее регулярность, могут возникать особенности типа «излом». Возникает мысль, прежде всего разделить в нашей классификации регулярные и нерегулярные точки и дать им названия.

Определение 17.1. Точка $t_0 \in I$, где $\dot{\alpha}(t_0) = \vec{0}$, называется *особой точкой*.

Таким образом, в особой точке происходит нарушение регулярности.

Идем далее. Мы помним, что кривизна плоской кривой вычисляется по формуле $k = \frac{\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}$. Значит, $k = 0 \Leftrightarrow \det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = 0 \Leftrightarrow \dot{\alpha} \parallel \ddot{\alpha}$. Разделим в нашей классификации точки с нулевой кривизной и точки с ненулевой кривизной.

Определение 17.2. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ называется *бирегулярной* в точке $t \in I$, если $\det[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)] \neq 0$, т. е. векторы $\dot{\alpha}(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$ не коллинеарны. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ называется *бирегулярной*, если она бирегулярна в каждой точке интервала I .



Наблюдение 17.2. Бирегулярная кривая всегда является регулярной. Обратное неверно. Контрпример — прямая линия, у которой $\dot{\alpha} \parallel \ddot{\alpha}$.

Определение 17.3. Точка $t_0 \in I$ называется:

- 1) *точкой распрямления*, если $\dot{\alpha}(t_0) \neq \vec{0}$, но $\dot{\alpha}(t_0) \parallel \ddot{\alpha}(t_0)$, т. е. в этой точке происходит нарушение бирегулярности, но не регулярности;
- 2) *бирегулярной точкой*, если $\dot{\alpha}(t_0) \not\parallel \ddot{\alpha}(t_0)$, т. е. в этой точке у кривой $\alpha(t)$ кривизна $k(t_0)$ отлична от нуля.

Возьмем гладкую кривую $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ и зафиксируем момент $t_0 \in I$. Посмотрите внимательно на рис. 1 и представьте себе, как изменяется вектор секущей $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$:

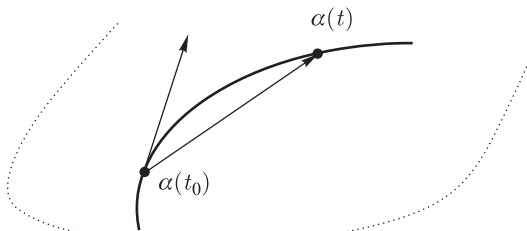


Рис. 17.1

Конечно, при $t \rightarrow t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$, образно говоря, «сжимается в точку» (кривая-то непрерывна!). Но его направление становится все ближе и ближе к направлению касательного вектора!



Разумно считать, что предельное положение секущей прямой $(\alpha(t), \alpha(t_0))$ при $t \rightarrow t_0$ и есть *касательная прямая* к кривой $\alpha(t)$ в точке $\alpha(t_0)$, если, конечно, такое предельное положение существует.

Запишем формулу Тейлора для вектора секущей $\alpha(t) - \alpha(t_0)$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) - \alpha(t_0) &= \\ &= \dot{\alpha}(t_0) \frac{(t-t_0)}{1!} + \ddot{\alpha}(t_0) \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \alpha^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^n}{n!} + R_n, \end{aligned}$$

где R_n — остаточный член.

Продолжаем нашу классификацию точек на кривой и присвоение им названий. Посмотрите внимательно на формулу Тейлора. В ней участвуют производные кривой $\alpha(t)$, вычисленные в точке t_0 . Пусть \vec{p} — порядок первой отличной от нуля производной $\alpha^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$, q — порядок первой **следующей** за $\alpha^{(p)}(t_0)$ производной такой, что $\alpha^{(p)}(t_0)$ не коллинеарна $\alpha^{(q)}(t_0)$. Ясно, что $q > p$.

В такой ситуации будем говорить, что точка t_0 имеет тип (p, q) (или является *точкой типа* (p, q)).¹⁾

Наблюдение 17.2. Бирегулярные точки — это точки типа $(1, 2)$; особые точки — это точки типа (p, q) , где $p > 1$; если у точки распрямления существует тип, то это точка типа $(1, q)$, где $q > 2$.

Идем далее. Пусть точка t_0 является точкой типа (p, q) . Тогда

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \alpha^{(p)}(t_0) \frac{(t-t_0)^p}{p!} + \dots + \alpha^{(q)}(t_0) \frac{(t-t_0)^q}{q!} + \dots + R.$$

Эту формулу можно переписать и так:

$$\frac{p!}{(t-t_0)^p} (\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \alpha^{(p)}(t_0) + R_1,$$



где $R_1 \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$. Из такой записи сразу видно, что вектор $\alpha^{(p)}(t_0)$ является *направляющим вектором касательной*, т. е. предельное положение секущей прямой $(\alpha(t), \alpha(t_0))$ коллинеарно вектору $\alpha^{(p)}(t_0)$.

Для придания дальнейшим записям ясности и большей компактности, введем следующие обозначения: $\alpha^{(p)}(t_0) = \vec{a}$, $\alpha^{(q)}(t_0) = \vec{b}$, $t - t_0 = u$. Векторы (\vec{a}, \vec{b}) образуют базис, а тройка $(\alpha(t_0); \vec{a}, \vec{b})$ — репер на плоскости R^2 (см. рис. 17.2).

¹⁾ Разумеется, может случиться, что у точки не существует типа — примером является любая точка прямой $\alpha(t) = (t, 0)$ или (менее тривиально!) — точка $(1, 0)$ на рис. 11.1. Точки без типа — это, чаще всего, точки распрямления.

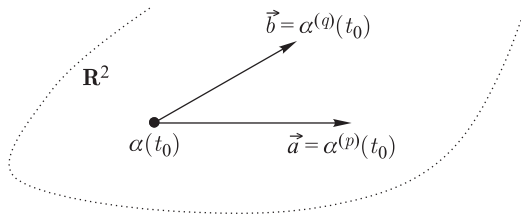


Рис. 17.2


Разложим все векторы-производные $\alpha^{(i)}(t_0)$ в формуле Тейлора по базису (\vec{a}, \vec{b}) и приведем подобные:

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = (\xi_1 u^p + \xi_2 u^{p+1} + \dots) \vec{a} + (\eta_1 u^q + \dots) \vec{b}.$$

В этом разложении наибольшее влияние на коэффициенты перед векторами \vec{a} и \vec{b} оказывают первые слагаемые в каждой скобке, ведь остальные слагаемые в каждой скобке — бесконечно малые более высокого порядка (при $t \rightarrow t_0$), чем первые слагаемые. Пренебрежем бесконечно малыми более высокого порядка и напишем ¹⁾

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) \approx \xi \cdot u^p \cdot \vec{a} + \eta \cdot u^q \cdot \vec{b},$$

где, очевидно, $\xi = \frac{1}{p!} \geq 0$, $\eta = \frac{1}{q!} \geq 0$.

 Предыдущие рассуждения означают, что знаки коэффициентов перед базисными векторами определяются только знаком величины $t - t_0 = u$. Знаки коэффициентов перед векторами \vec{a} и \vec{b} определяют, в какой четверти координатной плоскости $(\alpha(t_0); \vec{a}, \vec{b})$ находится точка $\alpha(t)$. Становится ясно, что расположение точки $\alpha(t)$ в окрестности начала координат (точки $\alpha(t_0)$) зависит от четности степеней p и q .

Ничего не поделаешь, придется далее рассматривать случаи различных типов (p, q) точки t_0 .

Случай 1. p — нечетно, q — нечетно.

Если $t < t_0$, то $u < 0$, следовательно, $\xi u^p < 0$, $\eta u^q < 0$. Обе координаты точки $\alpha(t)$ отрицательны. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит в третьей четверти репера $(\alpha(t_0); \vec{a}, \vec{b})$.

¹⁾ Я понимаю, что весь предыдущий абзац совершенно неприемлем для современного университетского учебника по математическому анализу, но придание должной строгости этому вольному абзацу может растянуться страницы на полторы и ясности в существо вопроса не внесет. Ограничимся здесь таким «некорректным» рассуждением, а в качестве утешения для любителей строгих рассуждений поставим в следующей формуле знак «приближенно равно».

Если $t > t_0$, то $u > 0$, следовательно, $\xi u^p > 0$, $\eta u^q > 0$. Обе координаты положительны. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит в первой четверти системы координат $(\alpha(t_0); \vec{a}, \vec{b})$.

Кривая при возрастании параметра $t \in O(t_0)$ выходит из третьей четверти и переходит в первую четверть (в момент $t = t_0$ кривая проходит через начало координат). При этом в момент $t = t_0$ касательной к ней служит вектор $\alpha^{(p)}(t_0) = \vec{a}$, т. е. горизонтальная ось координат. Качественно ¹⁾ кривая выглядит как на рис. 17.3.

Резюме: если точка t_0 типа (p, q) является точкой (*нечет, нечет*), то кривая в окрестности точки $\alpha(t_0)$ качественно выглядит как показано на рис. 17.3, а точка t_0 называется *точкой перегиба*.

В следующих трех случаях все рассуждения происходят аналогично и как по маслу.

Случай 2. p — нечетно, q — четно.

Если $t < t_0$, то $u < 0$, следовательно, $\xi u^p < 0$, $\eta u^q > 0$. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит во второй четверти. Если $t > t_0$, то $u > 0$, следовательно, $\xi u^p > 0$, $\eta u^q > 0$. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит в первой четверти (см. рис. 17.4).

Напоминаю, что в момент $t = t_0$ касательной к $\alpha(t)$ служит вектор $\alpha^{(p)}(t_0) = \vec{a}$, т. е. горизонтальная ось координат.

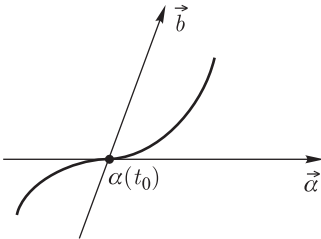


Рис. 17.3

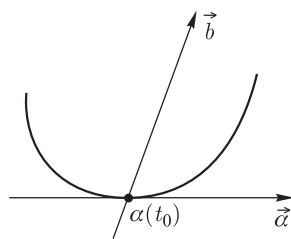


Рис. 17.4

Резюме: если точка t_0 типа (p, q) является точкой (*нечет, чет*), то кривая в окрестности точки $\alpha(t_0)$ качественно выглядит как показано на рис. 17.4, а точка t_0 называется *точкой изгиба*.

Случай 3. p — четно, q — нечетно.

Если $t > t_0$, то $u > 0$, следовательно, $\xi u^p > 0$, $\eta u^q > 0$. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит в первой четверти. Если $t < t_0$,

¹⁾ Общепринятый математический термин «качественно» в данном контексте означает — примерно, приблизительно, но общая закономерность и общий вид именно такой.

то $u < 0$, следовательно, $\xi u^p > 0$, $\eta u^q < 0$. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит в четвертой четверти (см. рис. 17.5).

Резюме: если точка t_0 типа (p, q) является точкой (*чет*, *нечет*), то кривая в окрестности точки $\alpha(t_0)$ качественно выглядит как показано на рис. 17.5 и точка t_0 называется *точкой возврата первого рода*.

Случай 4 (самый красивый!). p — *четно*, q — *четно*.

Если $t < t_0$, то $u < 0$, следовательно, $\xi u^p > 0$, $\eta u^q > 0$. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ лежит, как обычно, в первой четверти. Если $t > t_0$, то $u > 0$, следовательно, $\xi u^p > 0$, $\eta u^q > 0$. Значит, конец вектора $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ опять лежит в первой четверти!

Кривая при возрастании параметра $t \in O(t_0)$ по окрестности точки t_0 слева направо выходит из первой четверти и возвращается снова в первую четверть, лишь одно мгновение постояв в начале координат. В момент $t = t_0$ касательной к ней служит горизонтальная ось координат (качественный вид показан на рис. 17.6).

Резюме: если точка t_0 типа (p, q) является точкой (*чет*, *чет*), то кривая в окрестности точки $\alpha(t_0)$ выглядит так, как показано на рис. 17.6, а точка t_0 называется *точкой возврата второго рода*. Образное название такой точки — *клев*.

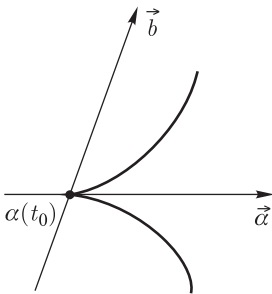


Рис. 17.5

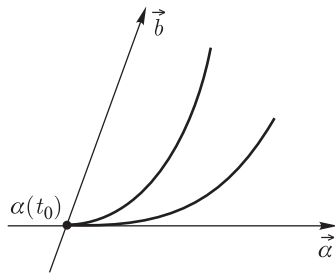


Рис. 17.6

Все четыре возможных случая четности пары чисел, составляющих тип точки, рассмотрены. Стало быть, классификация точек по этому признаку закончена.

Остановимся здесь в нашей классификации точек плоской кривой. Ясно, что подобную классификацию можно вести бесконечно, привлекая к рассмотрению новые и новые характеристики рассматриваемых точек («ботаника» кривых бесконечна!). Общим итогом нашей работы в этом пункте пусть останется понимание того, что плоская гладкая кривая:

- 1) в окрестности бирегулярной точки имеет изгиб,
- 2) в окрестности точки распрямления имеет изгиб или перегиб,
- 3) в окрестности особой точки, *имеющей тип*, может выглядеть качественно четырьмя разными способами: изгиб, перегиб, возврат первого рода или возврат второго рода (клюв).

Задачи и упражнения



1. Аккуратно постройте образы следующих кривых на листе клетчатой бумаги:

а) $\alpha(t) = {}^t(t^4, t^2 - t^5)$; б) $\alpha(t) = {}^t(4t^2, 3t^3 + 3t)$;

в) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^4 + t^5)$; г) $\alpha(t) = {}^t(2 \sin t, \frac{2 \cos^2 t}{2 + \cos t})$;

д) $\alpha(t) = {}^t(t^3 + 2, t^2 - 1)$; е) $\alpha(t) = {}^t(t^2 - 1, t^3 - t)$;

ж) $\alpha(t) = {}^t(te^t, te^{-t})$; з) $\alpha(t) = {}^t(t^3 + 3t + 1, t^3 - 3t + 1)$;

и) $\alpha(t) = {}^t(\cos^4 t, \sin^4 t)$; к) $\alpha(t) = {}^t(\operatorname{sh} t - t, \operatorname{ch} t - 1)$.

18. Эволюта и эвольвента

Уважаемые читатели! В этом пункте пришло время познакомиться с парочкой классических понятий, которые со времен своего изобретения Гюйгенсом ¹⁾ идут по жизни вместе, принося пользу людям.

Пусть кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ регулярна.

Определение 18.1. *Эволютой* кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ называется множество всех точек, которые являются центрами кривизны кривой $\alpha(t)$, т. е. множество центров всех ее соприкасающихся окружностей.

Кривую $\beta(t)$, образом которой является множество центров кривизны кривой $\alpha(t)$, также будем называть *эволютой*.

Термин «эволюта» происходит от латинского «*evolutus*» — «развернутый». Почему именно «развернутый», мы поймем в этом пункте чуть ниже.

Уравнение эволюты нам, фактически, уже известно из пунктов 12 и 13, где мы дали определения соприкасающейся окруж-

¹⁾ Христиан Гюйгенс (1629–1695) — голландский математик, физик, астроном и естествоиспытатель. В 1673 г. опубликовал книгу *Horologium oscillatorium* (Маятниковые часы), в которой впервые появились основные герои настоящего пункта — эволюта и эвольвента.

ности, центра и радиуса кривизны кривой и установили связь между кривизной и радиусом кривизны. Поэтому сразу выпишем уравнение эволюты:

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{\nu}(t).$$

На лекции я читаю это уравнение так, как будто объясняю дорогу прохожему на улице: «Для того чтобы от точки $\alpha(t)$ на кривой α дойти до соответствующей точки эволюты, надо идти вдоль по нормальному вектору $\vec{\nu}(t)$ на радиус кривизны».

Наблюдения 18.1, очевидные. Эволюта гладкой кривой — гладкая кривая. Эволюта окружности — ее центр. ¹⁾ У прямой линии эволюты нет, так как кривизна прямой линии нулевая.

Пусть теперь кривая $\alpha(t)$ бирегулярна, следовательно, $k(t) \neq 0$ при любом $t \in I$. Это означает, что у бирегулярной кривой всегда существует гладкая эволюта. Пусть у кривой $\alpha(t)$ имеется параметрическое задание $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Найдем параметрическое задание эволюты.

Из п. 15 известно, что

$$k(t) = \frac{\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad \vec{\nu}(t) = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Тогда, путем выполнения «в уме» школьных преобразований, из уравнения эволюты сразу находится ее параметризация:

$$\beta(t) = \left(x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y} \dot{y}, y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y} \dot{x} \right).$$

Мы уже знаем, что если кривизна плоской кривой постоянна ($k(t) \equiv C$, т. е. $\dot{k}(t) \equiv 0$), то эта кривая — прямая или окружность (или их часть). Давайте исключим из дальнейшего рассмотрения эти тривиальные случаи и сразу наложим на функцию кривизны довольно сильное требование — регулярность. Нам будет удобно считать кривизну регулярной, хотя это действительно «сильное» требование, исключающее даже наличие экстремумов у функции кривизны.

Теорема 18.1. Пусть кривая $\alpha(t)$ бирегулярна, $k(t)$ — ее кривизна и $\dot{k}(t) \neq 0$ для любого $t \in I$. Тогда справедливы два утверждения.

¹⁾ Разумеется, постоянная вектор-функция является гладкой.

1. Кривая $\alpha(t)$ имеет регулярную эволюту $\beta(t)$, причем эволюта — это огибающая семейства нормалей кривой $\alpha(t)$.

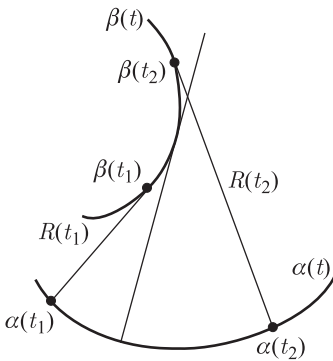


Рис. 18.1

2. Длина дуги эволюты $\ell[\beta|_{t_1}^{t_2}]$ равна модулю разности $|R(t_2) - R(t_1)|$ длин касательных к ней в конечных точках дуги.

Поясню, что длина касательной $R(t)$ — это длина отрезка касательной $R(t)$ от точки касания на кривой $\beta(t)$ до пересечения с кривой $\alpha(t)$. Рис. 18.1 прекрасно поясняет понятие длины касательной и формулировку теоремы.

Доказательство.

1. Уравнение эволюты: $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{\nu}(t)$. Проверим ее регулярность — посчитаем производную, используя уравнения Френе:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{k}\right)^{\bullet} \vec{\nu}(t) + \frac{1}{k} \dot{\vec{\nu}}(t) = \\ &= \dot{\alpha} + \frac{-\dot{k}}{k^2} \vec{\nu}(t) - \frac{1}{k} |\dot{\alpha}| k \vec{\tau}(t) = -\frac{\dot{k}}{k^2} \vec{\nu}(t) \neq \vec{0}, \end{aligned}$$

т. е. эволюта регулярна и ее касательный вектор $\dot{\beta}$ всегда направлен по нормали $\vec{\nu}(t)$. Следовательно, $\vec{\nu}(t)$ — касательный вектор для $\beta(t)$ и, так как каждая нормаль кривой $\alpha(t)$, очевидно, пересекается с эволютой, то эволюта — огибающая семейства нормалей кривой $\alpha(t)$ (см. рис. 18.1).

2. Считаю теперь длину дуги эволюты:

$$\begin{aligned} \ell[\beta|_{t_1}^{t_2}] &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\beta}(t)| dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left| \left(\frac{1}{k(t)}\right)^{\bullet} \right| dt = \left| \frac{1}{k(t_2)} - \frac{1}{k(t_1)} \right| = |R(t_2) - R(t_1)|. \end{aligned}$$

Что, собственно, и требовалось. ◆

Определение 18.2. Кривая $\alpha(t)$ называется *эвольвентой* для кривой $\beta(t)$, если $\beta(t)$ — эволюта кривой $\alpha(t)$.

Эволюта и эвольвента — крепкая парочка. («Evolventis» — это родительный падеж от латинского «evolvens» — «разворачивающий»). Связь между эволютой и эвольвентой по форме очень напоминает связь между производной и первообразной.

Посмотрите еще раз внимательно на рис. 18.1. При разглядывании рисунка возникает забавный художественный образ эвольвенты. Представьте, что кривая $\beta(t)$ оклеена ниточкой. В некоторой точке ниточку разрезали и начали сматывать с кривой. На конце ниточки закрепили карандаш (или любой другой пишущее-мажущий аппарат). Ниточку сматывают так, чтобы она была все время натянута, при этом она автоматически будет натянута по касательной к $\beta(t)$ (см. рис. 18.1). Тогда карандаш последовательно пройдет точки $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \dots$ и начертит эвольвенту (развертку) кривой $\beta(t)$. Именно такой художественный образ раскручивания ниточки объясняет происхождение общепринятых названий — латинских терминов «эволюта» и «эвольвента».

Наблюдение 18.2. Ниточку можно изначально разрезать в произвольной точке кривой $\beta(t)$, при этом, соответственно, будут получаться разные эвольвенты, отличающиеся друг от друга начальной точкой.

Таким образом, эвольвент у данной кривой бесконечно много. Это подчеркивает аналогию эвольвенты с первообразной — первообразных функций тоже бесконечно много (и все они отличаются друг от друга на константу). Производная же у всех первообразных одна и та же, как одна эволюта у всех своих эвольвент.

Мы уже научились находить эволюту $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{v}_\alpha(t)$ по данной эвольвенте $\alpha(t)$ (нижний индекс у вектора означает кривую, к которой этот вектор относится). Пусть теперь дана кривая $\beta(t)$. Как найти ее эвольвенту? Фактически, мы сейчас будем решать обратную задачу — найти эвольвенту по данной эволюте. Это более сложная задача, чем нахождение эволюты $\beta(t)$ по данной кривой $\alpha(t)$, так как мы пока не знаем ни $\alpha(t)$, ни $\vec{v}_\alpha(t)$.

Если посмотреть на рис. 18.1, то станет ясно как день — для того, чтобы добраться от точки $\beta(t)$ на эволюте до точки $\alpha(t)$ на эвольвенте, надо идти «вдоль да по касательной»¹⁾ на некотором

¹⁾ На лекции я распеваю эту фразу на мотив песни «Вдоль по Питерской! По Тверской-Ямской!»

расстояние $\lambda(t)$:

$$\alpha(t) = \beta(t) + \lambda(t) \cdot \vec{\tau}_\beta(t).$$

Мы не знаем пока $\lambda(t)$ и вектор $\vec{\tau}_\beta(t)$. Прибегнем, как обычно, к универсальной палочке-выручалочке — дифференцированию (мне надоело писать аргумент t , поэтому в следующих трех строчках его нет):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\beta} + \dot{\lambda} \cdot \vec{\tau}_\beta + \lambda \cdot \dot{\vec{\tau}}_\beta = |\dot{\beta}| \vec{\tau}_\beta + \dot{\lambda} \cdot \vec{\tau}_\beta + \lambda \cdot k \cdot |\dot{\beta}| \cdot \vec{\nu}_\beta = \\ &= \left(|\dot{\beta}| + \dot{\lambda} \right) \vec{\tau}_\beta + \left(\lambda \cdot k \cdot |\dot{\beta}| \right) \vec{\nu}_\beta. \end{aligned}$$

По определению эвольвенты, $\dot{\alpha} \perp \vec{\tau}_\beta$. Это означает, что коэффициент в этом разложении перед вектором $\vec{\tau}_\beta(t)$ равен нулю:

$$|\dot{\beta}| + \dot{\lambda} = 0,$$

следовательно,

$$\lambda(t) = C - \int_{t_0}^t |\dot{\beta}(t)| dt.$$

Это не что иное, как длина кривой $\beta(t)$ — ну, а что вы, собственно, ожидали? Ведь мы же сматываем ниточку, которой «обтянута» кривая $\beta(t)$! Совершенно естественно, что длина этой ниточки (т. е. длина касательной) в точности равна длине той дуги, на которую эта ниточка была наклеена!

Итак, уравнение эвольвенты содержит интеграл (помните нашу аналогию: эвольвента — это первообразная, т. е. интеграл). Вот стандартная запись этого уравнения:

$$\alpha(t) = \beta(t) + \left(C - \int_{t_0}^t |\dot{\beta}(t)| dt \right) \cdot \vec{\tau}_\beta(t).$$

Между прочим, уравнение эволюты, в подтверждение нашей аналогии пар (*эволюта — эвольвента*) и (*производная — первообразная*), содержит в своей записи только производные.

Видно, что на практике уравнения эвольвенты составлять, вообще говоря, сложнее, чем уравнения эволюты, ведь интегрировать (вычислять длину кривой) труднее, чем просто дифференцировать данные функции.

Если кривая $\beta(t)$ является кривой единичной скорости, то уравнение эвольвенты выглядит проще (ибо все сложности вычисления интеграла уже «съела» процедура введения натурального параметра):

$$\alpha(s) = \beta(s) + (C - s)\vec{\tau}_\beta(s),$$

где C — произвольная константа, которая определяется местоположением начальной точки эвольвенты — точки разрыва ниточки, которой оклеена данная кривая и которая своим концом удерживает карандаш.

Мне хочется закончить этот пункт небольшим историческим отступлением про эволюту и эвольвенту.

Эпоха возрождения. Эпоха великих открытий. Европа возвращается к идеалам древнегреческой культуры. Творят Леонардо и Рафаэль, пишет Данте. Эпоха развития мореплавания. Магеллан обнаружил, что Земля — круглая. Все бурлит после средневекового застоя. Наука становится самым важным фактором, обеспечивающим развитие общества.

Теперь ближе к делу. В 1598 г. Галилей в своих трудах открыл ¹⁾ миру *циклоиду* — траекторию точки на колесе, которое катится по прямой (см. рис. 18.2). Француз Роберваль в 1634 г. нашел площадь одной арки циклоиды, а чуть позже француз Рен спрямил циклоиду (т. е. нашел длину одной ее арки). Причем сделали они это, еще не зная дифференциального исчисления Ньютона и Лейбница.

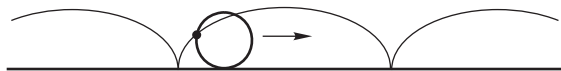


Рис. 18.2

Циклоида приобрела популярность в научных кругах — все известные геометры того времени обращались в своих работах к ее изучению. Например, Иоганн Бернулли обнаружил в 1696 г., что циклоида — кривая наискорейшего спуска («брахистохрона»), т. е. именно по этой кривой должен катиться шарик, чтобы скатиться из верхней точки A в нижнюю точку B за наименьшее время (см. рис. 18.3).

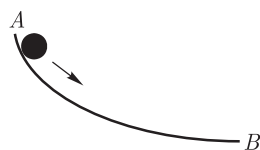


Рис. 18.3

¹⁾ Исторически первое упоминание о циклоиде датируется 1503 г. и находится в «Шести книгах введения в геометрию» французского математика де-Бувелля.

Задолго до этого Галилей придумал использовать маятник для конструкции часов — он открыл постоянство периода колебаний маятника.¹⁾ К сожалению, этот период оказался сильно зависящим от размаха (амплитуды) колебаний,²⁾ что делало маятниковые часы весьма неточными.

Но человечеству были нужны точные часы! Например, точное время на корабле знать просто необходимо, ибо оно позволяет определять координаты корабля. Точно в полдень, с помощью астролябии, надо измерить угол подъема солнца над горизонтом — это, фактически, измерение широты местности. Но для этого нужно знать, когда полдень! И если на суше, худо-бедно, можно поддерживать постоянную амплитуду колебаний маятника часов, то на корабле во время качки это просто невозможно.

Голландец Христиан Гюйгенс в 1665 г. обнаружил еще одно замечательное свойство циклоиды — она является той самой кривой, по которой должен двигаться маятник, чтобы его период колебаний не зависел от амплитуды («изохронная кривая» или «таутохрона»). В 1673 г. в своем трактате «Маятниковые часы» он впервые ввел понятия эволюты и эвольвенты и обнаружил, что эволюта (эвольвента) циклоиды — снова циклоида. Это позволило ему сделать шикарное изобретение — изохронный маятник для особо точных корабельных хронометров.

Смотрите, что он сделал (рис. 18.4):

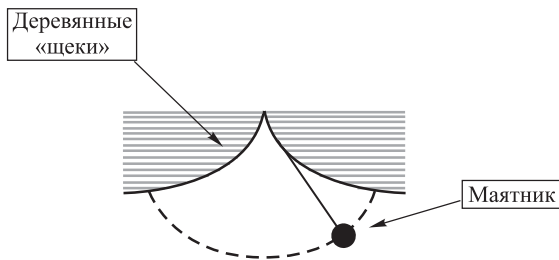


Рис. 18.4

Деревянные щеки в форме циклоиды. Веребочка при колебании маятника облегает эти щеки, и все время является каса-

¹⁾ Галилей смотрел во время богослужения в соборе на качающуюся люстру и считал удары своего сердца.

²⁾ Это только в школе учат, что период колебаний маятника не зависит от амплитуды — в школьном курсе физики рассматривается идеальный математический маятник. Для реального кругового маятника (шарика, подвешенного на веревочке) это не так.

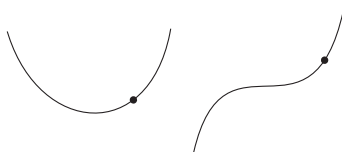
тельной к щеке. Это значит, что сам маятник (груз) движется по эвольвенте циклоиды, т. е. тоже по циклоиде, стало быть, его период не зависит от размаха колебаний! Такому маятнику качка корабля не страшна. Нет нужды говорить, сколь важно было это изобретение для мореплавания, и какую великую службу сослужили здесь эволюта и эвольвента!

Закончим этим историческим отступлением наше знакомство с плоскими кривыми и, как большой корабль, прямоком пойдем в следующий параграф.

Задачи и упражнения



1. Задача на развитие воображения о разматывающихся ниточках и вписанных кружочках. Нарисуйте схематично эволюты и эвольвенты кривых, изображенных на следующем рисунке (это мой любимый вопрос про эволюты и эвольвенты на экзамене, почерпнутый из лекций В. И. Арнольда):



(начальная точка для эвольвенты указана на каждой кривой жирным кружочком). Объясните преподавателю свой рисунок.

2. Найдите параметризации и нарисуйте эволюты следующих кривых:

а) $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, b \sin t)$; б) $y = x^2$;

в) $\alpha(t) = {}^t\left(a \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + \cos t \right), a \sin t \right)$;

г) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

3. Докажите, что эволюта циклоиды — снова циклоида, изометричная данной.

4. Докажите, что эволюта астроида — снова астроида, подобная исходной. Найдите коэффициент подобия.

5. Найдите параметризацию и нарисуйте какую-нибудь одну эвольвенту окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

6. Найдите параметризацию и нарисуйте эвольвенту цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, выходящую из ее вершины. Что это за линия?

7. Найдите параметризацию и нарисуйте эвольвенту параболы $\alpha(t) = {}^t(t, (1/4)t^2)$, проходящую через ее вершину.

8. Найдите длину дуги астроида $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, представляя ее в виде эволюты некоторой подходящей кривой.

9. Найдите длину всей кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, представляя ее в виде эволюты некоторой подходящей кривой.

10. Докажите, что если плоская кривая имеет точку перегиба, то ее эвольвента (не выходящая из этой точки перегиба) всегда имеет особенность (возврат второго рода, т. е. «клюв») в точке, соответствующей точке перегиба исходной кривой.

11. Докажите, что если кривизна плоской кривой в некоторой точке принимает экстремальное значение, то в соответствующей точке ее эволюты всегда имеется особенность — возврат первого рода.

§ 4. ОБЩАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ

В этом параграфе мы снова обратимся к изучению кривых в аффинных пространствах \mathbf{R}^m произвольной размерности, и локальные свойства кривых предстанут перед нами во всей своей красе и общности выявляемых закономерностей. Лишь изредка мы будем делать отступления в более традиционные и наглядные случаи плоскости \mathbf{R}^2 и пространства \mathbf{R}^3 с целью знакомства с «архаичной» терминологией и фиксации джентльменского набора обязательных понятий и формул для предстоящего в конце университетского обучения государственного экзамена.

19. Кривые общего вида

Сначала зафиксируем для всего дальнейшего изложения два важных понятия. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — гладкая кривая.

Определение 19.1. Произвольная гладкая вектор-функция $X : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ называется *векторным полем вдоль кривой* $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$. Векторное поле $X : I \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$ вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *касательным*, если в каждый момент $t \in I$ векторы $X(t)$ и $\dot{\alpha}(t)$ коллинеарны.

Естественными примерами векторных полей вдоль гладкой кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ служат ее производные $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \alpha(t) \dots$. Рассматривая произвольное векторное поле $X(t)$, можно представлять себе, что в каждый момент $t \in I$ вектор $X(t)$ отложен от соответствующей точки $\alpha(t)$ кривой α (см. рис. 19.1). При таком представлении из каждой точки кривой «торчит» соответствующий вектор и кривая напоминает новогоднюю елочную мишурку. Я не буду здесь настойчиво пропагандировать подобный художественный образ векторного поля вдоль кривой, так как такое представление векторных полей не всегда удобно и плодотворно — вспомните

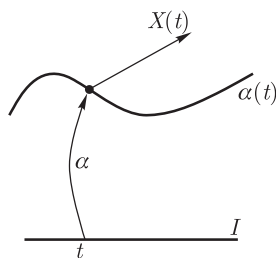


Рис. 19.1


Гаусса, который придумал откладывать единичные нормальные векторы данной кривой не от точек самой кривой, а от начала координат, что привело его к понятию сферического отображения! Кроме того, в более абстрактных разделах дифференциальной геометрии часто рассматриваются кривые, расположенные не в населенных векторами аффинных пространствах, а в произвольных топологических пространствах, в которых вообще нет никаких векторов. Ясно, что тогда откладывать векторы от точек на кривой становится просто неправомерно.

Определение 19.2. *Подвижным репером вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется совокупность реперов $\{(\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)), t \in I\}$, где $\alpha(t)$ — начальная точка репера, соответствующего моменту $t \in I$, а $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ — такой набор векторных полей вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, что в каждый момент $t \in I$ векторы $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ линейно независимы. Набор линейно независимых векторных полей $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *базисом вдоль кривой α* .*

Обратите внимание, что в этом определении я, находясь в аффинном пространстве R^m , предлагаю представлять себе базисные векторы $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ отложенными от соответствующей точки $\alpha(t)$ на кривой. Таким образом, в каждый момент $t \in I$ векторы $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ образуют базис (векторного!) центраффинного пространства $\vec{\mathbf{R}}_{\alpha(t)}^m$. Подвижный репер можно мыслить себе именно как игольчатую гроздь векторов, плавно ползущую своим основанием по кривой α .

Разумеется, подвижный репер существует вдоль любой кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$. Тривиальный пример подвижного репера дает совокупность $(\alpha(t); e_1, e_2, \dots, e_m)$, где (e_1, e_2, \dots, e_m) — стандартный (и сам по себе очень даже неподвижный) базис пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$. Такой репер, грубо говоря, никакой связи (кроме начальной точки) с кривой $\alpha(t)$ не имеет и практически ничего не позволяет выяснить про свойства самой кривой. Однако в дальнейшем нас будут интересовать такие специальные реперы, которые имеют со своими кривыми более тесную связь и ухватывают закономерности их поведения. Изучение «хитрых» подвижных реперов вдоль кривых позволит нам развить весьма содержательную теорию, ведь реперы можно изучать, используя мощнейшие орудия линейной алгебры и математического анализа! Таков, в общих чертах, план захвата теории кривых.

Для реализации нашего плана построения «хитрого» подвижного репера нам потребуется еще одно важное понятие, имя которого служит названием этого пункта.

 Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — гладкая кривая; $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t)$ — ее производные, образующие набор из $(m-1)$ штук векторных полей вдоль $\alpha(t)$. Обратите внимание, что число этих векторных полей на единицу меньше размерности пространства!

Определение 19.3. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *кривой общего вида*, если в любой момент $t \in I$ векторы $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t)$ линейно независимы.

Наблюдение 19.1. При $m = 2$ кривые общего вида — это в точности регулярные кривые; а при $m = 3$ кривые общего вида — это в точности бирегулярные кривые.

Свойство являться кривой общего вида, как и свойство регулярности (см. лемму из п. 9), инвариантно относительно замены параметра и изометрии. В подтверждение этих слов докажем следующую лемму.

Лемма 19.1. Пусть α — кривая общего вида, кривая β получается из кривой α заменой параметра или изометрией. Тогда β — кривая общего вида.

Доказательство. 1. Замена параметра. Пусть $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — замена параметра, т. е. для всех $t \in I$ выполнено $\dot{\varphi}(t) \neq 0$. Вычисляем производные кривой $\beta(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \dot{\alpha}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}, \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\alpha}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}(\varphi) \cdot \ddot{\varphi}, \\ \beta &= \alpha(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^3 + 2\ddot{\alpha}(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + \dots, \\ &\vdots \\ \beta^{(k)} &= \alpha^{(k)}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^k + \dots \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Мы получаем разложения производных кривой β по системе векторов $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}$. Значит:

$$(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}) = (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \ddot{\varphi} & * & \dots & * \\ 0 & \dot{\varphi}^2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}^3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dot{\varphi}^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Так как всегда $\dot{\varphi} \neq 0$, то матрица перехода в этом равенстве невырождена, ибо ее определитель равен $\dot{\varphi}^{\frac{m(m-1)}{2}}$ (в показателе стоит сумма арифметической прогрессии $1 + 2 + \dots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$). Следовательно, система векторов $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)})$ линейно независима, что, собственно, и требовалось проверить.



Заметим удивительное. Если $\dot{\varphi} > 0$ (кривые положительно эквивалентны), то ориентация системы $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)})$ совпадает с ориентацией системы $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$. Если же $\dot{\varphi} < 0$, то ориентация получающейся системы векторов $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)})$ зависит от размерности пространства! ¹⁾

2. Изометрия. Пусть $Ax = p_0 + Qx$ — изометрия пространства \mathbf{R}^m , где Q — ортогональный оператор. Тогда, очевидно, ²⁾

$$\dot{\beta} = Q\dot{\alpha}, \quad \ddot{\beta} = Q\ddot{\alpha}, \quad \dots, \quad \beta^{(m-1)} = Q\alpha^{(m-1)}.$$

Поскольку Q — невырожденный оператор, то он переводит всякую линейно независимую систему векторов в опять-таки линейно независимую систему векторов. Следовательно, векторы $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)})$ линейно независимы, а это и требовалось доказать. \blacklozenge

К настоящему моменту мы проделали всю необходимую подготовительную работу и теперь готовы приступить к построению очень полезного «хитрого» подвижного репера вдоль кривой, но об этом речь пойдет в следующем пункте.

Задачи и упражнения



1. Проверьте, что кривая $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^4$, имеющая параметризацию $\alpha(t) = {}^t(e^t, e^{2t}, e^{3t}, e^{4t})$, является кривой общего вида.

2. При каких значениях $k \in \mathbf{N}$ кривая $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^4$, имеющая параметризацию

$$\alpha(t) = {}^t(t^k, t^{k+1}, t^{k+2}, t^{k+3}),$$

является кривой общего вида?

¹⁾ Причем эта зависимость весьма прихотливая — число $\frac{m(m-1)}{2}$ четно при $m = 4k$ или $m = 4k + 1$ и нечетно в остальных случаях, а знак определителя матрицы перехода в рассматриваемой ситуации как раз и зависит от четности этого числа.

²⁾ Если следующая строчка не очевидна, посмотрите еще раз доказательство леммы из п. 9 и определение изометрии евклидова пространства.

20. Репер Френе кривой общего вида

К настоящему моменту мы проделали всю необходимую подготовительную работу и готовы приступить к построению очень полезного «хитрого» подвижного репера вдоль кривой.

Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая общего вида.

Определение 20.1. Подвижный репер

$$\{(\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)), t \in I\}$$

вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *репером Френе кривой $\alpha(t)$* , если выполняются следующие три условия:

- 1) в любой момент $t \in I$ векторы $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ образуют ортонормированный базис пространства $\overline{\mathbf{R}}^m$;
- 2) в любой момент $t \in I$ системы векторов $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{m-1}(t))$ и $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_{m-1}(t))$ порождают один и тот же орфлаг;
- 3) в любой момент $t \in I$ ориентация базиса $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ положительна.

Векторные поля $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ будем называть *векторами репера Френе*. Ясно, что в каждый момент $t \in I$ векторы $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ образуют базис центраффинного пространства $\overline{\mathbf{R}}_{\alpha(t)}^m$, приклеенного к точке $\alpha(t)$.



Прошу обратить особое внимание на второе условие приведенного определения — именно оно «отражает» в репере Френе свойства исходной кривой! Цепочки ориентированных подпространств

$$(\dot{\alpha}) \subset (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \subset (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha) \subset \dots \subset (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$$

и

$$(E_1) \subset (E_1, E_2) \subset (E_1, E_2, E_3) \subset \dots \subset (E_1, E_2, \dots, E_{m-1})$$

поэлементно совпадают! В частности, вектор $E_1(t)$ — единичный вектор касательной к кривой $\alpha(t)$.

Таким образом, на первый взгляд, в репере Френе содержится мизерная информация об устройстве исходной кривой — направление касательного вектора к данной кривой и ориентация подпространств, порожденных векторами старших производных. И больше ничего! Но очень скоро мы увидим, что этой скудной информации и предположения о натуральной параметризации

исходной кривой оказывается вполне достаточно, чтобы даже восстановить исходную кривую однозначно!

Однако, прежде всего, давайте убедимся в самом существовании репера Френе и его единственности, а также познакомимся с некоторыми его важными свойствами.

Теорема 20.1. *Для всякой кривой общего вида $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ существует единственный репер Френе.*

Доказательство. Возьмем линейно независимую совокупность векторов $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t))$ и применим к ней процесс ортогонализации Грама–Шмидта (см. п. 4). На первом шаге получим

$$E_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}$$

— это, очевидно, гладкая вектор-функция. На шаге индукции получим сначала (ортогональный всем уже построенным векторам) вспомогательный вектор

$$B_k = \alpha^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha^{(k)}, E_j \rangle E_j$$

— это, очевидно, тоже гладкая вектор-функция (как линейная комбинация гладких вектор-функций), а затем нормируем его:

$$E_k = \frac{B_k}{|B_k|}.$$

У нас снова получилась гладкая и ненулевая вектор-функция. Нам известно (см. п. 4), что орфлаги

$$(\dot{\alpha}) \subset (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \subset (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha) \subset \dots \subset (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$$

и

$$(E_1) \subset (E_1, E_2) \subset (E_1, E_2, E_3) \subset \dots \subset (E_1, E_2, \dots, E_{m-1}),$$

получающиеся в процессе ортогонализации Грама–Шмидта, совпадают.

Осталось пристроить к векторам $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_{m-1}(t))$ последний единичный вектор $E_m(t)$ так, чтобы ориентация получившегося ортонормированного базиса $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$

оказалась положительной. Воспользуемся конструкцией обобщенного векторного произведения (см. п. 6):

$$E_m = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{m-1}$$

— это ортогональная каждому сомножителю гладкая вектор-функция единичной длины, так как объем параллелепипеда, построенного на ортогональных единичных векторах E_1, E_2, \dots, E_{m-1} , равен единице. Кроме того, в каждый момент $t \in I$ ориентация базиса (E_1, E_2, \dots, E_m) положительна.

Единственность построенного репера Френе (в каждый момент $t \in I$) следует из единственности ортонормированной системы векторов, порождающих данный орфлаг (см. следствие из леммы п. 4) и однозначности операции обобщенного векторного произведения (лемма из п. 6). \blacklozenge



Итак, в общем случае для практического построения репера Френе кривой общего вида, $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, надо сначала применить процесс ортогонализации к совокупности векторов $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$ и получить первые $(m - 1)$ векторов E_1, E_2, \dots, E_{m-1} репера Френе. Последний вектор репера Френе получается обобщенным векторным произведением всех предыдущих: $E_m = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{m-1}$.

Отступление для пространства \mathbf{R}^3 .

В трехмерном случае процесс построения векторов репера Френе можно проделать общим способом, сформулированным в предыдущем абзаце. Однако на практике обычно хитрят и находят репер Френе более быстрым способом без применения нудного процесса ортогонализации. Это оказывается возможным только (!) в трехмерном случае, благодаря свойственной математикам изворотливости. Вот этот хитрый способ.

Пусть кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ бирегулярна (т. е. является кривой общего вида). Вектор E_1 находится сразу и без ухищрений:

$$E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}.$$

Далее посмотрим на рис. 20.1.

На векторы (E_1, E_2) натянута та же плоскость, что и на векторы $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$. Это означает, что сразу можно найти единичный нормальный вектор этой плоскости:

$$E_3 = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$$

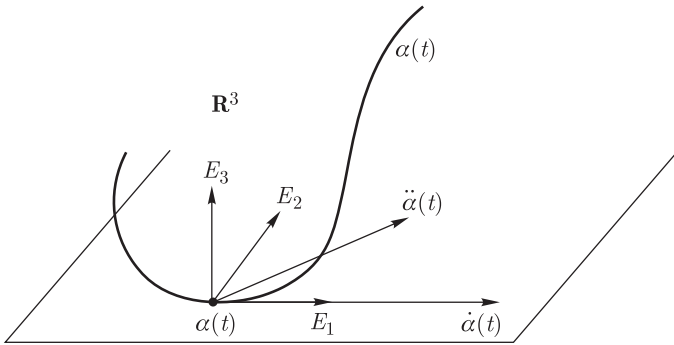


Рис. 20.1

— это третий вектор репера Френе! Теперь, когда мы уже нашли единичные векторы E_1 и E_3 , легко сконструировать второй вектор репера Френе:

$$E_2 = E_3 \times E_1.$$

Обратите внимание, что векторное произведение E_3 и E_1 берется именно в этом порядке, чтобы тройка векторов (E_1, E_2, E_3) оказалась правой (смотрите еще раз внимательно на рис. 20.1), а ориентация пары (E_1, E_2) совпала с ориентацией пары $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$.

Исторические определения. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ — бирегулярная кривая, (E_1, E_2, E_3) — ее базис Френе. Вектор E_1 называется *касательной* и обозначается символом $\vec{\tau}$; вектор E_2 называется *нормалью* (иногда — *главной нормалью*) и обозначается символом $\vec{\nu}$; вектор E_3 называется *бинормалью* и обозначается символом $\vec{\beta}$.

Сам репер Френе бирегулярной кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ часто (особенно в теоретической механике) называют *подвижным трехгранником* кривой $\alpha(t)$, или *естественным трехгранником*.

Координатные плоскости репера Френе, т. е. плоскости, натянутые на пары базисных векторов с начальной точкой $\alpha(t)$, исторически называются так:

- плоскость $(E_2, E_3) = (\vec{\nu}, \vec{\beta})$ — *нормальной*, $(\vec{\nu}, \vec{\beta}) \perp \vec{\tau}$;
- плоскость $(E_1, E_2) = (\vec{\tau}, \vec{\nu})$ — *соприкасающейся*, $(\vec{\tau}, \vec{\nu}) \perp \vec{\beta}$ (именно соприкасающаяся плоскость изображена на рис. 20.1);
- плоскость $(E_1, E_3) = (\vec{\tau}, \vec{\beta})$ — *спрямляющей*, $(\vec{\tau}, \vec{\beta}) \perp \vec{\nu}$.

Упражнение 20.1. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ — бирегулярная кривая. Через три ее точки $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \alpha(t_2)$ проведем «секущую»

плоскость (через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести одну плоскость). Докажите, что соприкасающаяся плоскость есть предельное положение этой «секущей» плоскости при $t_1 \rightarrow t_0$ и $t_2 \rightarrow t_0$.

Закончим это небольшое историческое отступление про элементы трехмерного репера Френе и пойдем дальше, в следующий пункт.

Задачи и упражнения



1. Задача на выносливость. Найдите базис Френе кривой

$$\alpha(t) = {}^t(e^{-t}, e^{2t}, e^t, e^{-2t})$$

в точке $t_0 = 0$. Составьте уравнения координатных осей, двумерных и трехмерных координатных плоскостей репера Френе в этой точке.

2. Найдите последний вектор базиса Френе кривой

$$\alpha(t) = {}^t(t^3, t^2, 2t^2 + t, t^3 + t^2 - 1).$$

Как вы думаете, что означает полученный результат?

3. Найдите векторы репера Френе кривой

$$\alpha(t) = {}^t(\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t),$$

лежащей на сфере радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Как направлены векторы репера Френе по отношению к радиус-вектору точки $\alpha(t)$?

4. Найдите базис Френе следующих кривых в \mathbf{R}^3 :

а) $\alpha(t) = {}^t(\sin^3 t, \cos^3 t, \cos 2t)$;

б) $\alpha(t) = {}^t(a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a \cos(t/2))$.

5. Найдите базисные векторы репера Френе винтовой линии $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, bt)$. Составьте уравнения координатных прямых и координатных плоскостей репера Френе. Проверьте, что главная нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с осью винта постоянный угол.

6. Опять за старое! Докажите, что если все соприкасающиеся плоскости брегулярной кривой в \mathbf{R}^3 проходят через фиксированную точку, то эта кривая плоская.

7. Докажите, что если все нормальные плоскости кривой в \mathbf{R}^3 проходят через фиксированную точку, то образ этой кривой лежит на сфере. В каком пункте вы уже решали эту задачу?

21. Теорема Френе–Жордана. Уравнения Френе кривой общего вида

Как и в случае плоской кривой поинтересуемся, прежде всего, каковы скорости (т.е. производные) базисных векторов репера Френе при движении репера вдоль кривой. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, открытая для трехмерного случая Ж. Ф. Френе, а в полной общности доказанная в 1897 г. К. Жорданом.

Теорема 21.1 (Френе–Жордан). Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая общего вида, $E_1, E_2, \dots, E_m : I \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^m$ — ее базис Френе. Тогда существуют гладкие скалярные функции $k_1, k_2, \dots, k_{m-1} : I \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что при всех $t \in I$ выполнены следующие условия:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| E_1, \\ \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 E_2, \\ \dot{E}_2 = |\dot{\alpha}| (-k_1 E_1 + k_2 E_3), \\ \vdots \\ \dot{E}_i = |\dot{\alpha}| (-k_{i-1} E_{i-1} + k_i E_{i+1}), \\ \vdots \\ \dot{E}_m = |\dot{\alpha}| (-k_{m-1}) E_{m-1}; \end{array} \right.$$

(2) $k_1 > 0, k_2 > 0, \dots, k_{m-2} > 0$.

Комментарии к формулировке теоремы. Условия (1) — это разложения производных (т.е. скоростей) базисных векторов по базису Френе. Условие (2) утверждает, что все функции $k_i(t)$, участвующие в формулировке условий (1), обязаны быть положительными, кроме одной — последней.



Определение 21.1. Условия (1) из формулировки теоремы Френе–Жордана называются *уравнениями Френе* кривой общего вида $\alpha(t)$. Функции $k_1(t), k_2(t), \dots, k_{m-1}(t)$ называются *кривизнами* кривой $\alpha(t)$.

Обращаю ваше внимание, что условия (1) называют *уравнениями Френе* в силу сложившейся традиции. На самом деле это не «уравнения», которые нужно «решать» и «находить» какие-то неизвестные, а тождественно выполненные соотношения. Первое уравнение Френе является лишь напоминанием определения вектора касательной; содержательную часть системы (1) составляют, конечно, остальные уравнения системы. Особенно

наглядно уравнения Френе выглядят в матричной записи:

$$[\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m] = |\dot{\alpha}| [E_1, E_2, \dots, E_m] \times \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$



При такой записи видно, что *матрица кривизн*, стоящая справа, является, по сути, матрицей перехода от ортонормированного базиса (E_1, E_2, \dots, E_m) к совокупности векторов $(\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m)$ (совокупность производных — не обязательно базис!). Традиционное обозначение матрицы кривизн — это $\overline{\omega}(t)$. Матрица кривизн является кососимметрической, т. е. $t\overline{\omega}(t) = -\overline{\omega}(t)$, и *трехдиагональной*, т. е. все ее ненулевые элементы располагаются внутри полосы из трех линий — главной диагонали и двух прямых непосредственно вдоль главной диагонали сверху и снизу.

Докажем теперь теорему Френе–Жордана — на пути ее доказательства мы узнаем много интересного.

Доказательство. Так как (E_1, E_2, \dots, E_m) — базис пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$, то векторы $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m$ можно разложить по этому базису: ¹⁾

$$\dot{E}_j = \omega_j^i E_i.$$

Наша задача состоит в том, чтобы в явном виде отыскать коэффициенты ω_j^i , т. е. найти матрицу перехода $\omega(t) = (\omega_j^i(t))$ от базиса (E_1, E_2, \dots, E_m) к совокупности векторов $(\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m)$.

Если разложение $\dot{E}_j = \omega_j^i E_i$ умножить скалярно на вектор E_l (стандартный способ нахождения координат вектора в ортонормированном базисе), то получим

$$\langle \dot{E}_j, E_l \rangle = \omega_j^i \langle E_i, E_l \rangle = \omega_j^l(t),$$

откуда следует, что все элементы матрицы $\omega(t)$ являются гладкими функциями.

¹⁾ Внимание: обозначения Эйнштейна. И сразу еще одно напоминание: векторы — это столбцы! Следовательно, у элементов матрицы нижний индекс — номер столбца (*вектора*), верхний индекс — номер строки (*ковектора*).

Пусть $\mathbf{X} = [E_1, E_2, \dots, E_m]$ — матрица, составленная из векторов-столбцов базиса Френе, тогда $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m]$, так как матрицы, по определению, дифференцируются поэлементно. Имеем

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

После транспонирования сомножители поменяются местами:

$${}^t\dot{\mathbf{X}} = {}^t\boldsymbol{\omega} \cdot {}^t\mathbf{X}.$$

Матрица $\mathbf{X}(t)$ ортогональна (ее столбцы — ортонормированный базис!), следовательно, обратная к ней совпадает с транспонированной:

$$\mathbf{1}_m \equiv {}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}.$$

«Видишь тождество — дифференцируй!» и преобразуй полученное выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_m &\equiv {}^t\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X} + {}^t\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}} = ({}^t\boldsymbol{\omega} \cdot {}^t\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} + {}^t\mathbf{X} \cdot (\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \\ &= {}^t\boldsymbol{\omega} \cdot ({}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) + ({}^t\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\omega} = {}^t\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица ${}^t\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}$ — нулевая, следовательно, матрица перехода $\boldsymbol{\omega}(t)$ обязана быть кососимметрической! ¹⁾ Это означает, что $\omega_i^i = 0$, $\omega_j^i = -\omega_i^j$ и вид матрицы $\boldsymbol{\omega}(t)$ постепенно начинает вырисовываться.

Идем далее. Пусть $V_j = V_j(t)$ — подпространство, порожденное первыми j производными $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(j)}$. По определению репера Френе это же самое подпространство V_j порождается векторами E_1, E_2, \dots, E_j . Следовательно, $E_j \in V_j$ и

$$E_j = \xi_1 \dot{\alpha} + \dots + \xi_j \alpha^{(j)}.$$

Значит,

$$\dot{E}_j = \dot{\xi}_1 \dot{\alpha} + \xi_1 \ddot{\alpha} + \dot{\xi}_2 \ddot{\alpha} + \dots + \xi_j \alpha^{(j+1)},$$

т.е. $\dot{E}_j \in V_{j+1}$ и вектор \dot{E}_j раскладывается по базису E_1, E_2, \dots, E_{j+1} подпространства V_{j+1} :

$$\dot{E}_j = \sum_{i=1}^{j+1} \omega_j^i E_i.$$

¹⁾ Кососимметричность этой матрицы, т.е. уравнение ${}^t\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$, входит в так называемую систему уравнений структуры евклидова пространства, т.е. является одним из наиболее фундаментальных свойств евклидовых пространств. К сожалению, обсуждение подобных вопросов остается за рамками нашей книжки.

А это означает, что в разложении вектора \dot{E}_j по базису Френе векторы $E_{j+2}, E_{j+3}, \dots, E_m$ не участвуют, и $\omega_j^i = 0$ при $i > j + 1$. В силу кососимметричности матрицы $\omega(t)$ получается $\omega_j^i = 0$ при $i > j + 1$, т. е. при $j < i - 1$.

Таким образом, в матрице $\omega(t)$ все элементы обязаны быть нулевыми, кроме элементов ω_j^{j+1} и ω_{j+1}^j . Значит, матрица $\omega(t)$ — трехдиагональная! При этом $\omega_j^{j+1} = -\omega_{j+1}^j$. Вид матрицы $\omega(t)$ еще больше прояснился:

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1^2 & 0 & \omega_3^2 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \omega_m^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{m-1}^m & 0 \end{bmatrix}.$$

Положим, по определению, для всех $i = 1, 2, \dots, m - 1$

$$k_i(t) = \frac{\omega_i^{i+1}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|}$$

и назовем функцию $k_i(t)$ *кривизной* (i -й *кривизной*) кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$. Видно, что кривизна $k_i(t)$ — гладкая скалярная функция.

Очевидно, что теперь исходное общее соотношение

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot \omega$$

приобретает требуемый в формулировке теоремы вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = |\dot{\alpha}| \cdot \mathbf{X} \cdot \bar{\omega},$$

где

$$\bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

— кососимметрическая трехдиагональная матрица кривизн. Условия (1) из формулировки теоремы Френе–Жордана доказаны.

Докажем теперь положительность всех кривизн кривой $\alpha(t)$, кроме последней. Для этого рассмотрим элементы $\omega_i^{i+1}(t) = \langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle$ матрицы перехода $\omega(t)$ только для значений $i = 1, 2, \dots, m-2$.


Пусть B_j — вспомогательные векторы, возникающие в процессе ортогонализации (Грама–Шмидта) совокупности производных $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}$ при построении репера Френе кривой $\alpha(t)$ (см. п. 20).

Далее я позволю себе несколько вольную, но весьма понятную манеру записи формул. По определению репера Френе (и самой сути процесса ортогонализации)

$$B_j = b_j E_j = \alpha^{(j)} + (\text{вектор из } V_{j-1}).$$

Если умножить скалярно это равенство на E_j , то получится

$$b_j = b_j(t) = \langle E_j, \alpha^{(j)} \rangle > 0,$$

 — угол-то между векторами E_j и $\alpha^{(j)}$ — острый, в силу одинаковой ориентированности флагов! Тогда (далее, для будущего удобства, заменю индекс j на i)

$$E_i = \frac{1}{b_i} (\alpha^{(i)} + (\text{вектор из } V_{i-1})).$$

Дифференцируем и «приводим подобные»:

$$\begin{aligned} \dot{E}_i &= \left(\frac{1}{b_i} \right)' \cdot (\alpha^{(i)} + (\text{вектор из } V_{i-1})) + \\ &+ \frac{1}{b_i} (\alpha^{(i+1)} + (\text{вектор из } V_i)) = \frac{1}{b_i} (\alpha^{(i+1)} + (\text{вектор из } V_i)). \end{aligned}$$

Сделайте небольшое усилие и сообразите, что

$$\alpha^{(i+1)} = b_{i+1} E_{i+1} + (\text{вектор из } V_i)$$

(это следствие равенства $b_j E_j = \alpha^{(j)} + (\text{вектор из } V_{j-1})$ при $j = i+1$).

Таким образом, получаем

$$\dot{E}_i = \frac{1}{b_i} (\alpha^{(i+1)} + (\text{вектор из } V_i)) = \frac{1}{b_i} (b_{i+1} E_{i+1} + (\text{вектор из } V_i)).$$


Вычислим, наконец, интересующие нас элементы матрицы перехода:

$$\begin{aligned}\omega_i^{i+1}(t) &= \langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{b_i} b_{i+1} E_{i+1} + (\text{вектор из } V_i), E_{i+1} \right\rangle = \frac{b_{i+1}}{b_i} > 0.\end{aligned}$$

Стало быть, все кривизны, кроме последней, строго положительны:

$$k_i(t) = \frac{\omega_i^{i+1}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{b_{i+1}}{|\dot{\alpha}(t)| b_i} > 0.$$

Итак, положительность кривизн k_1, k_2, \dots, k_{m-2} есть следствие совпадения орфлагов, порожденных векторами $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}$ и векторами репера Френе E_1, E_2, \dots, E_{m-1} (или, если угодно, следствие процесса ортогонализации Грама–Шмидта).

 Отметим, что про последнюю кривизну $k_{m-1}(t)$ и ее знак ничего утверждать нельзя, так как последний вектор E_m репера Френе кривой $\alpha(t)$ получается не с помощью процесса ортогонализации, а применением операции обобщенного векторного произведения.

Теорема Френе–Жордана доказана. ◆

В конце этого пункта выпишу еще раз общие формулы для нахождения кривизн кривой общего вида:

$$k_i(t) = \frac{\langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|}, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Обведите их в рамочку. Эти формулы пригодны к употреблению в пространстве любой размерности. Однако предупреждаю вас — вычисление кривизн по этим формулам в пространствах большой размерности — достаточно долгий и трудоемкий процесс, так как он требует построения всех векторов репера Френе с помощью процесса ортогонализации и обобщенного векторного произведения.

Задача и упражнение



1. Проявите усидчивость и вычислите сначала векторы репера Френе, а потом и кривизны кривой $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^4$, имеющей параметризацию

$$\alpha(t) = {}^t \left(\cos t, \sin t, \frac{\cos 2t}{2}, \frac{\sin 2t}{2} \right).$$

22. Кривые общего вида в трехмерном пространстве

Цели и задачи этого небольшого пункта вполне естественны — поработать с кривыми общего вида в привычном трехмерном пространстве, познакомиться с традиционной «исторической» терминологией, вывести полезные вычислительные формулы для кривизны и посмотреть, как ведет себя кривая общего вида в окрестности своей произвольной точки.

Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ — кривая общего вида (или, что равносильно, — бирегулярная кривая). Мы уже знакомы с исторической нотацией элементов ее репера Френе: $E_1 = \vec{\tau}$ — касательная, $E_2 = \vec{\nu}$ — нормаль, $E_3 = \vec{\beta}$ — бинормаль. Ясно, что у бирегулярной кривой в трехмерном пространстве имеются всего две кривизны: $k_1(t)$ и $k_2(t)$.

Исторические определения. Первая кривизна $k_1(t)$ бирегулярной кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ называется просто *кривизной* и обозначается $k(t)$ (латинская буква k). Вторая кривизна $k_2(t)$ бирегулярной кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ называется *кручением* и обозначается $\varkappa(t)$ (греческая буква «каппа» \varkappa).

Формулы Френе для бирегулярной кривой $\alpha(t)$ в трехмерном пространстве выглядят следующим образом: ¹⁾

«Наши» обозначения	«Старомодные» обозначения
$\dot{\alpha} = \dot{\alpha} E_1$	$\dot{\alpha} = \dot{\alpha} \vec{\tau}$
$\dot{E}_1 = \dot{\alpha} k_1E_2$	$\dot{\vec{\tau}} = \dot{\alpha} k\vec{\nu}$
$\dot{E}_2 = \dot{\alpha} (-k_1E_1 + k_2E_3)$	$\dot{\vec{\nu}} = \dot{\alpha} (-k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta})$
$\dot{E}_3 = \dot{\alpha} (-k_2)E_2$	$\dot{\vec{\beta}} = \dot{\alpha} (-\varkappa)\vec{\nu}$

Выведем теперь вычислительные «инженерные» формулы для кривизны и кручения, которые позволили бы находить кривизну и кручение заданной кривой $\alpha(t)$ без отыскания векторов ее репера Френе. Для этого, как обычно, будем дифференцировать кривую $\alpha(t)$ и использовать уравнения Френе. При этом, чтобы полностью погрузиться в старину, будем использовать старомодные обозначения.

Имеем

$$\dot{\alpha} = |\dot{\alpha}|\vec{\tau},$$

¹⁾ При переходе к изучению m -мерных пространств использование греческих букв оказалось неудобным, проще кривизны нумеровать.

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= |\dot{\alpha}| \bullet \vec{\tau} + |\dot{\alpha}| \dot{\vec{\tau}} = |\dot{\alpha}| \bullet \vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 k \vec{\nu}, \\ \ddot{\alpha} &= (\dots) \vec{\tau} + (\dots) \vec{\nu} + |\dot{\alpha}|^3 k \varkappa \vec{\beta}\end{aligned}$$

— разложения производных по базису Френе. В последнем выражении нам будет не очень важно, что стоит перед векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, поэтому я и позволил себе такую схематичную запись. Скажу честно — я ни разу в жизни толком и не считал, что на самом деле стоит в этих скобках, а коэффициент перед вектором $\vec{\beta}$ просто «сообразил», глядя на уравнения Френе и понимая, что вектор $\vec{\beta}$ может появиться только при дифференцировании вектора $\vec{\nu}$ в выражении для $\ddot{\alpha}$.


Теперь легко посчитать, что

$$\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = (|\dot{\alpha}| \vec{\tau}) \times (|\dot{\alpha}| \bullet \vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 k \vec{\nu}) = |\dot{\alpha}|^3 k (\vec{\tau} \times \vec{\nu}) = |\dot{\alpha}|^3 k \vec{\beta}.$$

Мы помним, что по теореме Френе–Жордана $k > 0$ при всех значениях параметра $t \in I$. Учитывая требование положительности кривизны, из предыдущего равенства моментально получаем

$$k = \frac{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

— та же самая формула, что и для пространства \mathbf{R}^2 ! Обведите ее в своих тетрадках в рамочку и хорошенько запомните.

 Обратите внимание на физическую «размерность» кривизны — квадратный метр разделить на кубический метр, т. е. кривизна имеет размерность (метр)⁻¹. Для такой величины у физиков имеется специальное название — *диоптрия* (оптическая сила линзы, т. е. единица поделить на радиус кривизны).

Далее, для того чтобы вычислить кручение посчитаем смешанное произведение (т. е. определитель третьего порядка):

$$\begin{aligned}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha) &= \det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha] = \langle \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}, \alpha \rangle = \\ &= \left\langle |\dot{\alpha}|^3 k \vec{\beta}, (\dots) \vec{\tau} + (\dots) \vec{\nu} + |\dot{\alpha}|^3 k \varkappa \vec{\beta} \right\rangle = |\dot{\alpha}|^6 k^2 \varkappa.\end{aligned}$$

Поскольку выражение для кривизны уже известно, моментально находится кручение:

$$\varkappa = \frac{(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha)}{|\dot{\alpha}|^6 k^2} = \frac{(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha)}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2},$$

и, слава богу, шестая степень в знаменателе сократилась. Полученную формулу также нужно разместить и в рамочку, и в свою память навечно!



Обратите внимание на физическую «размерность» кручения $\varkappa(t)$ — объем (м^3) разделить на квадрат площади (м^4), т. е. кручение также как и кривизна, является величиной, обратной длине (м^{-1}), т. е. диоптрией.

Упражнение 22.1, серьезное. Выведите вычислительные формулы для нахождения всех трех кривизн кривой $\alpha(t)$ в четырехмерном пространстве \mathbf{R}^4 . Убедитесь, что все три получившиеся кривизны также измеряются «в диоптриях», т. е. имеют физическую размерность (м^{-1}).

Как бирегулярная кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ ведет себя в окрестности некоторой своей точки? Вот весьма традиционный и насущный с практической точки зрения вопрос. Для упрощения технического счета договоримся далее считать, что кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ естественно параметризована, т. е. является кривой единичной скорости: $|\dot{\alpha}| \equiv 1$. Это не уменьшит общности получаемых выводов, но избавит нас от многочисленных степеней модуля скорости кривой, возникающих при подсчете ее производных и записи уравнений Френе.

Уравнения Френе для кривой единичной скорости $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ выглядят совсем просто:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \vec{\tau}, \\ \dot{\vec{\tau}} = k \vec{\nu}, \\ \dot{\vec{\nu}} = -k \vec{\tau} + \varkappa \vec{\beta}, \\ \dot{\vec{\beta}} = (-\varkappa) \vec{\nu}. \end{cases}$$

Для выяснения поведения кривой $\alpha(s)$ в окрестности точки $\alpha(s_0)$ мы, как обычно (см. пункт 17), проследим за изменением вектора секущей $\alpha(s) - \alpha(s_0)$, чтобы понять, как двигается этот вектор относительно репера Френе кривой $\alpha(s)$, вычисленного и **зафиксированного** в точке $s_0 \in I$.

Посчитаем сначала производные кривой $\alpha(s)$ и получим, используя уравнения Френе, разложения этих производных по базису Френе:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \vec{\tau}, \\ \ddot{\alpha} = \dot{\vec{\tau}} = k \vec{\nu}, \\ \alpha = (k \vec{\nu}) \bullet = \dot{k} \vec{\nu} + k(-k \vec{\tau} + \varkappa \vec{\beta}). \end{cases}$$

Разложим теперь вектор секущей $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ по базису Френе, используя формулу Тейлора до слагаемых третьего поряд-

ка малости и практикуя обозначение $s - s_0 = \sigma$ для сокращения записи:

$$\begin{aligned} \alpha(s) - \alpha(s_0) &= \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0) + \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{2!}(s - s_0)^2 + \frac{\alpha(s_0)}{3!}(s - s_0)^3 + R = \\ &= \sigma \vec{\tau} + \frac{k\sigma^2}{2!} \vec{\nu} + \frac{-k^2 \vec{\tau} + k\alpha \vec{\beta} + k \vec{\nu}}{3!} \sigma^3 + R = \\ &= \left(\sigma - \frac{k^2}{6} \sigma^3\right) \vec{\tau} + \left(\frac{k}{2} \sigma^2 + \frac{k}{6} \sigma^3\right) \vec{\nu} + \left(\frac{k\alpha}{6} \sigma^3\right) \vec{\beta} + R = \\ &= x \vec{\tau} + y \vec{\nu} + z \vec{\beta} + R, \end{aligned}$$

где $R \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, а буквами (x, y, z) обозначены координаты вектора $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ в базисе Френе.

Нудные вычисления закончены. Теперь можно приблизительно (т. е. качественно) нарисовать проекции кривой $\alpha(s)$ на координатные плоскости репера Френе, зафиксированного в точке $\alpha(s_0)$. Для того чтобы отобразить проекции кривой на каждую из координатных плоскостей, нужно каждый раз отбрасывать соответствующую нормальную составляющую вектора $\alpha(s) - \alpha(s_0) \approx x \vec{\tau} + y \vec{\nu} + z \vec{\beta}$ к плоскости проекции и рассматривать оставшееся выражение. Итак, перебираем координатные плоскости репера Френе.

1. Соприкасающаяся плоскость $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$. Проекция кривой

$$\alpha(s) \approx \alpha(s_0) + x \vec{\tau} + y \vec{\nu} + z \vec{\beta}$$

на соприкасающуюся плоскость получается выбрасыванием из выражения $\alpha(s_0) + x \vec{\tau} + y \vec{\nu} + z \vec{\beta}$ нормальной составляющей $z \vec{\beta}$ к соприкасающейся плоскости.

Мы помним, что $k > 0$ в любой момент $s \in I$. Рассмотрим знаки координат (x, y) вектора $x \vec{\tau} + y \vec{\nu}$.

Если $\sigma < 0$, то $x < 0, y > 0$ и проекция кривой проходит во второй четверти; если $\sigma > 0$, то $x > 0, y > 0$ и проекция кривой лежит в первой четверти (см. рис. 22.1).

Видно, что проекция кривой $\alpha(s)$ на соприкасающуюся плоскость всегда имеет изгиб в точке $s_0 \in I$.

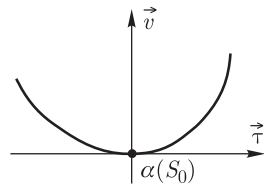


Рис. 22.1

Наблюдение (геометрический смысл кручения). Координаты (x, y) проекции $\alpha(s)$ на соприкасающуюся плоскость не

содержат кручение $\varkappa(s)$. Это означает, что поведение проекции кривой $\alpha(s)$ на соприкасающуюся плоскость совершенно не зависит от кручения кривой. Функция кручения характеризует лишь то, как кривая $\alpha(s)$ выходит (более образно — «выкручивается») из своей соприкасающейся плоскости вдоль вектора бинормали $\vec{\beta}$. Чуть ниже мы докажем, что если $\varkappa(s) \equiv 0$, то кривая вообще всегда лежит в своей соприкасающейся плоскости и никуда из нее не выходит.

2. Спрямяющая плоскость $(\vec{\tau}, \vec{\beta})$. Соответствующая проекция кривой $\alpha(s) \approx \alpha(s_0) + x\vec{\tau} + y\vec{\nu} + z\vec{\beta}$ получается теперь отбрасыванием нормальной составляющей $y\vec{\nu}$.

Рассмотрим знаки координат (x, z) вектора-проекции $x\vec{\tau} + z\vec{\beta}$.

Если $\sigma < 0$, то $x < 0, z < 0$ и проекция кривой проходит в третьей четверти; если $\sigma > 0$, то $x > 0, z > 0$ и проекция кривой лежит в первой четверти (см. рис. 22.2).

Видно, что проекция кривой $\alpha(s)$ на спрямляемую плоскость всегда имеет перегиб в точке $s_0 \in I$.

3. Нормальная плоскость $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$. Соответствующая проекция кривой $\alpha(s)$ получается удалением из выражения $\alpha(s_0) + x\vec{\tau} + y\vec{\nu} + z\vec{\beta}$ нормальной составляющей (к нормальной плоскости) $x\vec{\tau}$.

Помним, что всегда $k > 0$. Смотрим знаки координат (y, z) вектора-проекции $y\vec{\nu} + z\vec{\beta}$.

Если $\sigma < 0$, то $y > 0, z < 0$ и проекция кривой проходит в четвертой четверти; если $\sigma > 0$, то $y > 0, z > 0$ и проекция кривой лежит в первой четверти (см. рис. 22.3).

Видно, что проекция кривой $\alpha(s)$ на нормальную плоскость всегда имеет особенность в точке $s_0 \in I$ — возврат первого рода!

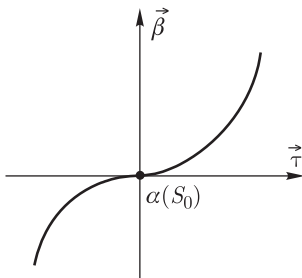


Рис. 22.2

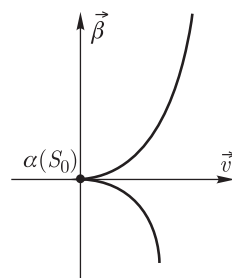


Рис. 22.3

В популярно-математической книжке «Теория катастроф»¹⁾ известного российского математика В. И. Арнольда читатели могут самостоятельно прочитать серию восторженных пассажей по поводу этой закономерной особенности — возврата первого рода, возникающего при проецировании кривой на нормальную плоскость. В этой книжке²⁾ Арнольд считает, что с этого простого факта берет свое начало целая отрасль современной математики, называемая «теорией особенностей» или «теорией катастроф». Я же, в свою очередь, считаю, что обсуждение этих чрезвычайно интересных вопросов находится далеко за пределами тематики нашей книжки. Я, по-прежнему, рассматриваю этот небольшой пункт про кривые в трехмерном пространстве исключительно как дань дидактической традиции, поэтому и закончу его здесь с чувством исполненного долга.

Задачи и упражнения



1. Найдите кривизну и кручение следующих кривых:
 а) $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$; б) $\alpha(t) = {}^t(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$;
 в) $\alpha(t) = {}^t(2t, \ln t, t^2)$.

2. Найдите кривизну и кручение винтовой линии $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, bt)$. При каком значении b кручение винтовой линии максимально, если $a = \operatorname{const}$?

3. Убедитесь, что для любой кривой единичной скорости $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ выполнены тождества:

а) $|\alpha|^3 \equiv k^4 + k^2 \kappa^2 + \dot{k}^2$; б) $\langle \dot{\alpha}, \alpha \rangle \equiv -k^2$; в) $\langle \ddot{\alpha}, \alpha \rangle \equiv k\dot{k}$.

4. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ — произвольная кривая единичной скорости. Докажите, что существует такой загадочный вектор $\vec{\omega}$, что для векторов репера Френе кривой $\alpha(s)$ выполняются тождества $\dot{\vec{\tau}} = \vec{\omega} \times \vec{\tau}$, $\dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}$, $\dot{\vec{\beta}} = \vec{\omega} \times \vec{\beta}$. Объясните физический смысл этого загадочного вектора $\vec{\omega}$ и придумайте этому вектору подходящее название.

5. Докажите, что если кривизна и кручение кривой $\alpha(s)$ постоянны и $\kappa \neq 0$, то образ $\alpha(s)$ — винтовая линия или ее часть.

6. Сфера, имеющая с данной кривой в данной точке касание порядка не ниже третьего, называется *соприкасающейся сферой* в этой точке. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ — произвольная кривая единичной скорости. Действуя по образу и подобию

¹⁾ Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1990. — С. 128.

²⁾ И, скорее всего, только в этой книжке — уж больно полемически-задорным выглядит следующее утверждение.

решения задачи из п. 13 о нахождении соприкасающейся окружности, найдите центр и радиус соприкасающейся сферы кривой $\alpha(s)$ в произвольной точке.

7. Найдите радиус соприкасающейся сферы в произвольной точке кривой $\alpha(t) = {}^t(e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$.

8. Убедитесь, что для произвольной кривой:

а) $(\vec{\tau}, \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}) \equiv \mathfrak{a}$; б) $(\dot{\vec{\beta}}, \ddot{\vec{\beta}}, \dddot{\vec{\beta}}) \equiv \mathfrak{a}^5 \left(\frac{k}{\mathfrak{a}} \right) \bullet$;

в) $(\dot{\vec{\tau}}, \ddot{\vec{\tau}}, \dddot{\vec{\tau}}) \equiv k^5 \left(\frac{\mathfrak{a}}{k} \right) \bullet$.

23. Свойства кривизн кривых общего вида

В этом пункте мы узнаем, по сути, только одно важное свойство окружающей природы, которое в вольном стиле можно сформулировать так — кривые одинаковы тогда и только тогда, когда их кривизны совпадают. Неопределенность этого утверждения заключается лишь в возможности различного толкования прилагательного «одинаковые». Разумеется, вольный стиль допустим в преамбуле к пункту, но не допустим при математическом описании явлений окружающего мира, поэтому наш дальнейший рассказ о волшебной определяющей силе кривизн мы разобьем на несколько последовательных строгих математических утверждений.

Первая теорема этого пункта льет воду на мельницу импликации «если кривые одинаковы, то кривизны совпадают». При этом прилагательное «одинаковые» означает — связанные заменой параметра.

Теорема 23.1 (инвариантность кривизн относительно замены параметра). Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая общего вида, $E_1, E_2, \dots, E_m : I \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$ — ее базис Френе, $k_1, k_2, \dots, k_{m-1} : I \rightarrow \mathbf{R}$ — ее кривизны. Если $\varphi : J \rightarrow I$ — замена параметра, сохраняющая ориентацию (т.е. $\forall \theta \in J$ выполнено $\dot{\varphi}(\theta) > 0$), то базис Френе $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_m : J \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R}}^m$ и кривизны $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{m-1} : J \rightarrow \mathbf{R}$ кривой $\beta = \alpha \circ \varphi$ (т.е. $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta))$) имеют вид

$$\tilde{E}_i = E_i \circ \varphi \quad (\text{для } i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\tilde{k}_i = k_i \circ \varphi \quad (\text{для } i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Таким образом, у кривых, связанных заменой параметра, векторы репера Френе и кривизны в соответствующих точках просто совпадают.

Доказательство. Мы уже знаем связь между производными кривых общего вида $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ (см. доказательство леммы п. 19):

$$(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}) = (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \ddot{\varphi} & * & \dots & * \\ 0 & \dot{\varphi}^2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}^3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dot{\varphi}^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Из приведенного соотношения и положительности производной $\dot{\varphi}(\theta)$ следует, что совокупности векторов $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)})$ в момент $\theta \in J$ и $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$ в момент $\varphi(\theta) \in I$ порождают один и тот же орфлаг. Первые $(m-1)$ векторов репера Френе — единственная ортонормированная система векторов, порождающая этот орфлаг (см. следствие из леммы п. 4). Это означает, что $\tilde{E}_i(\theta) = E_i(\varphi(\theta))$ для $i = 1, 2, \dots, m-1$. Согласно лемме об обобщенном векторном произведении из п. 6, отсюда вытекает и совпадение последних векторов: $\tilde{E}_m(\theta) = E_m(\varphi(\theta))$. Совпадение векторов реперов Френе кривых $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ доказано.

Теперь рассмотрим кривизны:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i(\theta) &= \frac{\langle \dot{\tilde{E}}_i, \tilde{E}_{i+1} \rangle}{|\dot{\tilde{\beta}}(\theta)|} = \frac{\langle \dot{E}_i(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta), E_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta)|} = \left(\text{помним,} \right) = \\ &= \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \cdot \frac{\langle \dot{E}_i(\varphi(\theta)), E_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))|} = k_i(\varphi(\theta)), \end{aligned}$$

т. е. совпадение кривизн кривых $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ также доказано. \blacklozenge

Вторая теорема этого пункта снова польет воду на мельницу импликации «если кривые одинаковы, то кривизны совпадают», только здесь прилагательное «одинаковые» будет означать «связанные движением».

Пусть, как и прежде, $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая общего вида, $E_1, E_2, \dots, E_m : I \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^m$ — ее базис Френе, $k_1, k_2, \dots, k_{m-1} : I \rightarrow \mathbf{R}$ — ее кривизны.

Теорема 23.2 (инвариантность кривизн относительно движения). Пусть $Ap = p_0 + Qp$ — изометрия пространства \mathbf{R}^m , являющаяся движением (т. е. $\det Q = +1$), $\tilde{\alpha}(t) = A\alpha(t)$ — новая кривая, $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_m : I \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^m$ — ее базис Френе и $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{m-1} : I \rightarrow \mathbf{R}$ — ее кривизны. Тогда

$$|\dot{\tilde{\alpha}}| \equiv |\dot{\alpha}|,$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_i &= QE_i \quad (\text{для } i = 1, 2, \dots, m), \\ \tilde{k}_i &= k_i \quad (\text{для } i = 1, 2, \dots, m - 1).\end{aligned}$$

Таким образом, у кривых, связанных движением, совпадают не только кривизны, но и их абсолютные скорости. Интуитивно это выглядит совершенно естественно — если некоторую кривую взять и бережно перенести в другое место пространства, не меняя ее формы, то ее кривизны и длины касательных векторов не изменятся (могут измениться только их направления). В этом — суть движения, ведь всякое движение является композицией параллельного переноса и поворота.

Упражнение 23.1. Пожалуйста, докажите самостоятельно эту почти очевидную теорему об инвариантности кривизны и абсолютных скоростей относительно движения евклидова пространства \mathbf{R}^m . Это будет совсем несложно сделать, если еще раз посмотреть определение изометрии евклидова пространства в п. 7 и доказательства лемм в пунктах 9 и 19.

Итак, если одна кривая получается из другой движением, то у них кривизны и абсолютные скорости совпадают. Удивительно устроена матушка-природа — обратное утверждение, оказывается, тоже верно! Если кривизны и абсолютные скорости двух кривых совпадают, то одна кривая получается из другой параллельным переносом и поворотом! Но доказать это оказывается значительно трудней. Если раньше, по образному выражению, мы «лили воду и мельница крутилась», то теперь, все будто бы встанет с ног на голову — нужно крутить мельницу, чтобы полилась вода, а это намного тяжелей!

В формулировке и доказательстве следующей теоремы сохранены предыдущие обозначения для кривых и кривизн.

Теорема 23.2 (об изометричности кривых с одинаковыми кривизнами и абсолютными скоростями). Пусть $\alpha, \tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — две кривые общего вида. Если $|\dot{\tilde{\alpha}}| \equiv |\dot{\alpha}|$ и $\tilde{k}_i(t) \equiv k_i(t)$ (для $i = 1, 2, \dots, m - 1$), то существует движение A пространства \mathbf{R}^m такое, что $\tilde{\alpha}(t) = A\alpha(t)$.

Доказательство. По условию, мы имеем равенство матриц кривизн для двух данных кривых:

$$\tilde{\omega} = \omega.$$

Рассмотрим матрицы, составленные из базисных векторов репера Френе: $\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_m]$ и $\mathbf{X} = [E_1, E_2, \dots, E_m]$. Обе эти

матрицы удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

так как это уравнение является, по сути, матричной записью уравнений Френе.

Зафиксируем момент $t_0 \in I$. Существует ортогональный оператор (или, что равносильно, ортогональная матрица) Q_0 , который переводит (фиксированный!) ортонормированный базис $(E_1(t_0), E_2(t_0), \dots, E_m(t_0))$ в (фиксированный!) ортонормированный базис $(\tilde{E}_1(t_0), \tilde{E}_2(t_0), \dots, \tilde{E}_m(t_0))$, т. е.

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_1(t_0), \tilde{E}_2(t_0), \dots, \tilde{E}_m(t_0)] &= Q_0 \cdot [E_1(t_0), E_2(t_0), \dots, E_m(t_0)], \\ \tilde{\mathbf{X}}(t_0) &= Q_0 \cdot \mathbf{X}(t_0). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь переменную матрицу

$$\mathbf{Y}(t) = Q_0 \cdot \mathbf{X}(t).$$

Легко проверить, что эта переменная матрица также удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Действительно, дифференцируем матрицу $\mathbf{Y}(t)$ (матрица Q_0 — постоянная!):

$$\dot{\mathbf{Y}} = Q_0 \cdot \dot{\mathbf{X}} = Q_0 \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\mathbf{Y}(t_0) = Q_0 \cdot \mathbf{X}(t_0) = \tilde{\mathbf{X}}(t_0),$$



следовательно,

$$\mathbf{Y}(t) \equiv \tilde{\mathbf{X}}(t),$$

в силу единственности решения задачи Коши для уравнения $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega}$ с начальным условием $\mathbf{Z}(t_0) = \tilde{\mathbf{X}}(t_0)$.

Мы обнаружили самый главный факт в этом доказательстве! Оказывается, постоянная ортогональная матрица Q_0 , зафиксированная в момент $t_0 \in I$, «пригодна к использованию» и в остальные моменты $t \in I$, т. е. переход от базиса $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ к базису $(\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_2(t), \dots, \tilde{E}_m(t))$ в любой момент $t \in I$ осуществляется с помощью одной и той же ортогональной матрицы Q_0 :



$$\tilde{\mathbf{X}}(t) \equiv Q_0 \cdot \mathbf{X}(t).$$

Дальше все просто. Полученное тождество для матриц, в частности, означает тождественное совпадение первых столбцов этих матриц:

$$\tilde{E}_1 \equiv Q_0 E_1.$$

Тогда получается, что

$$\dot{\tilde{\alpha}}(t) = |\dot{\tilde{\alpha}}| \tilde{E}_1 = |\dot{\alpha}| Q_0 E_1 = Q_0 (|\dot{\alpha}| E_1) = Q_0 \dot{\alpha}(t),$$

т. е.

$$\dot{\tilde{\alpha}}(t) \equiv Q_0 \dot{\alpha}(t).$$

Именно ради этого тождества мы и напрягались целую страницу!

Мы уже сталкивались с ситуацией (см. п. 13), когда «видишь тождество», но его надо не дифференцировать, а интегрировать. Здесь как раз такой случай, ведь мы хотим, зная соотношение между производными кривых, получить соотношение между исходными кривыми:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t_0) &= \int_{t_0}^t \dot{\tilde{\alpha}}(t) dt = \int_{t_0}^t Q_0 \dot{\alpha}(t) dt = \\ &= Q_0 \int_{t_0}^t \dot{\alpha}(t) dt = Q_0 (\alpha(t) - \alpha(t_0)). \end{aligned}$$

Теперь видно, что кривые $\alpha(t)$ и $\tilde{\alpha}(t)$ связаны изометрией:

$$\tilde{\alpha}(t) = p_0 + Q_0 \alpha(t),$$

где $p_0 = \tilde{\alpha}(t_0) - Q_0 \alpha(t_0)$ — начальная точка. Найденная изометрия является движением, так как $\det Q_0 > 0$ в силу одинаковой ориентации базисов $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t))$ и $(\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_2(t), \dots, \tilde{E}_m(t))$.

Теорема доказана. \blacklozenge

Итак, если у двух кривых абсолютные скорости и кривизны одинаковы, то эти кривые отличаются друг от друга только месторасположением в пространстве. Попробуем усилить эту мысль и сказать так: «кривизны и модуль скорости задают кривую с точностью до расположения в пространстве». Заманчивое утверждение! Однако для справедливости столь сильного утверждения необходима уверенность в самом факте *существования* кривой с заданной абсолютной скоростью и набором кривизн. Вот уж тогда такая кривая будет единственна с точностью до расположения в пространстве! Уверенность в существовании кривой с заданным набором кривизн и заданной абсолютной скоростью даст нам следующий пункт.

24. Основная теорема локальной теории кривых

Преыдуший пункт мы закончили заманчивой гипотезой про определяемость (с точностью до расположения в пространстве) кривой общего вида по данному набору ее кривизн и ее абсолютной скорости. Эту заманчивую гипотезу доказывает *основная теорема локальной теории кривых*.

В отличие от «основной теоремы алгебры», которая получила свой величественный титул только за сам факт своего существования (в те далекие времена, когда алгебра еще была бедна фундаментальными теоремами), основная теорема локальной теории кривых называется «основной» совершенно заслуженно. Она — фундамент локальной теории кривых. Она делает законным наш «план захвата» теории кривых с помощью построения и изучения репера Френе (помните, мы строили такой план военно-научных действий в п. 19). Она, по сути, утверждает, что репер Френе кривой общего вида содержит в себе абсолютно всю информацию об исходной кривой и является законным инструментом для ее изучения.

Таким образом, в этом пункте перед нами стоит следующая задача: доказать существование и единственность кривой общего вида $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ с заданными кривизнами и абсолютной скоростью. Обсудим сразу начальные условия для такой задачи. Я предлагаю принять следующий список условий:

- 1) $0 \in I$ — выполнение этого условия всегда достигается заменой параметра у кривой, при этом соответствующая замена параметра является простым сдвигом;
- 2) $\alpha(0) = 0 = {}^t(0, 0, \dots, 0)$ — выполнение этого условия всегда достигается параллельным переносом в пространстве \mathbf{R}^m ;
- 3) $(E_1(0), E_2(0), \dots, E_m(0)) = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ — в начальный момент $0 \in I$ репер Френе занимает положение стандартного базиса; это всегда достигается поворотом в пространстве \mathbf{R}^m ;
- 4) $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ — натуральная параметризация кривой всегда обеспечивается подходящей заменой параметра.

Теперь наша исходная гипотеза об определяемости кривой выглядит так: существует единственная кривая единичной скорости $\alpha(s)$ с наперед заданным набором кривизн, удовлетворяющая приведенным выше начальным условиям 2) и 3).

В силу всех теорем предыдущего пункта об изометричности кривых и инвариантности кривизн, предложенные начальные условия для искомой кривой $\alpha(s)$ никак не будут ограничивать


общность рассуждений и общность окончательного результата. Действительно, если мы научимся находить кривую с этими начальными условиями, то мы, фактически, научимся находить кривые с любыми другими начальными условиями, ибо кривая с данными кривизнами и другими начальными условиями просто получается из найденной кривой соответствующими заменами параметра и изометрией — слава богу, кривизны при таких преобразованиях неизменны!

Сформулируем, наконец, основную теорему.

Теорема 24.1 (основная теорема локальной теории кривых). Пусть $I \subseteq \mathbf{R}$ — интервал и $0 \in I$. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_{m-1} : I \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкие функции, причем $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{m-2}(s) > 0$ для всех $s \in I$. Тогда существует единственная кривая общего вида α единичной скорости $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ такая, что:

- 1) $\alpha(0) = 0$,
- 2) $[E_1(0), E_2(0), \dots, E_m(0)] = \mathbf{1}_m$, т. е. $E_i(0) = e_i$,
- 3) k_1, k_2, \dots, k_{m-1} — кривизны $\alpha(s)$.

Сразу после формулировки теоремы уместно дать

 **Определение 24.1.** Уравнения $k_i = k_i(s)$ (где $i = 1, 2, \dots, m-1$), называются *натуральными уравнениями* кривой $\alpha(s)$.

Согласно теореме натуральные уравнения кривой однозначно определяют кривую единичной скорости с точностью до расположения в пространстве. «Натуральные уравнения» близки по смыслу к крестьянскому натуральному хозяйству, которое само себя обеспечивает всем необходимым. Натуральные уравнения задают кривую через натуральный параметр (длину дуги) и кривизны — кривая будто бы сама себя обеспечивает всеми параметрами, необходимыми для своего задания. В основе натуральных уравнений лежат чисто геометрические, внутренние свойства кривых, инвариантные относительно замены параметра и изометрии. Натуральность означает естественность, свободу от произвола исследователя, от предвзятости выбора параметризации и расположения в пространстве, независимость от всяких внешних (по отношению к линии, как к геометрической фигуре) факторов.

Приступим к доказательству основной теоремы локальной теории кривых. По пути мы узнаем еще достаточно много интересного.

Доказательство. Пусть $\alpha(s)$ — искомая кривая, $E_1(s), E_2(s), \dots, E_m(s)$ — ее базис Френе. Для отыскания этой кривой,

в ходе рассуждений, нам предстоит решить две задачи Коши. Назовем условно эти задачи А и Б.

Искомая кривая $\alpha(s)$ является решением задачи А.

Задача А. Найти $\alpha(s)$, удовлетворяющую уравнению $\dot{\alpha}(s) = E_1(s)$ с начальными условиями $\alpha(0) = 0$.

Должен честно признаться, мы пока не можем даже приступить к решению задачи А, ибо мы не знаем вектора $E_1(s)$. Однако сразу заметим, что если нам удастся найти решение задачи А, т.е. найти кривую $\alpha(s)$, то она будет единственна в силу единственности решения задачи Коши.

Что делать? Придется сначала решать задачу Б — искать векторы репера Френе кривой общего вида $\alpha(s)$.

Задача Б. Решить уравнение $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\omega}$ с начальными условиями $\mathbf{X}(0) = \mathbf{1}_m$, где

$$\boldsymbol{\omega}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & \cdots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

— данная матрица кривизн искомой кривой, $\mathbf{X}(s) = [E_1(s), E_2(s), \dots, E_m(s)]$ — матрица неизвестных.

Ну, так возьмем и решим задачу Б, хотя бы теоретически! По теореме существования и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений, ¹⁾ искомое решение — матрица $\mathbf{X}(s) = [E_1(s), E_2(s), \dots, E_m(s)]$, удовлетворяющая начальному условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{1}_m$, существует и единственна! Будем считать поэтому, что задачу Б мы решили.

Посмотрим более внимательно на найденное решение задачи Б — матрицу $\mathbf{X}(s)$. Оказывается, она обязана быть ортогональной! Действительно:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} \cdot {}^t\mathbf{X})^\bullet &= \dot{\mathbf{X}} \cdot {}^t\mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot {}^t\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}\boldsymbol{\omega}) \cdot {}^t\mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot {}^t(\mathbf{X}\boldsymbol{\omega}) = \\ &= \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot {}^t\mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot {}^t\boldsymbol{\omega} \cdot {}^t\mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot (\boldsymbol{\omega} + {}^t\boldsymbol{\omega}) \cdot {}^t\mathbf{X} \equiv \mathbf{0}_m, \end{aligned}$$

так как $\boldsymbol{\omega}(s)$ — кососимметрическая. Следовательно,

$$(\mathbf{X} \cdot {}^t\mathbf{X}) \equiv \text{const} = \mathbf{X}(0) \cdot {}^t\mathbf{X}(0) = \mathbf{1}_m.$$

¹⁾ Доказательство этой теоремы из курса дифференциальных уравнений я настоятельно советую повторить самостоятельно.

Это означает, что $\mathbf{X}(s)$ — ортогональная матрица в любой момент $s \in I$. Таким образом, столбцы $E_1(s), E_2(s), \dots, E_m(s)$ — ортонормированный базис пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$.

Будем решать теперь задачу А. Так как $\dot{\alpha}(s) = E_1(s)$, то

$$\alpha(s) = \int_0^s E_1(s) ds$$

— это решение задачи А, ибо $\alpha(0) = 0$. Найденная кривая $\alpha(s)$ единственна.



Теперь проверим, что для найденной кривой действительно выполнены все утверждения теоремы. Этого-то мы пока не знаем!!!!

Очевидно, что $|\dot{\alpha}(s)| = |E_1(s)| \equiv 1$, т. е. найденная кривая $\alpha(s)$ является кривой единичной скорости.

Докажем теперь, что $\alpha(s)$ — кривая общего вида. Для этого надо дифференцировать кривую $\alpha(s)$. Будем искать разложения всех производных кривой $\alpha(s)$ по найденному (из задачи Б) ортонормированному базису E_1, E_2, \dots, E_m . Нам, естественно, понадобятся соотношения между векторами E_1, E_2, \dots, E_m и их производными, чтобы пользоваться ими для выполнения преобразований. Условие задачи Б дает нам эти соотношения: $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot \omega$.



Обращаю ваше внимание на то, что мы пока не имеем права называть соотношения из задачи Б уравнениями Френе кривой $\alpha(s)$! Мы еще не проверили, что векторы E_1, E_2, \dots, E_m являются базисом Френе для $\alpha(s)$, а функции k_1, k_2, \dots, k_{m-1} — ее кривизнами!

Справа на странице, для удобства, я подробно выпишу соотношения для векторов E_1, E_2, \dots, E_m , взятые из задачи Б. Слева на странице — происходит подсчет производных. В этом подсчете, как обычно, я позволю себе несколько вольную запись — вместо коэффициентов, которые далее нам не понадобятся, я буду ставить многоточия в скобках. ¹⁾

Начнем вычисления. Первая производная:

$$\dot{\alpha} = E_1.$$

Это равенство выполнено только потому, что кривая $\alpha(s)$ появилась из задачи А.

¹⁾ Как и в п.22, еще раз сознаюсь, что эти коэффициенты в скобках я никогда в жизни добросовестно не вычислял. А зря, — вдруг в них есть какое-нибудь неизведенное свойство и я прошел мимо великого открытия?

Следующие производные:

Векторы производных кривой единичной скорости	Соотношения из задачи Б
$\ddot{\alpha} = \dot{E}_1 = k_1 E_2$	$\dot{E}_1 = k_1 E_2$
$\alpha^{(3)} = k_1 k_2 E_3 + (\dots) E_2 + (\dots) E_1$	$\dot{E}_2 = (-k_1 E_1 + k_2 E_3)$
$\alpha^{(4)} = k_1 k_2 k_3 E_4 + (\dots) E_3 + (\dots) E_2 + \dots$	$\dot{E}_3 = \dots$
$\alpha^{(5)} = k_1 k_2 k_3 k_4 E_5 + (\dots) E_4 + (\dots) E_3 + \dots$	\vdots
\dots	\vdots
$\alpha^{(i)} = k_1 k_2 \dots k_{i-1} E_i + (\dots) E_{i-1} + \dots$	$\dot{E}_i = (-k \dots$
\dots	\dots
$\alpha^{(m)} = k_1 \dots$	$\dot{E}_m = (-k_{m-1}) E_{m-1}$

Полученные разложения производных справедливы только потому, что векторы E_1, E_2, \dots, E_m являются решениями задачи Б, т. е. именно для них выполнены соотношения задачи Б с заданными в формулировке теоремы функциями k_1, k_2, \dots, k_{m-1} .

Таким образом, в матричной записи мы имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)} \end{pmatrix} = (E_1, E_2, \dots, E_{m-1}) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & k_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & k_1 k_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & k_1 k_2 k_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_1 k_2 \dots k_{m-2} \end{bmatrix}.$$

В записи матрицы перехода T , стоящей справа, участвуют функции с первой (k_1) до предпоследней (k_{m-2}), а все эти функции, по условию теоремы, положительны. Следовательно, $\det T > 0$, т. е. совокупность векторов $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$ порождает тот же орфлаг, что и совокупность векторов $(E_1, E_2, \dots, E_{m-1})$. Это означает, что векторы $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$ линейно независимы, т. е. кривая $\alpha(s)$ — является кривой общего вида.

Идем далее. Легко понять, что $\det [E_1, E_2, \dots, E_m] \equiv 1$. Действительно, определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице. В то же время, $\det \mathbf{X}(0) = 1$ и $\det \mathbf{X}(s)$ — непрерывная функция, следовательно, значение $\det \mathbf{X}(s)$ нигде не может «перескочить» с единицы на минус единицу и $\det \mathbf{X}(s) \equiv 1$.

Таким образом, система (E_1, E_2, \dots, E_m) положительно ориентирована, является ортонормированным базисом пространства $\overline{\mathbf{R}}^m$, ее подсистема $(E_1, E_2, \dots, E_{m-1})$ порождает тот же орфлаг, что и система производных $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})$. Следовательно, (E_1, E_2, \dots, E_m) — базис Френе кривой $\alpha(s)$ в силу единственности базиса Френе у кривой общего вида. Это, кроме того, означает, что функции k_1, k_2, \dots, k_{m-1} являются кривизнами кривой $\alpha(s)$.

Основная теорема локальной теории кривых доказана. \blacklozenge

Все теоремы п. 23 об инвариантности кривизн в совокупности с только что доказанной «основной теоремой» дают основание утверждать, что длина дуги s кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ и ее кривизны k_1, k_2, \dots, k_{m-1} образуют так называемую *полную систему инвариантов* кривой $\alpha(I) \subset \mathbf{R}^m$ как геометрического объекта. Это означает, что, с одной стороны, указанные функции не зависят от выбора параметризации и выбора начального неподвижного репера в пространстве \mathbf{R}^m , а с другой стороны, полностью и однозначно определяют свой геометрический объект — линию $\alpha(I) \subset \mathbf{R}^m$ (образ кривой), т. е. содержат в себе всю информацию об исследуемом геометрическом образе. К сожалению, обсуждение чрезвычайно интересных вопросов, связанных с системами инвариантов геометрических объектов, мы вынуждены оставить за рамками этой книжки в силу ограниченности ее объема. Давайте двинемся в следующий пункт.

Задачи и упражнения



- Составьте натуральные уравнения следующих кривых:
 - $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$; б) $\alpha(t) = {}^t(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$.
- Найдите хоть какую-нибудь параметризацию кривых, заданных натуральными уравнениями:
 - $k = C_1 \neq 0, \varkappa = C_2 \neq 0$; б) $k = \varkappa = \frac{a}{2a^2 + s^2}$.

25. Теорема о последней кривизне

Мы начнем этот пункт с утверждения, которое, фактически, является следствием из проведенного нами доказательства основной теоремы локальной теории кривых.

Утверждение 25.1. Если $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая общего вида, то

$$\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] = |\dot{\alpha}|^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot k_1^{m-1} \cdot k_2^{m-2} \cdot k_3^{m-3} \cdot \dots \cdot k_{m-2}^2 \cdot k_{m-1}.$$

Доказательство. Снова «считаем точки» — ищем разложение производных кривой по базису Френе (используя, разумеется, уравнения Френе для кривой общего вида):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= |\dot{\alpha}|E_1, \\ \ddot{\alpha} &= (|\dot{\alpha}|E_1)' = |\dot{\alpha}|^2 k_1 E_2 + (\dots)E_1, \\ \alpha^{(3)} &= |\dot{\alpha}|^3 k_1 k_2 E_3 + (\dots)E_2 + (\dots)E_1, \\ \alpha^{(4)} &= |\dot{\alpha}|^4 k_1 k_2 k_3 E_4 + (\dots)E_3 + (\dots)E_2 + (\dots)E_1, \\ \alpha^{(5)} &= |\dot{\alpha}|^5 k_1 k_2 k_3 k_4 E_5 + (\dots)E_4 + (\dots)E_3 + (\dots)E_2 + (\dots)E_1, \\ &\vdots \\ \alpha^{(m)} &= |\dot{\alpha}|^m k_1 k_2 \dots k_{m-1} E_m + (\dots)E_{m-1} + (\dots)E_{m-2} + \dots + \\ &\quad + (\dots)E_1.\end{aligned}$$

Отсюда, используя наше умение выносить числовой множитель от каждого столбца за знак определителя (ну, и, разумеется, умение суммировать арифметические прогрессии), моментально получаем, что

$$\begin{aligned}\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] &= \det [|\dot{\alpha}|E_1; |\dot{\alpha}|^2 k_1 E_2 + \\ &\quad + (\dots)E_1; \dots; |\dot{\alpha}|^m k_1 k_2 \dots k_{m-1} E_m + \dots + (\dots)E_1] = \\ &= |\dot{\alpha}|^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot k_1^{m-1} \cdot k_2^{m-2} \cdot k_3^{m-3} \cdot \dots \cdot k_{m-2}^2 \cdot k_{m-1} \times \\ &\quad \times \det [E_1, E_2, \dots, E_m].\end{aligned}$$

А это, собственно, и утверждалось, ведь $\det [E_1, E_2, \dots, E_m] \equiv 1$ (это же объем единичного m -мерного кубика!). ♦

Мы подошли к теореме, название которой на лекции я всегда произношу трагическим голосом — теорема «о последней кривизне». Этой теоремой завершается список обязательных к экзамену теорем из теории кривых. Эта замечательная теорема повествует нам о неразрывной связи между геометрическими свойствами кривой (ее форме) и численным значением ее последней кривизны.

Таинственная *последняя кривизна*, в отличие от остальных строго положительных (по теореме Френе–Жордана) кривизн, свободна в своем изменении и может принимать какие угодно значения. Последняя кривизна, таким образом, среди всех

кривизн находится как бы на особенном положении. Ей больше позволено.

Теорему о последней кривизне я обещал доказать еще в п. 22, когда мы выясняли геометрический смысл кручения. Кручение — это последняя кривизна кривой в трехмерном пространстве. В п. 22 была вскользь обронена фраза — если кручение равно нулю, то кривая вообще никуда из своей соприкасающейся плоскости не выкручивается, а всегда в ней находится. Оказывается, подобное свойство справедливо и для кривых в пространстве произвольной размерности.

Теорема 25.1 (о последней кривизне). Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая общего вида. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) образ $\alpha(t)$ лежит в некоторой гиперплоскости ¹⁾;
- 2) $\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] \equiv 0$;
- 3) $k_{m-1} \equiv 0$.

По сути, в сформулированной теореме идет речь уже о глобальном свойстве кривой — целиком лежать в некоторой гиперплоскости. Глобальные свойства — в противовес локальным свойствам — касаются всей кривой «в целом». Глобальные свойства рассматриваются не в окрестности некоторой точки $t_0 \in I$, а сразу на всем интервале изменения параметра.

Доказательство. Будем отдельно доказывать импликации так, чтобы цепочка импликаций замкнулась. Этим будет доказана эквивалентность приведенных условий. Нам будет удобно доказывать импликации в такой последовательности: 2) \rightarrow 3), 1) \rightarrow 2), 3) \rightarrow 1).

Импликация 2) \rightarrow 3). Пусть $\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] \equiv 0$. Согласно утверждению, доказанному в начале этого пункта,

$$\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] = |\dot{\alpha}|^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot k_1^{m-1} \cdot k_2^{m-2} \cdot k_3^{m-3} \cdot \dots \cdot k_{m-2}^2 \cdot k_{m-1}.$$

Таким образом, $|\dot{\alpha}|^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot k_1^{m-1} \cdot k_2^{m-2} \cdot k_3^{m-3} \cdot \dots \cdot k_{m-2}^2 \cdot k_{m-1} \equiv 0$, следовательно, последняя кривизна $k_{m-1} \equiv 0$, ведь первые $(m-2)$ кривизны кривой $\alpha(t)$ строго положительны и кривая $\alpha(t)$ регулярна, т. е. $|\dot{\alpha}| \neq 0$.

¹⁾ То есть в плоскости, размерность которой на единицу меньше размерности окружающего пространства.

Импликация 1) \rightarrow 2). Напомню сначала уравнение гиперплоскости в пространстве \mathbf{R}^m с нормальным вектором \vec{n} , проходящей через начальную точку $p_0 = \alpha(t_0) \in \mathbf{R}^m$. Вот оно:

$$\langle p - p_0, \vec{n} \rangle \equiv 0.$$

Рисунок 25.1 иллюстрирует это общеизвестное уравнение.

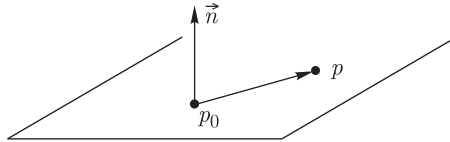



Рис. 25.1

Итак, дано: $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{n} \rangle \equiv 0$ — кривая лежит в гиперплоскости. Видишь тождество — дифференцируй! Дифференцируем m раз:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}, \vec{n} \rangle &\equiv 0, \\ \langle \ddot{\alpha}, \vec{n} \rangle &\equiv 0, \\ &\vdots \\ \langle \alpha^{(m)}, \vec{n} \rangle &\equiv 0. \end{aligned}$$

 Это означает, что $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)} \in \langle \vec{n} \rangle^\perp$, т.е. все производные лежат в ортогональном дополнении к подпространству $\langle \vec{n} \rangle$, порожденному нормальным вектором \vec{n} . Ясно, что $\mathbf{R}^m = \langle \vec{n} \rangle \oplus \langle \vec{n} \rangle^\perp$ и $\dim \langle \vec{n} \rangle = 1$, значит,

$$\dim \langle \vec{n} \rangle^\perp = m - 1.$$

Имеем, таким образом, m штук векторов $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)} \in \langle \vec{n} \rangle^\perp$, лежащих в подпространстве, размерность которого $(m - 1)$. Следовательно, эти векторы линейно зависимы и $\det [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] \equiv 0$.

Импликация 3) \rightarrow 1). Рассмотрим последнее уравнение Френе:

$$\dot{E}_m = -k_{m-1} \cdot |\dot{\alpha}| \cdot E_{m-1}.$$

Так как $k_{m-1} \equiv 0$, то $\dot{E}_m \equiv \vec{0}$, следовательно, $E_m(t) \equiv \text{const}$, поэтому последний вектор репера Френе — постоянный.

Возьмем тождество $\langle \dot{\alpha}(t), E_m \rangle \equiv 0$ (это действительно тождество, так как $\dot{\alpha} \perp E_m$ в любой момент $t \in I$). Интегрируем его (в промежутке от t_0 до момента t):

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), E_m \rangle \equiv \text{const.}$$

Найдем эту константу. Очевидно, при $t = t_0$ скалярное произведение, стоящее в тождестве слева, равно нулю. Это означает, что $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), E_m \rangle \equiv 0$. Таким образом, кривая $\alpha(t)$ всегда находится в гиперплоскости, уравнение которой есть



$$\langle p - \alpha(t_0), E_m \rangle \equiv 0.$$

Нормальным вектором этой гиперплоскости служит постоянный вектор E_m — последний вектор репера Френе.

Теорема о последней кривизне доказана. \blacklozenge

Поздравляю вас, дорогие читатели! Обязательная к изучению на математико-механическом факультете часть сведений из теории кривых на этом закончилась. Однако любопытных читателей приглашаю посетить следующий пункт.

Задачи и упражнения



1. Докажите, что следующие кривые целиком лежат в некоторой гиперплоскости, после чего напишите уравнение этой гиперплоскости:

а) $\alpha(t) = {}^t(2t^2 + t - 1, 3t^2 - 2t + 75, t^2 - 2t + 4)$;

б) $\alpha(t) = {}^t\left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right)$;

в) $\alpha(t) = {}^t(2t^2, 3t^3 - 2t, t^3 + 2t^2 + 4, -t^3 + t^2 + t + 1)$;

г) $\alpha(t) = {}^t(2t, 3t^2, t^3, t^4, 2t - 1)$.

Найдите последний вектор репера Френе каждой данной кривой.

2. Найдите все функции $f(t)$ такие, что кривая $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, f(t))$ является плоской.

3. Докажите, что если все нормальные плоскости бирегулярной кривой $\alpha : I \rightarrow b f R^3$ параллельны некоторому постоянному вектору \vec{e} , то кривая α является плоской.

4. Докажите, что если все соприкасающиеся плоскости бирегулярной кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ ортогональны некоторому постоянному вектору \vec{e} , то кривая α является плоской.

26. Кривые с постоянными кривизнами

Как ведет себя кривая, у которой все кривизны постоянны? Другими словами, какие кривые задаются простейшими натуральными уравнениями $k_1 \equiv C_1, k_2 \equiv C_2, \dots, k_{m-1} \equiv C_{m-1}$, где C_1, C_2, \dots, C_{m-1} — фиксированные постоянные (здесь, разумеется, $C_1, C_2, \dots, C_{m-2} > 0$ в силу теоремы Френе–Жордана)?

Постановка этого вопроса мотивируется не только внешней простотой данных натуральных уравнений. Этот вопрос важен для выяснения геометрического смысла кривизн. Естественность такого вопроса с геометрической точки зрения становится понятной, если вспомнить п. 13, где впервые у нас появилось понятие кривизны плоской кривой. Для выявления ее наглядного геометрического смысла мы рассмотрели плоские кривые постоянной кривизны и увидели, что такая кривая есть либо окружность (или ее часть), либо прямая (или ее часть). На пути характеристики плоских линий постоянной кривизны у нас возникли очень плодотворные понятия соприкасающейся окружности и центра кривизны кривой. Кривизна при этом обрела ясный геометрический смысл — это величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности.



Факт 26.1. Плоская кривая постоянной и отличной от нуля кривизны k лежит на окружности, т. е. на «одномерной» сфере S^1 радиуса $R = 1/|k|$.

В трехмерном пространстве кривые $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ с постоянными кривизнами $k_1 = \text{const} > 0$ и $k_2 = \text{const}$ тоже достаточно просто охарактеризовать и представить их наглядный геометрический образ.

Если кручение k_2 (последняя кривизна) тождественно равно нулю, то по теореме о последней кривизне (п. 25) кривая $\alpha(t)$ является плоской и представляет собой либо окружность (при $k_1 = \text{const} \neq 0$), либо прямую (при $k_1 = \text{const} = 0$).

Если же обе кривизны $k_1, k_2 = \text{const}$ отличны от нуля, то мы имеем дело (см. рис. 26.1) с красивой пространственной кривой — *винтовой линией* (латинское название — *helix*, т. е. «винт»). Одна из возможных параметри-

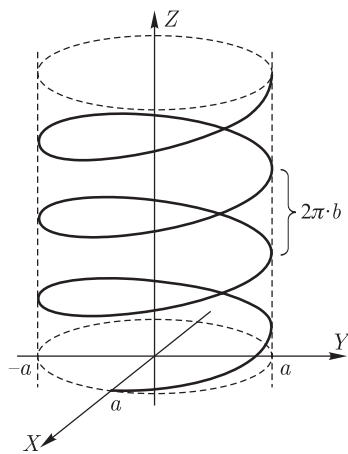


Рис. 26.1. ($b > 0$)

зацей винтовой линии такова:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, \quad b \neq 0,$$

— точка движется в плоскости XOY по окружности радиуса a и одновременно начинает подниматься (если $b > 0$) или опускаться (если $b < 0$) вдоль оси Z с постоянной скоростью $|b|$. Такая винтовая линия целиком лежит на цилиндре $x^2 + y^2 = a^2$ радиуса a , осью которого служит ось OZ . В момент $t = 0$ соприкасающейся плоскостью винтовой линии служит координатная плоскость XOY . Если $b > 0$, то винтовая линия закручивается (выходит из соприкасающейся плоскости) как «правый» винт, если $b < 0$, то линия закручивается как «левый» винт. Кривизны винтовой линии постоянны и равны

$$k_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad k_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Видно, что знак кручения определяет, каким винтом является винтовая линия — правым или левым.

Упражнение 26.1. Докажите еще раз (см. задачу 5 из п. 22), что если кривизна и кручение кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ постоянны и отличны от нуля, то эта кривая — винтовая линия или ее часть.



Факт 26.2. Кривая с постоянными ненулевыми кривизнами k_1, k_2 в пространстве \mathbf{R}^3 лежит на цилиндре $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^1$ радиуса $R = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}$.

Как обстоит дело в пространстве произвольной размерности? Признаюсь честно, я не сумел найти в математической литературе скольнибудь приемлемого изложения вопросов, связанных с описанием кривых с постоянными кривизнами в пространствах произвольной размерности.²⁾ Поэтому дальнейшие результаты

¹⁾ Цилиндр — это декартово произведение окружности на прямую, отсюда такое «мудреное» обозначение.

²⁾ Весьма беглое рассмотрение кривых с постоянными кривизнами в пространствах произвольной размерности я обнаружил на последних шести страницах книжки Ю. А. Аминова «Дифференциальная геометрия и топология кривых». — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. Там имеются две ссылки на статьи французских авторов 30-х годов прошлого века и одна ссылка на русскоязычную книгу 1939 г. — эти работы оказались мне недоступны. В книжке Ю. А. Аминова для исследования кривых с постоянными кривизнами применяется весьма громоздкий метод (рассмотрение уравнений Френе, как системы обыкновенных дифференциальных уравнений), не обладающий наглядностью и желаемой геометрической ясностью. Приводимые далее в этом пункте утверждения перекрывают утверждения из упомянутой книжки и получаются более простыми и наглядными средствами.

и доказательства настоящего пункта целиком являются творчеством автора этой книжки и, возможно, публикуются здесь впервые.

Далее будем считать, что у рассматриваемой кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ все кривизны k_1, k_2, \dots, k_{m-1} постоянны и отличны от нуля, иначе (по теореме о последней кривизне) рассматриваемая кривая лежит в пространстве меньшей размерности. Не нарушая общности рассуждений, кривую $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ всюду далее будем считать кривой единичной скорости. Это значительно упростит технические вычисления.

В процессе изучения кривых с постоянными кривизнами обнаруживается весьма неожиданное явление — вид таких кривых в четно-мерных и нечетно-мерных пространствах существенно различается. (Казалось бы, ну, чем таким принципиальным могут отличаться друг от друга пространства \mathbf{R}^{127} и \mathbf{R}^{128} ?! Оказывается они отличаются видом лежащих в них кривых!) Мы начнем наше рассмотрение с пространств четной размерности.

Теорема 26.1. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, где $m = 2n$, — кривая общего вида единичной скорости с постоянными ненулевыми кривизнами k_1, k_2, \dots, k_{m-1} . Тогда образ $\alpha(I)$ лежит на $(2n - 1)$ -мерной сфере \mathbf{S}^{2n-1} радиуса

$$R = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_2^2 k_4^2 \dots k_{2i}^2}{k_1^2 k_3^2 \dots k_{2i+1}^2}} \quad (\text{при } i = 0 \text{ полагаем } k_0 = 1).$$

Пояснение. Если устройство формулы в формулировке теоремы не сразу укладывается в голове, рассмотрите подробную ее запись при $m = 6$:

$$R = \sqrt{\frac{1}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1^2 k_3^2} + \frac{k_2^2 k_4^2}{k_1^2 k_3^2 k_5^2}}.$$



Таким образом, образ кривой с постоянными кривизнами в четномерном пространстве всегда лежит в ограниченной области этого пространства.

Наблюдение 26.1. Физическая «размерность» выражения, стоящего под знаком корня — (метр)², так как каждая кривизна измеряется в «диоптриях». Таким образом, согласно приведенной формуле, радиус сферы измеряется в метрах. Это весьма правдоподобно.

Доказательство теоремы. Воспользуемся идеей доказательства теоремы о характеристизации окружности из п. 13 (или, если угодно, конструкцией эволюты данной кривой).

Допустим, что кривая $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ действительно лежит на сфере, и попробуем *угадать* центр этой сферы. Для этого попробуем сконструировать пространственный аналог «эволюты» кривой $\alpha(s)$, и потребовать, чтобы эта «эволюта» была точкой — центром сферы. Рассмотрим кривую

$$p(s) = \alpha(s) + \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1} + \xi_m E_m,$$

где все коэффициенты ξ_i будем считать постоянными (вдруг нам повезет и уравнение «эволюты» действительно получится с постоянными коэффициентами!?).

Геометрический смысл выражения для $p(s)$ таков. От точки $\alpha(s)$ на кривой нужно двигаться на расстояние ξ_1 вдоль касательного вектора E_1 , затем — на расстояние ξ_2 вдоль первого нормального вектора E_2 и т. д. В результате мы должны прийти в центр сферы, на которой находится наша кривая $\alpha(s)$ ¹⁾. Конечно, школьная интуиция говорит нам, что для попадания в центр сферы вдоль по касательному вектору E_1 двигаться не надо, т. е. ξ_1 должно, в перспективе, оказаться равным нулю. Но пока мы в этом не уверены и оставим все как есть.

Мы хотим, чтобы точка $p(s)$ оказалась неподвижным центром сферы, т. е. должно выполняться тождество $\dot{p}(s) \equiv 0$. Считаем производную:

$$\dot{p}(s) = \dot{\alpha} + \xi_1 \dot{E}_1 + \xi_2 \dot{E}_2 + \dots + \xi_m \dot{E}_m.$$

Преобразуем выражение для $\dot{p}(s)$, используя уравнения Френе:

$$\begin{aligned} \dot{p}(s) &= E_1 + \xi_1(k_1 E_2) + \xi_2(-k_1 E_1 + k_2 E_3) + \xi_3(-k_2 E_2 + k_3 E_4) + \\ &+ \dots + \xi_{m-1}(-k_{m-2} E_{m-2} + k_{m-1} E_m) + \xi_m(-k_{m-1} E_{m-1}) = \\ &= (1 - \xi_2 k_1) E_1 + (\xi_1 k_1 - \xi_3 k_2) E_2 + \\ &+ (\xi_2 k_2 - \xi_4 k_3) E_3 + \dots + (\xi_{i-1} k_{i-1} - \xi_{i+1} k_i) E_i + \dots + \\ &+ (\xi_{m-2} k_{m-2} - \xi_m k_{m-1}) E_{m-1} + (\xi_{m-1} k_{m-1}) E_m. \end{aligned}$$

Мы получили разложение вектора $\dot{p}(s)$ по базису Френе. Закономерность в коэффициентах этого разложения видна невооруженным глазом.

¹⁾ Тут снова (как и в п. 18) у меня в голове звучит песня «Вдоль по Питерской» со словами «Вдоль по вектору! По касательному...»

Мы хотим, чтобы вектор $\dot{p}(s)$ был нулевым. Это возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты в его разложении по базису равны нулю. Получаем систему обычных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 1 - \xi_2 k_1 &= 0, \\ \xi_1 k_1 - \xi_3 k_2 &= 0, \\ \xi_2 k_2 - \xi_4 k_3 &= 0, \\ \xi_3 k_3 - \xi_5 k_4 &= 0, \\ &\vdots \\ \xi_{m-2} k_{m-2} - \xi_m k_{m-1} &= 0, \\ \xi_{m-1} k_{m-1} &= 0. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

В системе (\spadesuit) неизвестными являются константы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, а постоянные кривизны k_1, k_2, \dots, k_{m-1} нам заданы. Число уравнений в системе (\spadesuit) равно m (четно).

Легко видеть, что полученная система (\spadesuit) распадается на две независимые системы линейных уравнений относительно неизвестных ξ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) по $m/2$ штук уравнений в каждой. Первая подсистема (*система А*) состоит из уравнений исходной системы с четными номерами (нумерация уравнений начинается с нуля), вторая подсистема (*система Б*) состоит из уравнений с нечетными номерами:

«Четные» — система А	«Нечетные» — система Б
$1 - \xi_2 k_1 = 0,$	$\xi_1 k_1 - \xi_3 k_2 = 0,$
$\xi_2 k_2 - \xi_4 k_3 = 0,$	$\xi_3 k_3 - \xi_5 k_4 = 0,$
$\xi_4 k_4 - \xi_6 k_5 = 0,$	\vdots
\vdots	$\xi_{m-3} k_{m-3} - \xi_{m-1} k_{m-2} = 0,$
$\xi_{m-2} k_{m-2} - \xi_m k_{m-1} = 0.$	$\xi_{m-1} k_{m-1} = 0.$

Рассмотрим сначала систему Б. Эта система всегда совместна, так как является однородной. Ее определитель отличен от нуля:

$$\det \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 & -k_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{m-1} \end{bmatrix} \neq 0,$$

следовательно, система Б имеет единственное решение — нулевое:

$$\xi_1 = \xi_3 = \dots = \xi_{m-1} = 0.$$



Наши ожидания, что для попадания из точки $\alpha(s)$ в центр сферы вдоль по касательному вектору E_1 двигаться не надо, оправдались с лихвой. Оказывается, не придется двигаться и вдоль векторов E_3, E_5, \dots , т. е. вдоль всех базисных векторов с нечетными номерами.

Рассмотрим теперь систему А. Из уравнений системы А следовательно находим:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{k_1}, \\ \xi_4 &= \frac{k_2}{k_1 k_3}, \\ \xi_6 &= \frac{k_2 k_4}{k_1 k_3 k_5}, \\ &\vdots \\ \xi_m &= \frac{k_2 k_4 \dots k_{m-2}}{k_1 k_3 k_5 \dots k_{m-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при четном m исходная система (\spadesuit) оказалась совместной. Нам удалось подобрать такие постоянные коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ в выражении

$$p(s) = \alpha(s) + \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1} + \xi_m E_m,$$

что $\dot{p}(s) \equiv 0$. Это означает, что $p(s) \equiv p_0 = \text{const}$. Нам крупно повезло! Вектор

$$r = \frac{1}{k_1} E_2 + \frac{k_2}{k_1 k_3} E_4 + \frac{k_2 k_4}{k_1 k_3 k_5} E_6 + \dots + \frac{k_2 \dots k_{m-2}}{k_1 k_3 \dots k_{m-1}} E_m,$$

будучи отложенным от произвольной точки кривой $\alpha(s)$ (т. е. $\forall s \in I$), всегда приводит в одну и ту же неподвижную точку p_0 . Длина R вектора r постоянна вследствие постоянства всех кризизн:

$$\begin{aligned} R &= |r| = |p_0 - \alpha(s)| = \\ &= \left| \frac{1}{k_1} E_2 + \frac{k_2}{k_1 k_3} E_4 + \frac{k_2 k_4}{k_1 k_3 k_5} E_6 + \dots + \frac{k_2 \dots k_{m-2}}{k_1 k_3 \dots k_{m-1}} E_m \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\left\langle \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k_2 k_4 \dots k_{2i}}{k_1 k_3 \dots k_{2i+1}} E_{2i+2} \right); \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k_2 k_4 \dots k_{2i}}{k_1 k_3 \dots k_{2i+1}} E_{2i+2} \right) \right\rangle} = \\
 &= \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_2^2 k_4^2 \dots k_{2i}^2}{k_1^2 k_3^2 \dots k_{2i+1}^2}}.
 \end{aligned}$$

Это означает, что каждая точка кривой $\alpha(s)$ находится на расстоянии R от точки p_0 , т.е. кривая $\alpha(s)$ лежит на сфере S^{2n-1} с центром в точке p_0 и радиусом

$$R = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_2^2 k_4^2 \dots k_{2i}^2}{k_1^2 k_3^2 \dots k_{2i+1}^2}}.$$

Теорема доказана. ◆



Наблюдение 26.2. В случае пространства \mathbf{R}^{2n+1} нечетной размерности, $m = 2n + 1$, система (♠), возникшая при доказательстве теоремы, оказывается несовместной. Действительно, в случае нечетного числа уравнений, последнее уравнение $\xi_{m-1} k_{m-1} = 0$ системы (♠) имеет четный номер, т.е. находится в подсистеме А и противоречит предыдущим уравнениям подсистемы А, из которых следует, что $\xi_{m-1} = \frac{k_2 k_4 \dots k_{m-3}}{k_1 k_3 \dots k_{m-2}} \neq 0$. Сказанное означает, что в нечетномерном пространстве нам не удастся подобрать такие постоянные коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, чтобы точка

$$p(s) = \alpha(s) + \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1} + \xi_m E_m$$

была неподвижной. Это, в свою очередь, означает, что в нечетномерном пространстве кривая $\alpha(s)$ с постоянными кривизнами не может лежать на сфере.

Определение 26.1. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ — произвольная кривая единичной скорости в пространстве четной размерности, $k_1(s), \dots, k_{m-1}(s)$ — ее кривизны (не обязательно постоянные!). Кривую

$$p(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_1} E_2 + \frac{k_2}{k_1 k_3} E_4 + \frac{k_2 k_4}{k_1 k_3 k_5} E_6 + \dots + \frac{k_2 \dots k_{m-2}}{k_1 k_3 \dots k_{m-1}} E_m$$

назовем *пространственной эволютой* кривой $\alpha(s)$.



Векторы репера Френе с четными номерами E_2, E_4, \dots, E_m предлагаю называть *главными* (или *существенными*) *нормальями*. Очевидно, что пространственная эволюта всегда лежит в подпространстве, порожденном главными нормальями кривой.



Упражнение 26.2. Докажите, что пространственная эволюта является огибающей семейства главных нормалей кривой.

Упражнение 26.3. Докажите, что главные нормали эволюты $p(s)$ кривой $\alpha(s)$ направлены вдоль векторов E_1, E_3, \dots, E_{m-1} репера Френе кривой $\alpha(s)$, т. е. векторы E_1, E_3, \dots, E_{m-1} играют роль касательных векторов к кривой $\alpha(s)$!

Определение 26.2. Сферу S^{2n-1} , заданную в пространстве R^{2n} уравнением $R = |z - p|$, назовем *соприкасающейся* к кривой $\alpha(s) : I \rightarrow R^{2n}$ в точке $s_0 \in I$, если в этой точке она имеет касание с кривой порядка не ниже $2n$. Центр p соприкасающейся сферы назовем *центром кривизн* кривой $\alpha(s) : I \rightarrow R^{2n}$ в точке $s_0 \in I$, радиус R соприкасающейся сферы назовем *радиусом кривизн* кривой $\alpha(s) : I \rightarrow R^{2n}$ в точке $s_0 \in I$.



Упражнение 26.4. Докажите, что пространственная эволюта кривой $\alpha(s) : I \rightarrow R^{2n}$ в четномерном пространстве является множеством центров кривизн этой кривой.

Перейдем теперь к рассмотрению кривых с постоянными кривизнами в пространствах R^{2n+1} нечетной размерности.

Определение 26.3. Множество всех точек евклидова пространства R^{2n+1} , лежащих на заданном расстоянии R от некоторой фиксированной прямой $p = p_0 + s\vec{a}$ (p_0 — начальная точка, \vec{a} — направляющий вектор) будем называть *(2n)-мерным цилиндром* радиуса R и обозначать через $R \times S^{2n-1}$. Прямую $p = p_0 + s\vec{a}$ при этом естественно называть *осью цилиндра* $R \times S^{2n-1}$.

Теорема 26.2. Пусть $\alpha : I \rightarrow R^m$, где $m = 2n + 1$, — кривая общего вида и единичной скорости с постоянными ненулевыми кривизнами k_1, k_2, \dots, k_{m-1} . Тогда образ $\alpha(I)$ лежит на $(2n)$ -мерном цилиндре $R \times S^{2n-1}$ радиуса

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_{2i}^2},$$

где совокупность чисел $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \dots, \xi_{2n}$ является (однозначно определяемым!) решением крамеровской системы линейных

уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{bmatrix} -(k_1^2 + k_2^2) & k_2 k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 k_3 & -(k_3^2 + k_4^2) & k_4 k_5 & \cdots & 0 \\ 0 & k_4 k_5 & -(k_5^2 + k_6^2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \cdots & k_{m-3} k_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{m-3} k_{m-2} & -(k_{m-2}^2 + k_{m-1}^2) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_4 \\ \xi_6 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

Кроме того, точка $\alpha(s)$ натурально параметризованной кривой $\alpha(s) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ при неограниченном возрастании параметра $s \in \mathbf{R}$ уходит по направлению оси цилиндра в бесконечность. Образ $\alpha(\mathbf{R})$ кривой $\alpha(s)$ не может целиком лежать ни в какой ограниченной области пространства \mathbf{R}^m .

Пояснение. Не знаю, хорошо это или плохо, но так уж устроена природа, что в случае нечетной размерности указать красивую общую формулу для радиуса цилиндра (наподобие формулы для радиуса сферы в четномерном пространстве) просто невозможно. Я приведу в процессе доказательства конструкцию формулы для радиуса цилиндра через заданные кривизны, но она столь громоздка, что помещать ее в формулировку теоремы просто нецелесообразно. В формулировке теоремы оказывается проще задать коэффициенты $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \dots, \xi_{2n}$ с помощью системы линейных уравнений.

Чтобы почувствовать, насколько затейливо выражается радиус цилиндра через данные кривизны, приведу явные итоговые формулы в случае пространств размерностей три и пять:

Размерность $m = 3$:

$$R = \sqrt{\xi_2^2} = \sqrt{\frac{k_1^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2}} = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Размерность $m = 5$:

$$R = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_4^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{k_1(k_3^2 + k_4^2)}{(k_1^2 + k_2^2)(k_3^2 + k_4^2) - k_2^3 k_3^2}\right)^2 + \left(\frac{k_1 k_2 k_3}{(k_1^2 + k_2^2)(k_3^2 + k_4^2) - k_2^3 k_3^2}\right)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{k_1^2 k_2^2 k_3^2 + k_1^2 (k_3^2 + k_4^2)^2}}{k_1^2 k_3^2 + k_1^2 k_4^2 + k_2^2 k_4^2}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Допустим, что кривая $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ действительно лежит на цилиндре. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, попробуем *угадать* ось $p(s) = p_0 + s \vec{a}$ этого цилиндра (вектор \vec{a} — постоянный!). Возьмем

$$\begin{aligned}
p(s) &= \alpha(s) + \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1} + \xi_m E_m, \\
m &= 2n + 1.
\end{aligned}$$

Мы хотим подобрать такие постоянные коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, чтобы точка $p(s)$ всегда ($\forall s \in I$) лежала на оси цилиндра, т. е. кривая $p(s)$ являлась бы прямой. Для этого должно выполняться тождество $\dot{p}(s) \equiv \vec{a}$, то есть $\ddot{p}(s) \equiv 0$.

Пусть, как обычно, $\mathbf{X} = [E_1, E_2, \dots, E_m]$ — ортогональная матрица из векторов базиса Френе, ω — постоянная матрица кривизн для кривой $\alpha(s)$, $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot \omega$ — уравнения Френе для кривой $\alpha(s)$, $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — вектор-столбец искомых коэффициентов. Тогда, очевидно:

$$\begin{aligned}
p(s) &= \alpha(s) + \mathbf{X} \cdot \xi, \\
\dot{p}(s) &= E_1 + \dot{\mathbf{X}} \cdot \xi = E_1 + \mathbf{X} \cdot \omega \cdot \xi
\end{aligned}$$

— эти вычисления в развернутом виде мы проделали при доказательстве предыдущей теоремы (после чего решали систему линейных уравнений $\mathbf{X} \cdot \omega \cdot \xi = E_1$, которую обозначили в предыдущем доказательстве через (\spadesuit)). Дифференцируем далее:

$$\ddot{p}(s) = k_1 E_2 + \mathbf{X} \cdot \omega^2 \cdot \xi.$$

Значит, должно выполняться тождество

$$k_1 E_2 + \mathbf{X} \cdot \omega^2 \cdot \xi \equiv 0. \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Это — система из $m = 2n + 1$ штук обычных линейных уравнений, в которой неизвестными являются коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Вот ее запись в развернутом виде (сознаюсь,

для ее получения мне потребовалось около часа утомительных вычислений и два часа раздумий — на верном ли я пути?):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\xi_1 k_1^2 + \xi_3 k_1 k_2 = 0, \\ -\xi_2 (k_1^2 + k_2^2) + \xi_4 k_2 k_3 = -k_1, \\ \xi_1 k_1 k_2 - \xi_3 (k_2^2 + k_3^2) + \xi_5 k_3 k_4 = 0, \\ \xi_2 k_2 k_3 - \xi_4 (k_3^2 + k_4^2) + \xi_6 k_4 k_5 = 0, \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \xi_{m-4} k_{m-4} k_{m-3} - \xi_{m-2} (k_{m-3}^2 + k_{m-2}^2) + \xi_m k_{m-2} k_{m-1} = 0, \\ \xi_{m-3} k_{m-3} k_{m-2} - \xi_{m-1} (k_{m-2}^2 + k_{m-1}^2) = 0, \\ \xi_{m-2} k_{m-2} k_{m-1} - \xi_m k_{m-1}^2 = 0. \end{array} \right. \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Система ($\spadesuit\spadesuit$) снова (как и система (\spadesuit) из доказательства предыдущей теоремы) распадается на две независимые системы линейных уравнений. Уравнения с нечетными номерами образуют систему А, уравнения с четными номерами составляют систему Б, при этом число нечетных уравнений равно $(n + 1)$, число четных уравнений равно n .

Рассмотрим сначала систему Б. Это — неоднородная система из n линейных уравнений. Вот ее запись в развернутом матричном виде (именно она приведена в формулировке теоремы):

$$\left[\begin{array}{cccccc} -(k_1^2 + k_2^2) & k_2 k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 k_3 & -(k_3^2 + k_4^2) & k_4 k_5 & \cdots & 0 \\ 0 & k_4 k_5 & -(k_5^2 + k_6^2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \cdots & k_{m-3} k_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{m-3} k_{m-2} & -(k_{m-2}^2 + k_{m-1}^2) \end{array} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_4 \\ \xi_6 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Докажем, что определитель Δ_{2n} этой системы отличен от нуля, т. е. эта система является крамеровской. Тем самым мы докажем, что этой системой «четные» коэффициенты $\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2n}$ определяются однозначно.

Рассмотрим последовательность определителей $\Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{2i}, \dots$, соответствующих системам Б для пространств $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^5, \dots, \mathbf{R}^{2i+1}, \dots$ последовательно возрастающей нечетной размерности. Ясно, что порядок определителя Δ_{2i} равен i .

Наблюдение 26.3. Последовательность определителей $\Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{2i}, \dots$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta_{2i} = -\Delta_{2i-2}(k_{2i-1}^2 + k_{2i}^2) - \Delta_{2i-4}(k_{2i-2}^2 k_{2i-1}^2), \quad i = 2, 3, 4, \dots,$$

с начальными условиями $\Delta_0 = 1, \Delta_2 = -(k_1^2 + k_2^2)$.

Доказательство. Это, по сути, простое упражнение из задачника И. В. Проскуракова на вычисление определителей методом рекуррентных соотношений. Требуемое соотношение легко получается разложением определителя Δ_{2i} по последнему столбцу. ♦

Наблюдение 26.4. Внимательное разглядывание полученного рекуррентного соотношения позволяет получить развернутое выражение для определителя Δ_{2i} как многочлена от переменных k_1, k_2, \dots, k_{2i} :

$$\Delta_{2i} = (-1)^i \sum k_{j_1}^2 k_{j_2}^2 \cdot \dots \cdot k_{j_{i-1}}^2 k_{j_i}^2, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_i.$$

Определитель Δ_{2i} является суммой всевозможных произведений квадратов переменных. В этой сумме каждое слагаемое содержит в точности i штук сомножителей и в каждом таком сомножителе запрещается появление пары рядом стоящих букв из следующего списка: $k_2 k_3, k_4 k_5, k_6 k_7, \dots, k_{i-3} k_{i-2}$. Легко подсчитать, что число слагаемых в указанной сумме равно $i + 1$. Знак перед суммой определяется четностью порядка определителя. Доказательство этого наблюдения легко проводится методом математической индукции.

Поясняющий пример. Для пространства \mathbf{R}^7 определитель системы Б равен

$$\Delta_6 = (-1)^4 (k_1^2 k_3^2 k_5^2 + k_1^2 k_3^2 k_6^2 + k_1^2 k_4^2 k_6^2 + k_2^2 k_4^2 k_6^2)$$

— в слагаемых отсутствуют пары $k_2 k_3, k_4 k_5$. (Именно это выражение, согласно правилу Крамера, будет стоять в знаменателе формулы для радиуса цилиндра, на котором лежит кривая с постоянными кривизнами в пространстве \mathbf{R}^7 .)

Наблюдение 26.5. При любом i определитель Δ_{2i} отличен от нуля, так как он является суммой произведений квадратов ненулевых кривизн.

Таким образом, система Б всегда имеет единственное решение и коэффициенты $\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2n}$ определяются однозначно.

Следует отметить, что решить систему Б в явном виде весьма затруднительно. Для решения таких специфических трехдиагональных систем, часто возникающих в практических приложениях, придуман специальный итерационный метод — метод прямой и обратной «прогонки». Для каждой конкретной фиксированной размерности $m = 2n + 1$ пространства \mathbf{R}^m он позволяет довольно быстро последовательно вычислить коэффициенты $\xi_{2n}, \xi_{2n-2}, \dots, \xi_2$, которые нам хотелось бы иметь. Однако метод «прогонки», являясь итерационным методом, не дает явных выражений для этих коэффициентов.

Для того чтобы никто не смог упрекнуть меня в отсутствии усердия, приведу явные выражения для коэффициентов $\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2n}$ через заданные кривизны, полученные по правилу Крамера решения системы линейных уравнений (слава богу, столбец свободных членов этой системы содержит всего один элемент, отличный от нуля, что дает возможность легко раскладывать требуемые в правиле Крамера определители именно по этому столбцу!).

Зафиксируем систему Б, выписанную для пространства \mathbf{R}^{2n+1} , и пусть Δ_{2n} — ее определитель фиксированного порядка n . Обозначим через $\Delta_{\xi_{2i}}$ определитель, получающийся из определителя Δ_{2n} выбрасыванием i -го столбца и установкой на его место столбца свободных членов. Согласно формулам Крамера этот определитель необходим для нахождения коэффициента ξ_{2i} :

$$\xi_{2i} = \frac{\Delta_{\xi_{2i}}}{\Delta_{2n}}.$$

Рассмотрим отдельно определитель $\Delta_{\xi_{2i}}$:

$$\Delta_{\xi_{2i}} = \begin{vmatrix} -(k_1^2 + k_2^2) & k_2 k_3 & 0 & \dots & -k_1 & \dots & 0 & 0 \\ k_2 k_3 & -(k_3^2 + k_4^2) & k_4 k_5 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_4 k_5 & -(k_5^2 + k_6^2) & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 k_7 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & k_{m-5} k_{m-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -(k_{m-4}^2 + k_{m-3}^2) & k_{m-3} k_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & k_{m-3} k_{m-2} & -(k_{m-2}^2 + k_{m-1}^2) \end{vmatrix}.$$

↑
 i -й столбец

Раскладывая определитель $\Delta_{\xi_{2i}}$ по i -му столбцу, легко убедиться, что

$$\Delta_{\xi_{2i}} = (-1)^i k_1 k_2 k_3 \dots k_{2i-1} D_{n-i},$$

где D_{n-i} — определитель, получающийся из определителя Δ_{2n} вычеркиванием первых i строк и i столбцов. Поскольку внешне определитель D_{n-i} выглядит точно так же, как и определитель Δ_{2n} системы Б (только D_{n-i} , конечно, меньшего порядка), используя наблюдение 2 легко сразу написать его развернутое выражение как многочлена от переменных $k_{2i+1}, k_{2i+2}, \dots, k_{2n}$:

$$D_{n-i} = (-1)^{n-i} \sum k_{j_{2i+1}}^2 k_{j_{2i+2}}^2 \dots k_{j_{2n-1}}^2 k_{j_{2n}}^2, \\ j_{2i+1} < j_{2i+2} < \dots < j_{2n},$$

— сумма всевозможных произведений квадратов переменных, в которой каждое слагаемое содержит в точности $n - i$ сомножителей и в каждом таком сомножителе запрещается появление пары рядом стоящих букв из следующего списка: $k_{2i+2}k_{2i+3}, k_{2i+4}k_{2i+5}, \dots, k_{2n-3}k_{2n-2}$. Знак выражения определяется четностью порядка определителя D_{n-i} .

Окончательно для коэффициентов $\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2n}$ получаем выражения

$$\xi_{2i} = \frac{\Delta_{\xi_{2i}}}{\Delta_{2n}} = \\ = \frac{(-1)^i k_1 k_2 k_3 \dots k_{2i-1} \cdot (-1)^{n-i} \sum k_{j_{2i+1}}^2 k_{j_{2i+2}}^2 \dots k_{j_{2n-1}}^2 k_{j_{2n}}^2}{(-1)^n \sum k_{l_1}^2 k_{l_2}^2 \dots k_{l_{n-1}}^2 k_{l_n}^2} = \\ = \frac{k_1 k_2 k_3 \dots k_{2i-1} \cdot \sum k_{j_{2i+1}}^2 k_{j_{2i+2}}^2 \dots k_{j_{2n-1}}^2 k_{j_{2n}}^2}{\sum k_{l_1}^2 k_{l_2}^2 \dots k_{l_{n-1}}^2 k_{l_n}^2},$$

где суммы в числителе и знаменателе удовлетворяют оговоренным выше условиям, индекс i пробегает множество $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$n = \frac{m-1}{2}.$$

Уф-ф!

Рассмотрим теперь систему А — «нечетные» уравнения:

$$\begin{bmatrix} -k_1^2 & k_1 k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 k_2 & -(k_2^2 + k_3^2) & k_3 k_4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 k_4 & -(k_4^2 + k_5^2) & k_5 k_6 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_5 k_6 & -(k_6^2 + k_7^2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & k_{2n-1} k_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{2n-1} k_{2n} & -k_{2n}^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \\ \xi_5 \\ \vdots \\ \xi_{2n-1} \\ \xi_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это — однородная система из $(n + 1)$ линейного уравнения. Всякая однородная система является совместной и одно из ее решений — нулевое:

$$\xi_1 = \xi_3 = \dots = \xi_{2n+1} = 0.$$

Очевидно, что ранг системы А не меньше n , так как у матрицы системы А первые n столбцов линейно независимы (ни один из них не может линейно выражаться через предыдущие). Таким образом, пространство решений системы А может быть, самое большее, одномерным.

Рассмотрим матрицу кривизн ω . Известно, что определитель всякой кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю — чтобы убедиться в этом, транспонируйте определитель (снова упражнение из задачника И. В. Проскурякова). Определитель матрицы является свободным членом ее характеристического многочлена. Это означает, что число ноль является корнем характеристического многочлена матрицы ω . Таким образом, у матрицы ω имеется нулевое собственное значение и соответствующий этому значению собственный вектор

$$h = {}^t(C_1, C_2, C_3, \dots, C_m), \quad C_j = \text{const} \in \mathbf{R}.$$

С другой стороны, очевидно, что у матрицы кривизн ω первые $m - 1$ столбцов линейно независимы (ни один из них не

может линейно выражаться через предыдущие). Следовательно, $\text{rank}(\omega) = m - 1$, $\text{Ker}(\omega) = \langle h \rangle$ и указанный собственный вектор h , отвечающий нулевому собственному значению, — единственный с точностью до постоянного множителя.

Очевидно, что указанный вектор h является и собственным вектором матрицы ω^2 , также отвечающим нулевому собственному значению, т. е.

$$\omega^2 \cdot h = 0.$$

Это означает, что вектор h является решением однородной системы $\mathbf{X} \cdot \omega^2 \cdot \xi = 0$, т. е. его координаты с нечетными номерами являются решениями однородной системы A (ведь уравнения с нечетными номерами из системы $\mathbf{X} \cdot \omega^2 \cdot \xi = 0$ как раз и составляют систему A).

Итак,

$$(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2n+1}) = (\lambda C_1, \lambda C_3, \dots, \lambda C_{2n+1}), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

— общее решение системы A .

Теперь, когда мы нашли по отдельности решения систем A и B , нетрудно составить общее решение исходной линейной неоднородной системы ($\spadesuit\spadesuit$). Вот оно:

$$\xi = {}^t(\lambda C_1, \xi_2, \lambda C_3, \xi_4, \lambda C_5, \dots, \xi_{2n}, \lambda C_{2n+1}).$$

Если мы зафиксируем какое-нибудь конкретное значение λ , то станет видно, что нам опять повезло! Мы смогли подобрать такие постоянные коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ в выражении

$$p(s) = \alpha(s) + \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1} + \xi_m E_m,$$

что $\ddot{p}(s) \equiv 0$. Это означает, что $\dot{p}(s) \equiv \vec{a} = \text{const}$ и $p(s) = p_0 + s \vec{a}$ — прямая, длина отрезка которой от начальной точки до точки $p(s)$ прямо пропорциональна длине дуги кривой $\alpha(s)$.

Вектор

$$r = p(s) - \alpha(s) = \lambda C_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \lambda C_3 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1} + \lambda C_m E_m,$$

будучи отложенным от произвольной точки кривой $\alpha(s)$, всегда (т. е. $\forall s \in I, \forall \lambda \in \mathbf{R}$) приводит на одну и ту же прямую — ось цилиндра!

Длина вектора r постоянна (при фиксированном λ) и равна

$$|r| = \sqrt{\lambda^2 C_1^2 + \xi_2^2 + \lambda C_3^2 + \dots + \xi_{m-1}^2 + \lambda^2 C_m^2}.$$

Очевидно, что длина вектора r минимальна при $\lambda = 0$, т. е. радиус R искомого цилиндра равен

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_{2i}^2}.$$

Направляющим вектором оси цилиндра служит вектор, имеющий в любой момент $s \in I$ в базисе Френе кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ координаты

$$\vec{a} = (C_1, 0, C_3, 0, \dots, 0, C_m).$$

В качестве начальной точки оси цилиндра в пространстве \mathbf{R}^m можно взять произвольную точку вида

$$p_0 = \alpha(s_0) + \xi_0,$$

где $\xi_0 = {}^i(0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \dots, \xi_{2n}, 0)$ — частное решение системы ($\spadesuit\spadesuit$) при $\lambda = 0$. Тогда уравнение оси цилиндра в репере Френе, зафиксированном в любой момент $s \in I$, можно записать в виде

$$p = \xi_0 + \lambda \vec{a}.$$

Наконец, при $\lambda = 0$ вектор

$$r_0(s) = \xi_2 E_2 + \xi_4 E_3 + \dots + \xi_{m-1} E_{m-1}$$

является кратчайшим из всех векторов, соединяющих точку $\alpha(s)$ на кривой с осью цилиндра, следовательно, он перпендикулярен оси цилиндра. Уравнение кривой $\alpha(s)$ можно записать следующим образом:

$$\alpha(s) = p(s) - r_0(s) = p_0 + s \vec{a} - r_0(s),$$

так как $\dot{p}(s) \equiv \vec{a} = \text{const}$ и $p(s) = p_0 + s \vec{a}$. «Художественный образ» этого уравнения таков: вектор постоянной длины $(-r_0(s))$ прикреплен своим началом к прямой. Он все время перпендикулярен этой прямой и его начало движется по этой прямой равномерно, с постоянной скоростью \vec{a} . При своем движении вектор $(-r_0(s))$ вращается вокруг прямой и его конец описывает кривую $\alpha(s)$. Это означает, что кривая $\alpha(s) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ с неограниченно изменяющимся параметром s (длиной дуги) «уходит» по направлению прямой $p(s)$ в бесконечность и не может оставаться в ограниченной области пространства \mathbf{R}^m .

Теорема доказана. \blacklozenge

Позвольте закончить на этом настоящий пункт, получившийся весьма длинным и непростым. Вместе с этим пунктом заканчивается и первая глава нашей книжки — мы расстаемся с красивой теорией кривых в аффинных пространствах и грусть расставания готова коснуться нашего сердца. Но не надо грустить! Впереди нас ждет новая и не менее интересная глава — теория поверхностей.

Глава II. Поверхности

§ 5. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

27. Дифференциал гладкого отображения

Снова перед вами — пункт-воспоминание. Материал этого пункта, по сути, уже знаком вам из курсов алгебры и математического анализа, поэтому он не является невообразимо сложным для восприятия. Основная трудность этого пункта — новая терминология и новые обозначения. Одна из целей дальнейшего изложения — поработать с известными понятиями на специфическом языке дифференциальной геометрии, чтобы привыкнуть к удобной терминологии. Будьте, пожалуйста, внимательны и, при необходимости, проговаривайте («переводите») непривычные фрагменты дальнейшего текста «своими привычными и понятными словами».

Пусть $U \subseteq \mathbf{R}^n$ — область, т. е. открытое связное множество; $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — некоторое отображение. Пусть $u \in U$ — точка и $u = {}^t(u^1, u^2, \dots, u^n)$ — ее координаты (столбец!) в стандартном репере. Внимание! Сейчас я первый и последний раз напишу подробно (в координатной форме), что означают слова «отображение из области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ в аффинное пространство \mathbf{R}^m »:

$$\begin{aligned} f(u) &= {}^t(f^1(u), f^2(u), \dots, f^m(u)) = \\ &= {}^t(f^1(u^1, u^2, \dots, u^n), f^2(u^1, u^2, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, u^2, \dots, u^n)). \end{aligned}$$

Определение 27.1. Функции $f^i : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ называются *координатными функциями отображения* $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

В том случае, когда все координатные функции $f^i : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ указаны в явном виде, будем говорить, что имеется *параметрическое задание* (или *параметризация*) отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Определение 27.2. Отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *гладким*, если у каждой его координатной функции

$f^i : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ существуют и непрерывны все возможные частные производные (сколь угодно высокого порядка k):

$$\frac{(\partial f^i)^k}{(\partial u^{i_1})^{k_1} (\partial u^{i_2})^{k_2} \dots (\partial u^{i_l})^{k_l}},$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_l = k$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Если вдруг возникнет нужда в более тонкой классификации гладких отображений (чего в жизни не бывает!), то условимся говорить, что отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ принадлежит классу гладкости C^k , если у каждой его координатной функции существуют и непрерывны все возможные частные производные до k -го порядка включительно.

Пусть $u_0 = (u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n) \in U \subseteq \mathbf{R}^n$ — некоторая фиксированная точка области U .

Определение 27.3. Предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^{i-1}, u_0^i + h, u_0^{i+1}, \dots, u_0^n) - f(u_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0),$$

если он существует, называется *частной производной отображения* $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ в точке $u_0 \in U$.



Наблюдение 27.1. Числитель дроби, стоящей под знаком предела — разность между точками аффинного пространства \mathbf{R}^m . Это значит, что частная производная — это вектор-столбец из пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$!

Договоримся обозначать далее частную производную отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ в точке $u_0 \in U$ одним из следующих способов:

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0) = f_{u^i}(u_0) = f_i(u_0) = \partial_i f(u_0) = f_{u^i}|_{u_0}.$$



Наблюдение 27.2. Рассмотрим кривую $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ вот с такой параметризацией:

$$\alpha(t) = f(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^{i-1}, t, u_0^{i+1}, \dots, u_0^n).$$

Образ этой кривой лежит в образе $f(U)$ отображения f . Совершенно очевидно, что

$$f_{u^i}(u_0) = \dot{\alpha}(u_0^i),$$

т.е. частная производная есть *касательный вектор* к кривой $\alpha(t)$. Именно поэтому в следующих пунктах мы будем называть векторы частных производных (а также их линейные комбинации) *касательными векторами к отображению* $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.



Определение 27.4. Пусть точка u_0 — предельная для области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется дифференцируемым в точке $u_0 \in U$, если в некоторой окрестности $O(u_0)$ точки u_0 приращение $f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0)$ отображения f можно представить в виде

$$f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0) = D_{u_0}(\vec{h}) + o(u_0, \vec{h}),$$

где:

- 1) \vec{h} — произвольный вектор из пространства $\vec{\mathbf{R}}^n$ такой, что $u_0 + \vec{h} \in O(u_0)$;
- 2) D_{u_0} — линейный оператор, действующий из $\vec{\mathbf{R}}^n$ в $\vec{\mathbf{R}}^m$ (главная, или линейная, часть отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$);
- 3) $|o(u_0, \vec{h})| \rightarrow 0$, при $|\vec{h}| \rightarrow 0$.

Вот изумительный рис. 27.1, который иллюстрирует это важнейшее определение:

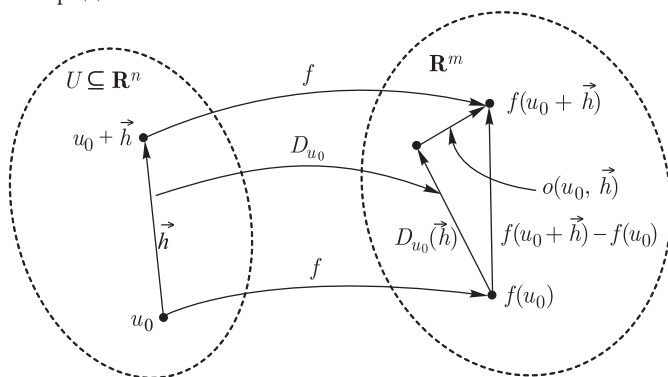


Рис. 27.1

На рис. 27.1 видно, что отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ переводит точки пространства \mathbf{R}^n в точки пространства \mathbf{R}^m . Ясно, что разность между точками $f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0)$ является вектором из пространства $\vec{\mathbf{R}}^m$. Видно, что линейный оператор D_{u_0} берет вектор \vec{h} из пространства $\vec{\mathbf{R}}^n$ и делает из него вектор $D_{u_0}(\vec{h})$, лежащий в пространстве $\vec{\mathbf{R}}^m$, который отличается от вектора $f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0)$ на небольшую величину $o(u_0, \vec{h}) \in \vec{\mathbf{R}}^m$.

Сейчас мы уточним «откуда и куда» действует линейный оператор D_{u_0} , соответствующий дифференцируемому отображе-

нию f . Для этого нам придется освоить несколько очень важных понятий и запомнить их общеупотребительные названия.

Определение 27.5. Множество всех векторов пространства $\vec{\mathbf{R}}^n$, отложенных от точки $p \in \mathbf{R}^n$, называется *касательным пространством к \mathbf{R}^n в точке $p \in \mathbf{R}^n$* и обозначается через $T_p\mathbf{R}^n$.

Посмотрите на рис. 27.2. Он является посильной иллюстрацией автора к только что данному определению.

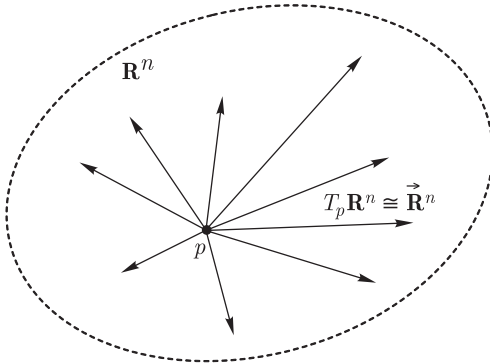


Рис. 27.2



Очевидно, что $T_p\mathbf{R}^n$ — центроаффинное пространство (см. п. 7), т. е. оно является векторным пространством (состоит только из векторов!). Имеет место очевидный изоморфизм

$$T_p\mathbf{R}^n \cong \vec{\mathbf{R}}^n.$$

Из наличия этого изоморфизма следует, в частности, что $\dim T_p\mathbf{R}^n = n$.

Обозначение T_p происходит, как обычно, от первой буквы латинского слова *tangential* — «касательный», а сам термин объясняется очень просто.



Факт 27.1, очевидный. Касательное пространство $T_p\mathbf{R}^n$ состоит в точности из всех векторов, касательных в точке $p \in U \subseteq \mathbf{R}^n$ ко всевозможным кривым $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, проходящим через точку $p \in U$.

Действительно, совершенно очевидно, что всякий касательный вектор в точке $p \in \mathbf{R}^n$ к кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ лежит в $T_p\mathbf{R}^n$.

Обратно, если $\vec{a} \in T_p\mathbf{R}^n$, то вектор \vec{a} обязательно является касательным вектором к некоторой кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, проходящей через точку $p \in U$ (например, к прямой $\alpha(t) = p + t\vec{a}$).

Для справедливости отмеченного факта очень важна **открытость** области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ — продумайте это обстоятельство самостоятельно, подключив к работе немного фантазии и свой головной мозг.¹⁾

Определение 27.6. Множество всех векторов, касательных в точке $p \in U \subseteq \mathbf{R}^n$ ко всевозможным кривым $\alpha : I \rightarrow U \subseteq \mathbf{R}^n$, проходящим через точку $p \in U$ и **целиком лежащих** в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, называется *касательным пространством к области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ в точке $p \in U$* и обозначается через $T_p U$.

Это определение позволяет совсем уж тонко отличать центроаффинное пространство $T_p \mathbf{R}^n$ (как множество всех векторов, выходящих из точки $p \in \mathbf{R}^n$) от множества всех *касательных* векторов к всевозможным кривым, проходящим через точку $p \in U$. Мы, однако, прекрасно понимаем, что если область $U \subseteq \mathbf{R}^n$ открыта, то $T_p \mathbf{R}^n \cong T_p U$.

Теперь, когда мы познакомились с нужными понятиями, можно точно сказать «откуда и куда» действует линейный оператор D_{u_0} — главная (линейная) часть дифференцируемого отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.



Факт 27.2. Линейный оператор D_{u_0} действует из векторного пространства $T_{u_0} \mathbf{R}^n$ в векторное пространство $T_{f(u_0)} \mathbf{R}^m$ (смотри еще раз рис. 27.1):

$$D_{u_0} : T_{u_0} \mathbf{R}^n \rightarrow T_{f(u_0)} \mathbf{R}^m,$$

или, если угодно,

$$D_{u_0} : T_{u_0} U \rightarrow T_{f(u_0)} \mathbf{R}^m.$$



Определение 27.7. Линейный оператор $D_{u_0} : T_{u_0} \mathbf{R}^n \rightarrow T_{f(u_0)} \mathbf{R}^m$ называется *дифференциалом отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$* и обозначается одним из следующих способов:

$$D_{u_0} = Df(u_0) = d_{u_0} f = df_{u_0}.$$

Для чего нужен дифференциал? Сразу открою вам секрет. Фактически, все дальнейшие рассмотрения локальных свойств отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ основываются на одной генеральной

¹⁾ Пофантазируйте, что может случиться, если область U будет, например, замкнутой, а точка p — граничной? Какие кривые тогда будут проходить через точку p ?

идее, берущей свое начало еще от Ньютона и Лейбница. Мы будем заменять приращение отображения f (в окрестности точки u_0) его главной линейной частью, т. е. дифференциалом df_{u_0} . Это означает, что вместо «сложного и непонятного» отображения f нам предстоит изучать более простой объект — линейный оператор df_{u_0} . А линейные операторы нам не страшны — для их изучения у нас есть мощные орудия линейной алгебры. Плотворность этого генерального замысла станет ясна уже очень скоро.

Пусть $p \in U \subseteq \mathbf{R}^n$. Договоримся до конца этого пункта векторы из $T_p \mathbf{R}^n$ (или $T_p U$) снабжать при обозначении стрелками, а векторы из $T_{f(p)} \mathbf{R}^m$ писать без стрелок (чтобы каждый раз визуально различать векторы из образа и прообраза дифференциала).

Найдем матрицу оператора df_{u_0} . Пусть $\vec{h} = {}^t(h^1, h^2, \dots, h^n)$. Вычисляем, используя формулу Тейлора:

$$\begin{aligned}
 f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0) &= \begin{pmatrix} f^1(u_0 + \vec{h}) - f^1(u_0) \\ f^2(u_0 + \vec{h}) - f^2(u_0) \\ \vdots \\ f^m(u_0 + \vec{h}) - f^m(u_0) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial u^i} h^i + o^1(\vec{h}) \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^2}{\partial u^i} h^i + o^2(\vec{h}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial u^i} h^i + o^m(\vec{h}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial u^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial u^1} & \frac{\partial f^m}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{bmatrix} + o(\vec{h}).
 \end{aligned}$$

Здесь все частные производные вычислены в точке $u_0 \in U$. Видно, что

$$[df_{u_0}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial u^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial u^1} & \frac{\partial f^m}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{bmatrix} = [f_{u^1}(u_0), f_{u^2}(u_0), \dots, f_{u^n}(u_0)].$$

Эта матрица называется *матрицей Якоби* или *производной* отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Употребительны также следующие обозначения для матрицы Якоби:

$$[df_{u_0}] = [D_{u_0}] = f'(u_0).$$



Запомните хорошенько: матрица дифференциала df_{u_0} — это матрица Якоби, столбцы которой суть векторы частных производных отображения f . Знание этого факта избавит вас от излишнего напряжения при понимании дальнейшего материала!



Соглашение. Для удобства применения обозначений Эйнштейна в выражениях типа $f_{u^i}(u_0)$, $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ индекс i принято считать нижним. Не верь глазам своим! Индекс действительно стоит внизу, в знаменателе! А то, что он является верхним индексом у переменной — это «не считается»!

Как найти значение дифференциала для произвольного вектора? Пусть $\vec{x} \in T_p \mathbf{R}^n$. Тогда $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ — стандартный базис пространства \mathbf{R}^n . Имеем

$$df_p(\vec{x}) = [f_{u^1}(p), \dots, f_{u^n}(p)] \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = x^i f_{u^i}(p).$$

Таким образом, дифференциал переводит всякий вектор $\vec{x} \in T_p \mathbf{R}^n$ в линейную комбинацию частных производных, коэффициентами которой являются координаты исходного вектора.

В силу традиции, сложившейся в математическом анализе, координаты простого и понятного вектора $\vec{h} \in T_p \mathbf{R}^n$ (имеющего смысл «приращения аргумента» в пространстве \mathbf{R}^n — см. рис. 27.1) часто обозначают довольно сложным образом:

$$h^i = du^i.$$

Поэтому в некоторых книжках я встречал даже такую запись:

$$df_{u_0}(\vec{h}) = f_{u^i}(u_0) du^i$$

— в правой части этого равенства в линейной комбинации $f_{u^i}(u_0) du^i$ коэффициенты (числа) du^i написаны не перед век-

торами $f_{u^i}(u_0)$, где их обычно принято писать, а после них. Примите эти традиции к сведению, а их прелести мы обсудим чуть позже.



Очень важно! Еще раз обращаю ваше внимание, что, в частности,

$$df_p(\vec{e}_i) = f_{u^i}(p)$$

— дифференциал отображения f переводит векторы стандартного базиса в векторы частных производных отображения f .

Двинемся дальше.

Определение 27.8. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — гладкое отображение, $\alpha(t) : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow U$ — произвольная гладкая кривая. Тогда композиция отображений $\beta = (f \circ \alpha) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ также является гладкой кривой $\beta(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, которую мы будем называть *кривой вдоль отображения f* .

Согласитесь, что термин «кривая вдоль отображения» звучит как-то неестественно и абстрактно (особенно если изображать отображения стрелками, как на рис. 27.1, — тогда в голове может возникнуть совершеннейшая чушь — «кривая вдоль этих стрелок»). В обиходе мы привыкли, что предлоги «вдоль» и «поперек» употребляются применительно к наглядным геометрическим образам, имеющим направление (вдоль прямой, вдоль берега, поперек дороги и т. п.). Отображение f , конечно, не является ни стрелкой, ни рекой, ни дорогой, вдоль которых можно идти. Но именно это словечко «вдоль» оказывается во многих случаях более удобным, нежели конкретно указующие слова, разъясняющие происхождение и месторасположение кривой $\beta(t)$ (типа «кривая, лежащая в образе отображения» или «кривая, имеющая своим прообразом кривую из области определения отображения»). Поэтому мы будем привыкать использовать именно этот термин — «вдоль отображения».



Лемма 27.1. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — дифференцируемое отображение, $p \in U$, кривая $\alpha : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow U$ — гладкая, $\alpha(t_0) = p$ и $\dot{\alpha}(t_0) = \vec{x} \in T_p U$. Если $\beta : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая вдоль отображения f , т. е. $\beta = f \circ \alpha$, то

$$df_p(\vec{x}) = \dot{\beta}(t_0).$$

Эта лемма раскрывает важнейшее свойство дифференциала — всякий касательный вектор он переводит в касательный вектор! Я очень люблю иллюстрировать высказанные утверждения картинками (см. рис. 27.3):

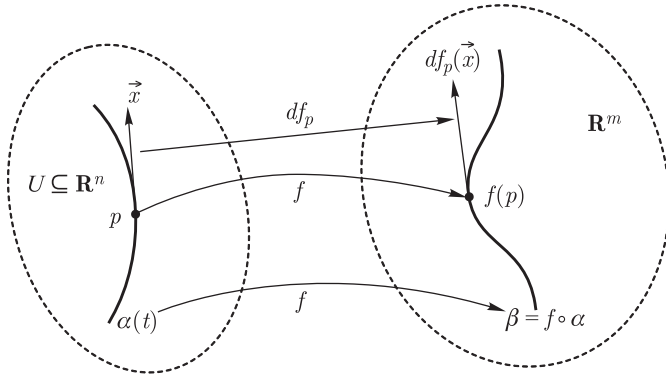


Рис. 27.3

Доказательство. Пусть $\beta(t_0) = f(\alpha(t_0)) = f(p)$. Кривая $\alpha(t)$ — гладкая, значит, для нее можно записать формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(t_0) + \dot{\alpha}(t_0)(t - t_0) + \vec{o}(t - t_0) = \\ &= p + \underbrace{(t - t_0)\vec{x} + \vec{o}(t - t_0)}_{\text{приращение } \alpha(t)}. \end{aligned}$$

Ясно, что события, описываемые этой формулой, разворачиваются в пространстве \mathbf{R}^n .

Посмотрим, что в это время происходит в пространстве \mathbf{R}^m . Отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ дифференцируемо, поэтому

$$\beta(t) = f(\alpha(t)) = f(p) + [df_p] \cdot [(t - t_0)\vec{x} + \vec{o}(t - t_0)] + o_1(t - t_0),$$

где $[df_p]$ — матрица Якоби (матрица дифференциала df_p).

В силу линейности дифференциала

$$\beta(t) = f(p) + (t - t_0)[df_p] \cdot \vec{x} + [df_p] \cdot \vec{o}(t - t_0) + o_1(t - t_0)$$

и, следовательно,

$$\frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} = f'(p) \cdot \vec{x} + \frac{f'(p) \cdot \vec{o}(t - t_0) + o_1(t - t_0)}{t - t_0}.$$

Слагаемое $\frac{f'(p) \cdot \vec{o}(t - t_0) + o_1(t - t_0)}{t - t_0}$ является бесконечно малой величиной (при $t \rightarrow t_0$), следовательно, $\dot{\beta}(t_0) = df_p(\vec{x})$.

Лемма доказана. \blacklozenge

Упражнение 27.1 (контроль качества понимания). Внимательно рассмотрите и растолкуйте запись:

$$df_{\alpha(t_0)}(\dot{\alpha}(t_0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0).$$

Объясните, где и в каком пространстве находятся написанные векторы, в каких точках вычисляются дифференциалы и производные.



Определение 27.9. Пусть $\alpha(t) = p + t\vec{x}$ — прямая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, проходящая через точку $p \in U$ (так как $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = \vec{x}$). Тогда

$$df_p(\vec{x}) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{x}) - f(p)}{t}.$$

Этот предел называется *производной отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ вдоль вектора $\vec{x} \in T_p\mathbf{R}^n$* (или *производной f по направлению \vec{x}*).

Понятие производной отображения по направлению является общеизвестным и весьма пригодится нам в будущих рассмотрениях. А сейчас, в качестве примера на использование производной по направлению, вычислим дифференциал аффинного отображения (преобразования).

Пример 27.1. Пусть $A : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ — аффинное преобразование, т.е. $A(p) = q_0 + Q\vec{p}$, где Q — линейный оператор, \vec{p} — радиус-вектор точки $p \in \mathbf{R}^m$. Найдём дифференциал этого преобразования в точке $p \in \mathbf{R}^m$.

Для любого вектора $\vec{v} \in T_p\mathbf{R}^m$ имеем

$$\begin{aligned} dA_p(\vec{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (A(p + t\vec{v}) - A(p)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Q(\vec{p} + t\vec{v}) - Q(\vec{p})) = Q\vec{v}. \end{aligned}$$

Поскольку это равенство справедливо для любого вектора $\vec{v} \in T_p\mathbf{R}^m$ (т.е. по любому направлению), то получается, что $dA_p = Q$. \blacklozenge

Этот результат имеет далеко идущие следствия. В частности, пусть $U \subseteq \mathbf{R}^m$ — открытая область, $Id_U : U \rightarrow U$ — тождественное отображение. Тождественное отображение, разумеется, является аффинным преобразованием:

$$\forall p \in U \quad Id_U(p) = o + Id_{T_p U} \vec{p}.$$



Это означает, что

$$d(Id_U)_p = Id_{T_p U}$$

— дифференциал тождественного отображения открытой области $U \subseteq \mathbf{R}^m$ аффинного пространства \mathbf{R}^m есть тождественное отображение касательного пространства $T_p U$ (векторного центральноаффинного пространства $T_p \mathbf{R}^m$).



Упражнение 27.2. Объясните еще раз, почему для справедливости предыдущего утверждения так важна открытость области $U \subseteq \mathbf{R}^m$!

Идем далее.

Лемма 27.2.

1. **Цепное правило:** пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbf{R}^m$ и $g : V \subseteq \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ — гладкие отображения, $p \in U$. Тогда

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

2. **Дифференциал обратного отображения:** если отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbf{R}^m$ обратимо, причем $f^{-1} : V \rightarrow U$ — гладкое, то $m = n$ и

$$d(f^{-1})_{f(p)} = (df_p)^{-1}.$$

В матричной записи первое утверждение этой леммы выглядит так:

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

— в правой части равенства стоит произведение матриц Якоби. Второе утверждение леммы в матричной записи имеет вид

$$[d(f^{-1})_{f(p)}] = [(df_p)]^{-1},$$

т. е. матрица дифференциала обратного отображения есть обратная матрица к матрице дифференциала прямого отображения.

Доказательство. 1. Незыблемым фактом мироздания является то, что в открытой области U всегда найдется кривая $\alpha(t)$, проходящая через заданную точку $p \in U$ с заданным касательным вектором $\vec{x} \in T_p U$ (см. рис. 27.4).

Далее предлагаю вам самостоятельно, глядя на рис. 27.4, проговорить доказательство первого утверждения леммы. (Как

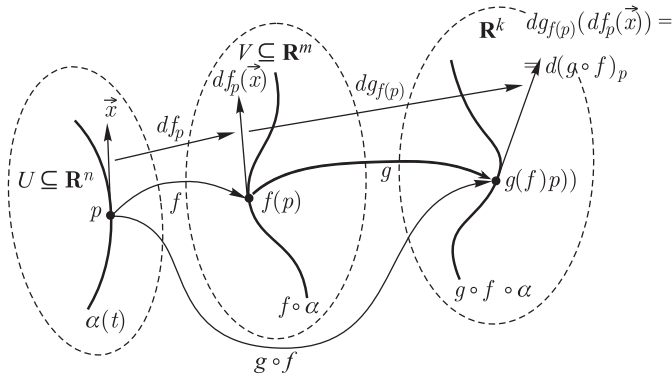


Рис. 27.4

известно, для доказательства какого-либо утверждения древние греки рисовали картинку на песке, а потом говорили собеседнику: «Смотри!». Умный и грамотный собеседник вполне удовлетворялся такой формой доказательства и все понимал сам.)

Согласитесь, что, по сути, рис. 27.4 и является доказательством первой части леммы — цепного правила.

2. Докажем второе утверждение леммы. Имеем

$$f^{-1} \circ f = Id_U$$

— тождественное отображение на области U . Согласно цепному правилу получаем

$$d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p = Id_{T_p \mathbf{R}^n}$$

— тождественный линейный оператор на векторном пространстве $T_p \mathbf{R}^n$. Следовательно, $df_p : T_p \mathbf{R}^n \xrightarrow{\text{на}} T_{f(p)} \mathbf{R}^m$ — гомоморфизм (линейное отображение) векторных пространств, у которого есть обратное отображение. Это означает, что df_p — изоморфизм пространств $T_p \mathbf{R}^n$ и $T_{f(p)} \mathbf{R}^m$. Конечномерные векторные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают, т. е. $m = n$. Кроме того, равенство $d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p = Id_{T_p \mathbf{R}^n}$ в точности означает, что

$$d(f^{-1})_{f(p)} = (df_p)^{-1}.$$

Лемма 2 доказана. ◆

Определение 27.10. Пусть $f : U \rightarrow V$ — гладкое отображение области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ на область V и существует обратное отображение $f^{-1} : V \rightarrow U$, также являющееся гладким. Тогда отображение f называется *диффеоморфизмом (области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ на область V)*.

Термин «диффеоморфизм» относительно молодой, его начали активно употреблять лишь в середине XX в. Он оказался столь удобным, что быстро прижился и стал общеупотребительным — этот термин называет одним словом совершенно естественное понятие гладкого взаимно обратного отображения. Еще раз сформулируем важнейшие свойства диффеоморфизмов.



Следствие из леммы 27.2. Если $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow V$ — диффеоморфизм, то:

- 1) в любой точке $p \in U$ отображение df_p является невырожденным линейным отображением (изоморфизмом) векторного пространства $T_p U$ на векторное пространство $T_{f(p)} V$ (т. е. невырожденным линейным оператором $df_p : T_p \mathbf{R}^n \xrightarrow{\text{на}} T_{f(p)} \mathbf{R}^n$),
- 2) матрица $[df_p]$ линейного оператора df_p (т. е. матрица Якоби отображения f) является квадратной,
- 3) $\det[df_p] \neq 0$ — якобиан отображения f (т. е. определитель квадратной матрицы Якоби) отличен от нуля.

Наш рассказ неумолимо приближается к концу, и нам осталось проговорить в новомодных терминах последнее в этом пункте воспоминание из курса математического анализа. Оказывается, что сформулированное следствие из леммы 27.2 в некотором смысле допускает обращение.

Теорема 27.1 (об обратном отображении). Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — гладкое отображение, U — открытая область и $p \in U$. Если df_p является изоморфизмом векторных пространств $T_p \mathbf{R}^n$ и $T_{f(p)} \mathbf{R}^n$ (т. е. $\det[df_p] \neq 0$), то в области U существует окрестность $O(p)$ точки $p \in U$ такая, что сужение $f|_{O(p)}$ — диффеоморфизм области $O(p)$ на область $f(O(p))$.

Доказательство этой классической теоремы содержится в лекциях по математическому анализу за второй курс. Перечитайте внимательно это доказательство и аккуратно проговорите его, используя нашу новую терминологию.

Определение 27.11. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — произвольное гладкое отображение и сужение $f|_{O(p)}$ на некото-

рую окрестность $O(p)$ точки $p \in U$ является диффеоморфизмом $f|_{O(p)} : O(p) \rightarrow f(O(p))$. Тогда отображение f называют *локальным диффеоморфизмом в точке $p \in U$* .

Видно, что теорема об обратном отображении как раз и утверждает, что если в некоторой точке $p \in U$ якобиан $\det[df_p]$ отличен от нуля, то отображение f является локальным диффеоморфизмом в этой точке.

Наш математический (да и житейский) опыт говорит, что локальное свойство объекта вовсе не обязано являться глобальным свойством — если верблюд желтый в окрестности некоторой своей точки, то он вовсе не обязан быть желтым целиком. Так, и локальный в некоторой точке диффеоморфизм вовсе не обязан глобально являться диффеоморфизмом на всей области определения.

Более того, гладкое отображение бывает устроено гораздо хитрее, чем верблюд. Если верблюд желтый в окрестности *каждой* своей точки, то, очевидно, он является желтым целиком. Однако легко придумать отображение, которое является локальным диффеоморфизмом в окрестности *каждой* точки области определения, но не является диффеоморфизмом глобально. Вот простой пример.

Пример 27.2. Рассмотрим отображение $f : (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданное следующим образом:

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v), \quad u \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad v \in \mathbf{R}.$$

Матрица Якоби отображения $f(u, v)$ такова:

$$[df_p] = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{bmatrix}.$$

Якобиан отображения $f(u, v)$ есть определитель этой матрицы Якоби:

$$\det[df_p] = u \neq 0,$$

т. е. линейный оператор df_p — невырожденный. Это означает, что отображение $f(u, v)$ — локальный диффеоморфизм в любой точке $p \in (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$. Однако отображение $f(u, v)$ (глобально, на всей области определения $U = (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$) никак не может являться диффеоморфизмом, так как оно даже не является взаимно однозначным, и, следовательно, обратного отображения f^{-1} просто не существует!

Задача и упражнение

1. Отображение $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ имеет параметризацию

$$f(u, v, w) = {}^t(u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2v + w^2, uvw).$$

Найдите матрицу $[df_p]$ в произвольной точке $p \in \mathbf{R}^3$. Найдите образ кривой $\alpha(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, bt)$ при отображении f . Найдите результат действия дифференциала df_p на вектор скорости этой кривой в произвольной точке.

28. Определение поверхности.**Касательное пространство. Касательное расслоение**

Пункт с совершенным номером 28 очень важен для понимания всего дальнейшего материала, поэтому его необходимо прочитать предельно внимательно.

Интуитивно, все мы представляем поверхность примерно одинаково — это нечто вроде изогнутого листа бумаги или не очень измятой полиэтиленовой пленки, волшебным образом висящей в пространстве. Формулировка строгого определения поверхности (находящегося в согласии с нашими интуитивными представлениями) наталкивается на те же трудности, что и в случае определения линии (см. п. 11), только более изощренные. Мы не будем сейчас подробно обсуждать эти трудности и сразу дадим определение поверхности. Однако нужно понимать, что такое определение взято не «с потолка», а явилось плодом долгих размышлений многих ученых мужей. Это определение восходит к работам Гаусса, который (в годы своего увлечения геодезией) предложил систематически изучать поверхности, заданные параметрически, т. е. по аналогии с кривыми, считать поверхностью вектор-функцию, но уже не одного, а нескольких аргументов. Постепенно, в силу своих многочисленных преимуществ, такой взгляд на определение поверхности стал господствующим в дифференциальной геометрии — он ясен, нагляден, с ним легко согласилась даже моя теща. Итак, перед вами определение, основанное на идеях Гаусса.

Определение 28.1. Пусть $U \subseteq \mathbf{R}^n$ — открытая связная область. Гладкое отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется n -мерной (элементарной) поверхностью, вложенной в \mathbf{R}^m , если в каждой точке $p \in U$ ранг матрицы Якоби $f'(p)$ отображения f равен n :

$$\text{rang}(f'(p)) = \text{rang}[df_p] = n.$$



Таким образом, поверхность (так же, как и кривая) — это *отображение*! А вот образ этого отображения, т. е. множество точек $f(U)$, будем называть *образом поверхности*. Образ поверхности (как и образ кривой) — геометрический объект.



В том случае, когда все координатные функции $f^i : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ поверхности

$$\begin{aligned} f(u^1, u^2, \dots, u^n) = \\ = t \left(f^1(u^1, u^2, \dots, u^n), f^2(u^1, u^2, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, u^2, \dots, u^n) \right) \end{aligned}$$

указаны в явном виде, будем говорить, что имеется *параметрическое задание* (или *параметризация*) поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

На рис. 28.1 изображен образ двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ берет точки из области $U \subseteq \mathbf{R}^2$, колдует над ними, и в результате получают другие точки, которые трудолюбивое отображение f причудливо развешивает в пространстве \mathbf{R}^3 .

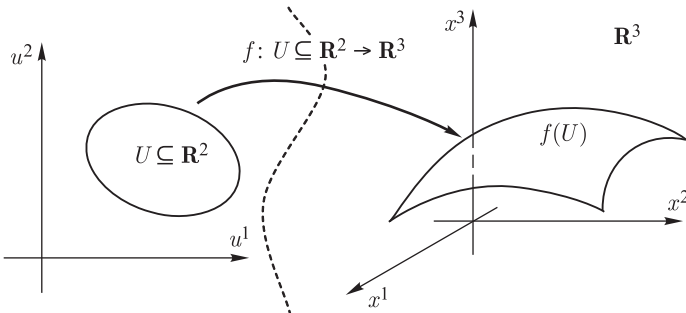


Рис. 28.1

Пять важных наблюдений.

Наблюдение 28.1. Поскольку матрица Якоби, т. е. матрица дифференциала отображения f имеет размеры $m \times n$, то условие $\text{rang}[df_p] = n$ означает, что ранг матрицы Якоби максимально возможный. Поэтому условие $\text{rang}[df_p] = n$ из определения поверхности часто называют *условием максимальности ранга*. (Внимание! Не пугайтесь записи в следующей строке — там нет опечатки):

$$\text{rang}[df_p] = \min\{m, n\}.$$

Наблюдение 28.2. Дифференциал df_p поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ является невырожденным линейным оператором в каждой точке $p \in U$.



Наблюдение 28.3. Поскольку $\text{rang}[df_p] = n$, а столбцами матрицы Якоби являются векторы частных производных

$$[df_p] = [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}],$$

то определение поверхности говорит нам, что в каждой точке $p \in U$ частные производные отображения f линейно независимы. В частности, $n \leq m$.

Наблюдение 28.4. При $n = m$ отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, удовлетворяющее условию максимальности ранга, является весьма своеобразной «поверхностью». Согласно теореме об обратном отображении поверхность f является в этом случае локальным диффеоморфизмом на области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, образом которой снова является область в пространстве \mathbf{R}^n . Такое отображение часто называют *заменой координат* или *заменой параметров*, а физики и «теоретические механики» весьма вольно называют его *криволинейными координатами в области* $f(U) \subseteq \mathbf{R}^n$.



Наблюдение 28.5. Условие максимальности ранга является неотъемлемой и существенной частью определения поверхности! Без этого условия замечательная идея Гаусса может просто перестать работать! Рассмотрим простой пример. Перед вами отображение $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$:

$$f(u^1, u^2) = (u^1 + u^2, u^1 + u^2, u^1 + u^2).$$

Вот его матрица Якоби:

$$[df_p] = [f_{u^1}, f_{u^2}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы в каждой точке $p \in \mathbf{R}^2$ равен 1, хотя сама матрица имеет размеры 3×2 , т. е. ранг не является максимально возможным. В результате образом этого отображения является вовсе не поверхность, а прямая линия в трехмерном пространстве — биссектриса первого и седьмого координатных октантов. Ясно, что прямую линию называть «двумерной поверхностью» нежелательно.

Двинемся дальше. Во всей главе, посвященной поверхностям, следующее определение является, пожалуй, наиболее важным и основополагающим.



Определение 28.2. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность. Образ дифференциала $\text{Im}(df_p)$ этой поверхности в точке $p \in U$ называется *касательным пространством поверхности f в точке $p \in U$* и обозначается $T_p f$. Векторы из касательного пространства $T_p f$ называются *касательными векторами поверхности f в точке $p \in U$* .

Таким образом,



$$T_p f = \text{Im}(df_p) = df_p(T_p U)$$

— образ линейного пространства $T_p U$ при линейном отображении df_p , следовательно, $T_p f$ — *линейное подпространство в $T_{f(p)} \mathbf{R}^m$* :

$$T_p f \leq T_{f(p)} \mathbf{R}^m.$$

Дифференциал df_p поверхности f есть, таким образом, линейный оператор, действующий из касательного пространства $T_p U$ на касательное пространство $T_p f$:

$$df_p : T_p U \rightarrow T_p f.$$



Так как, по определению поверхности, дифференциал есть невырожденный линейный оператор, то

$$\dim(T_p f) = n$$

— размерность касательного пространства равна размерности поверхности.

Определение 28.3. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность. Линейно независимые векторы $f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p)$ частных производных (они же — столбцы матрицы Якоби; они же — образы векторов стандартного базиса (e_1, e_2, \dots, e_n) пространства $T_p U$ при отображении df_p) называются *стандартным базисом касательного пространства $T_p f$* .

Каков наглядный геометрический образ касательного пространства? Вот рис. 28.2, иллюстрирующий введенные понятия.

Обратите внимание на то, что я предлагаю изображать касательное пространство $T_p f$ поверхности f как центраффинное линейное пространство, приклеенное к точке $f(p)$. Это, конечно,

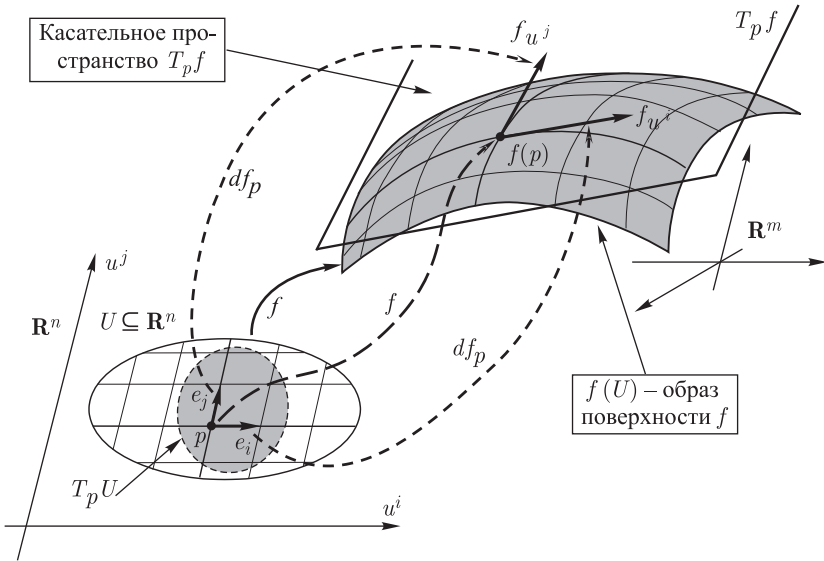


Рис. 28.2

не более чем условность и договоренность, принимаемая исключительно для простоты и наглядности. Мы стремимся сохранить школьные (и начальные университетские) геометрические представления о касательном пространстве, как о касательной плоскости к поверхности. Часто, однако, бывает удобно и гораздо более разумно приклеивать центроаффинное касательное пространство $T_p f$ в другие места, например, к самой точке $p \in U$ (благо, размерность $T_p U$ позволяет это сделать) или вообще никуда не приклеивать. Это становится особенно актуальным, когда в абстрактных разделах дифференциальной геометрии рассматривают поверхности, расположенные (вложенные) не в аффинное пространство \mathbf{R}^m , а в произвольное топологическое пространство, в котором вообще не существует никаких векторов и располагать там касательные векторные пространства становится совсем неправомерно. (Помните, мы уже рассуждали на эту тему в начале п. 19.)

Не пожалейте 15 минут времени и внимательно рассмотрите наш основополагающий рис. 28.2, назовите вслух изображенные на нем объекты и объясните, откуда и куда действуют нарисованные отображения.

Наблюдение 28.6. Имеет место изоморфизм линейных пространств: $T_p U \cong T_p f$. Изоморфизмом является отображение df_p .

Вот изумительная в своей простоте и естественности теорема об устройстве касательного пространства к поверхности.

Теорема 28.1 (об устройстве касательного пространства). Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность, $M = f(U)$ — ее образ, $p \in U$. Тогда:

- 1) если $x \in T_p f$, то $x = \dot{\alpha}(t_0)$, где $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — некоторая кривая вдоль f , т. е. $\alpha(I) \subset M$, и $\alpha(t_0) = f(p)$.
- 2) обратно: если f — инъекция, то для любой кривой $\alpha(t)$ вдоль f вектор $x = \dot{\alpha}(t_0)$ лежит в $T_p f$.



Таким образом, касательное пространство $T_p f$ к поверхности в точке $p \in U$ состоит в точности из всех векторов, касательных ко всевозможным кривым на поверхности, проходящим через точку $f(p)$. Это железное обоснование нашего интуитивного представления касательного пространства как касательной плоскости. Это стальное обоснование самого названия — «касательное» пространство.

Доказательство. Посмотрите на рис. 28.3.

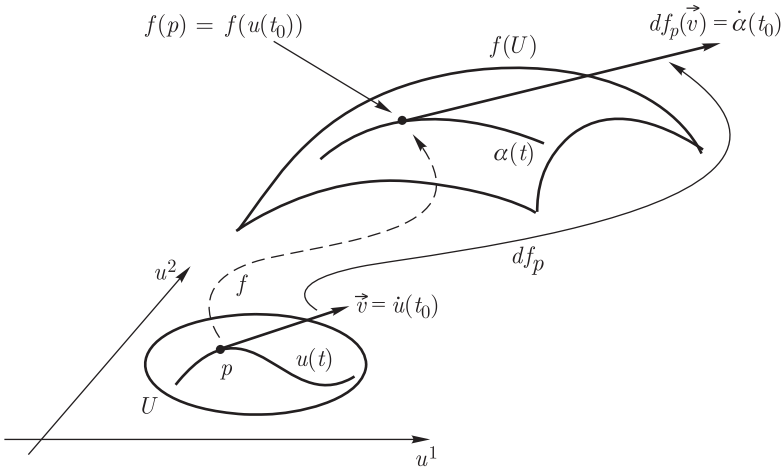


Рис. 28.3

1). Если $x \in T_p f = df_p(T_p U)$, то, вспомнив устройство (точнее, само определение) касательного пространства $T_p U$, можно сказать, что $x = df_p(\dot{u}(t_0))$, где $u(t)$ — некоторая кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, проходящая через точку $p \in U$, т. е. $u(t_0) = p$ (см. рис. 28.3).

Нужная кривая в открытой области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ есть всегда, например, прямая $u(t) = p + (t - t_0)\vec{v}$. Возьмем тогда

$\alpha(t) = f(u(t))$ — это и будет искомая кривая вдоль f , ведь $x = \dot{\alpha}(t_0)$, $\alpha(I) \subset M = f(U)$. (Посмотрите на рис. 28.3. На нем все отлично видно.) Имеем df_p — изоморфизм между линейными пространствами T_pU и $T_p f$, при этом изоморфизме вектору $x \in T_p f$ соответствует вектор $\vec{v} \in T_pU$.

2). Обратно. Пусть f — инъекция, $x = \dot{\alpha}(t_0)$, где $\alpha(I) \subset M$, $\alpha(t_0) = f(p)$. Смотрите снова на рис. 28.3. Теперь отображение f — взаимно однозначное отображение на свой образ:

$$f : U \xrightarrow{\text{биекция}} f(U) = M.$$

Это означает, что у кривой $\alpha(I) \subset M$ есть однозначно определенный прообраз — некоторая кривая $u(t)$ в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ такая, что $\alpha(t) = f(u(t))$. Следовательно,

$$\dot{\alpha}(t_0) = \frac{d}{dt}(f \circ u)(t_0) = df_{u(t_0)}(\dot{u}(t_0)) \in T_p f.$$

Очевидно, все доказано. ◆

Двинемся далее и введем еще одно общеупотребительное понятие. Рассмотрим в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ прямые, параллельные осям координат:

$$u_i(t) = p + t \vec{e}_i.$$

Определение 28.4. Совокупность прямых $u_i(t)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ при всевозможных $p \in U$ называется *координатной сетью в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$* . Образы этих прямых на поверхности (при отображении $f : U \rightarrow f(U)$) называются *координатной сетью поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$* или *поверхностной системой координат*.

Снова обратим свой взор к основополагающему рис. 28.2, но несколько модернизируем сам рисунок для иллюстрации данного определения, убрав лишние детали и добавив недостающие. Получится рис. 28.2М (второй, модернизированный), образца 2005 г., превосходящий в ясности и безотказности понимания многие зарубежные аналоги, стоящие на вооружении западных и восточных ученых. Посмотрите на него.

Координатная сеть поверхности — это именно «сеть» (и рис. 28.2М отлично иллюстрирует такой художественный образ), состоящая из n штук *семейств кривых* вдоль поверхности. Каждая кривая i -го семейства есть $f(u_i(t))$. Если точка

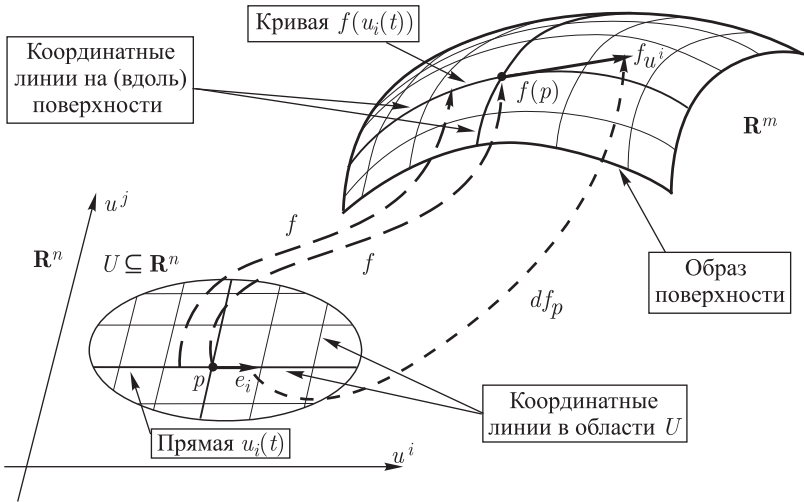


Рис. 28.2М

$p = {}^t(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$ зафиксирована, то i -я координатная линия через точку $f(p)$ есть:

$$\alpha_i(t) = f(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^i + t, \dots, u_0^n),$$

следовательно, $\dot{\alpha}_i(0) = f_{u^i}(p)$, так как $\alpha_i(0) = f(p) = f(u_i(0))$, а $\dot{u}_i(0) = \vec{e}_i$ и $df_p(\vec{e}_i) = f_{u^i}(p)$.



Таким образом, векторы скоростей координатных линий на поверхности f в точке $p \in U$ есть частные производные $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$, т.е. векторы стандартного базиса касательного пространства $T_p f$.

Еще о немного непривычной и, на первый взгляд, неестественной с точки зрения здравого смысла терминологии. Координаты ${}^t(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$ точки $p \in U$ принято называть *поверхностными координатами точки $f(p)$ на поверхности f* . И хотя сама точка $p \in U$ лежит вовсе не на поверхности, принято говорить, что именно ее координаты ${}^t(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$ есть координаты точки $f(p)$ в координатной сети на поверхности. Физики в этой ситуации часто употребляют выражение «координаты точки в криволинейных координатах», а в теоретической механике общеупотребителен термин «*обобщенные координаты точки*». В противовес поверхностным координатам, координаты ${}^t(x^1, x^2, \dots, x^m)$ точки $f(p)$ в пространстве \mathbb{R}^m принято называть

пространственными координатами. Физики часто называют их абсолютными координатами. Ясно, что

$$x^i = f^i(u^1, u^2, \dots, u^n), \quad i = \overline{1, n},$$

где f^i — i -я координатная функция отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Отдадим теперь дань древней традиции излагать дифференциальную геометрию исключительно для поверхностей в трехмерном пространстве и рассмотрим пример, иллюстрирующий введенные понятия и знакомящий читателя с «архаичной» терминологией.

Пример — дань традиции. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ — двумерная поверхность в трехмерном пространстве (смотрите маленький рис. 28.4).

Традиционные «анахроничные» обозначения переменных из области $U \subseteq \mathbf{R}^2$ таковы: $u^1 = u$, $u^2 = v$ — это, одновременно, поверхностные координаты точек образа поверхности. Пространственные координаты тех же точек в \mathbf{R}^3 обозначаются, как обычно, через (x, y, z) . Старомодная запись отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ в координатах (т.е. параметрическое задание) выглядит так:

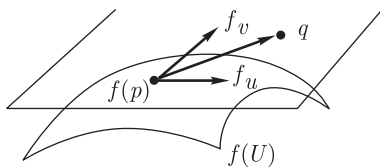


Рис. 28.4

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Касательное пространство к двумерной поверхности в трехмерном пространстве обычно называют *касательной плоскостью* (допуская некоторую вольность речи, ибо касательное пространство поверхности должно быть векторным, а плоскость является аффинным пространством). Нужно привыкнуть к этой условности и смириться, например, с тем обстоятельством, что разные касательные плоскости в трехмерном пространстве могут пересекаться (иметь общие точки), в то время как разные касательные пространства (как центраффинные пространства, приклеенные к разным точкам поверхности) пересекаться в принципе не могут — у них нет общих векторов. Это *разные* линейные пространства!

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности f в точке $p \in U$. Очевидно, что точка q лежит в аффинной каса-

тельной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $q - f(p)$, f_u , f_v компланарны (см. рис. 28.4). Тогда, с использованием элементарных сведений из аналитической геометрии, легко и сразу пишется уравнение касательной плоскости:

$$\det[q - f(p), f_u, f_v] = 0.$$

В развернутом виде и в подробной записи уравнение касательной плоскости к поверхности $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ в точке с координатами $p = {}^t(u_0, v_0)$ (сама плоскость, разумеется, проходит через точку $f(p)$) выглядит так:

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0, v_0) & x'_u(u_0, v_0) & x'_v(u_0, v_0) \\ Y - y(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \\ Z - z(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $q = {}^t(X, Y, Z)$ — столбец координат переменной точки q касательной плоскости. Наша небольшая экскурсия в старину закончена.

Ну, теперь сосредоточьтесь — нам предстоит освоить еще одно, последнее в этом пункте, но сложное и очень абстрактное понятие. Сначала еще раз сформулируем нашу путеводную нить — генеральную идею линеаризации, идущую от Ньютона и Лейбница. Мы хотим подменить (точнее, обоснованно заменить, хотя бы локально) изучение сложных и непонятных изогнутых поверхностей на изучение более простых объектов — аффинных пространств. Мы не понимаем, как проводить криволинейные «геодезические» измерения на искривленном рельефе поверхности, поэтому мы хотим заменить их легко осуществимыми измерениями в арифметическом евклидовом пространстве. Там, где есть скалярное произведение, можно легко вычислить все метрические и геометрические величины. Вот поразительная по своей ясности и красоте мысль — *давайте заменять поверхность в окрестности ее некоторой точки на касательное пространство в этой точке и все нужные измерения производить в удобном и понятном линейном евклидовом касательном пространстве!* Это не просто мысль, это настоящая программа к действию!

Хотим мы, скажем, измерить угол между двумя речками-линиями на глобусе (кривой поверхности) в точке их слияния. Понятно, что угол между кривыми — это угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке пересечения. А где

лежат касательные векторы к обоим кривым? — В касательном пространстве! А касательное пространство — это евклидово пространство, и угол между векторами мы можем легко найти, используя скалярное произведение.

Ясно, что поверхность в разных местах может быть устроена (например, изогнута) по-разному и для ее изучения одним касательным пространством в отдельно взятой точке не обойтись. Поэтому мы, следуя генеральной идее, пойдем еще дальше — проведем *в каждой* точке поверхности свое касательное пространство и будем изучать всю совокупность касательных пространств к поверхности.

Проведем мысленный эксперимент. Представьте себе поверхность, например сферу, в каждой точке которой проведена касательная плоскость. Теперь удалите из вашего мысленного образа саму поверхность, оставив только все ее касательные пространства. Согласитесь — только что удаленная сфера, несмотря на свое отсутствие, явственно просматривается среди касательных плоскостей, оставшихся на прежних местах! Возникает совсем дикая мысль — сама-то поверхность для ее изучения не нужна! Для измерений на поверхности самой поверхности не нужно! Нужна только совокупность ее касательных плоскостей.¹⁾ Эти соображения приводят нас к одному из самых изящных и употребительных понятий современной геометрии — понятию *касательного расслоения*.

Рассмотрим совокупность всевозможных касательных пространств $T_p f$ поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, отложенных от всевозможных точек $f(p)$ образа поверхности $f(U)$. Чтобы различать касательные векторы из разных касательных пространств (т. е. различать векторы, отложенные от разных точек поверхности), удобно рассматривать не сами касательные векторы отдельно, а всевозможные пары вида $(f(p), h)$, где $p \in U$, а $h \in T_p f$ — соответствующий этой точке касательный вектор. Таким обра-

¹⁾ Три последние фразы — в чистом виде подростковый радикализм. Они написаны только для того, чтобы взбудоражить умы читателей. Как может быть «не нужна» поверхность, когда касательные плоскости в пространстве нужно от чего-то откладывать? Как можно обойтись без поверхности, когда базисом в касательном пространстве служат ее частные производные? Вот если плоскости уже отложены и базисы в них зафиксированы, тогда поверхность действительно можно убрать. При этом оставшаяся конструкция будет хранить в себе всю информацию о так называемой «внутренней» геометрии поверхности, но возможно, утратит информацию о взаимосвязи поверхности с окружающим пространством («внешней» геометрии).

зом, естественно возникает множество пар

$$T_U f = \{(f(p), h) | p \in U, h \in T_p f\},$$

понимаемое нами как множество всевозможных касательных векторов к поверхности f , для каждого из которых указано, от какой точки он отложен.



Мы помним, что все касательные пространства $T_p f$ (в разных точках поверхности) изоморфны как линейные пространства одному и тому же линейному пространству $\vec{\mathbf{R}}^n$). Теперь понятно, что, формально, множество $T_U f$ является декартовым произведением:

$$T_U f = f(U) \times \vec{\mathbf{R}}^n.$$

Можно считать, что каждая пара $(f(p), h) \in T_U f$ формально задается столбцом чисел

$${}^t(p^1, p^2, \dots, p^n, h^1, h^2, \dots, h^n),$$

где p^1, p^2, \dots, p^n — координаты точки $p \in U$ или, если угодно, поверхностные координаты точки $f(p)$ в поверхностной системе координат, а h^1, h^2, \dots, h^n — координаты касательного вектора $h \in T_p f$ в стандартном базисе касательного пространства $T_p f$. Назовем указанный столбец из $2n$ чисел *координатами пары* $(p, h) \in T_U f$ и один раз в этой книжке произнесем интуитивно понятную, но все-таки «заумную» для нас фразу: «пространство $T_U f$ имеет размерность $2n$ ». ²⁾

Раз у нас появилось декартово произведение, то автоматически появляется отображение

$$\pi : f(U) \times \vec{\mathbf{R}}^n \rightarrow f(U),$$

действующее по правилу

$$\pi(f(p), h) = f(p).$$

¹⁾ Но, как мы позже увидим, все касательные пространства могут быть разными как евклидовы пространства — скалярное произведение в каждом из них может быть задано разными билинейными формами.

²⁾ Для придания этой фразе ясного смысла необходимо ввести понятия гладкого многообразия, размерности многообразия, дать строгое определение декартова произведения многообразий и т. д., то есть погрузиться в более глубокие и абстрактные разделы дифференциальной геометрии. Здесь мы это делать не будем.

Говоря абстрактно-формально, это отображение является *проекцией* пары на первую компоненту. Говоря наглядно-содержательно, по сути, это отображение ставит в соответствие каждому касательному вектору ¹⁾ точку на поверхности, от которой он отложен.

Возьмем точку $f(p)$ на поверхности $f(U)$ и рассмотрим ее полный прообраз, т. е. множество $\pi^{-1}(f(p))$ всех касательных векторов, которые проектируются отображением π в точку $f(p)$. Очевидно, что это множество есть просто все касательные векторы, отложенные от точки $f(p)$. Поскольку ранее мы договорились приклеивать центроаффинное касательное пространство $T_p f$ к точке $f(p)$ на поверхности, то

$$\pi^{-1}(f(p)) = T_p f.$$

Будем называть прообраз $\pi^{-1}(f(p))$ точки $f(p)$ (т. е. линейное касательное пространство $T_p f$) *слоем над точкой $f(p)$* .

Наступила пора дать «определение» ²⁾, фиксирующее названия всех рассмотренных объектов.



«**Определение 28.5**». Четверка $(T_U f, f(U), \overrightarrow{\mathbf{R}}^n, \pi)$ называется *касательным расслоением поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$* , при этом:

- множество $T_U f$ называется *пространством расслоения*,
- множество $f(U)$ называется *базой расслоения*,
- пространство $\overrightarrow{\mathbf{R}}^n \cong T_p f$ называется *типовым (или стандартным) слоем* расслоения,
- отображение $\pi : T_U f \rightarrow f(U)$ действует по правилу $\pi(f(p), h) = f(p)$ и называется *проекцией (или расслаивающим отображением)*.

Понятие касательного расслоения интуитивно очень простое и ясное. Это — множество всевозможных касательных векторов к поверхности, которое «расслаивается» с помощью проекции $\pi : T_U f \rightarrow f(U)$ на слои — касательные пространства к поверхности. Для нужд дальнейшего изложения можно мыслить себе касательное расслоение как совокупность всех касательных про-

¹⁾ Тут проскользнула вольность речи: на самом деле, не касательному вектору, а паре точка–вектор.

²⁾ Кавычки здесь не случайны — предлагаемое «определение», по сути, является лишь перечислением названий элементов касательного расслоения без указания взаимосвязей между этими элементами. Извинения и объяснения автора по этому поводу можно увидеть на следующей странице.

странств к поверхности, заиндексированных своими начальными точками.

Наблюдение 28.7. Понятие касательного расслоения дает разумное объяснение уже отмечавшемуся выше факту, что разные касательные пространства $T_p f$ и $T_q f$ (отложенные от разных точек $p \neq q$) не пересекаются. Действительно, элементами касательного расслоения являются столбцы вида ${}^t(p^1, p^2, \dots, p^n, h^1, h^2, \dots, h^n)$. Разные касательные пространства просто не могут иметь одинаковых элементов, ибо столбцы

$${}^t(p^1, p^2, \dots, p^n, h^1, h^2, \dots, h^n) \text{ и } {}^t(q^1, q^2, \dots, q^n, h^1, h^2, \dots, h^n)$$

очевидно, различаются хотя бы на первых n позициях. Как уже отмечалось, эта точка зрения несет много полезного, хотя несколько противоречит нашей наглядной интуиции, когда, например, мы представляем две касательные плоскости, проведенные в разных точках к одной и той же сфере, которые, конечно, легко могут пересекаться.

Замечания к предложенному «определению». Должен оговориться и извиниться перед читателями — в целях простоты и ясности понимания я довольно сильно слукавил. Определение касательного расслоения, приведенное здесь, является неполным и отличается от общепринятого, поэтому даже само слово «определение» я изначально заключил в кавычки. Прежде всего, в качестве базы расслоения берут обычно не образ $f(U) \subseteq \mathbf{R}^m$, а саму область $U \subseteq \mathbf{R}^n$, т. е. сразу приклеивают центроаффинные касательные пространства $T_p f$ к точкам $p \in U$ — это менее наглядно, но имеет массу преимуществ, часть из которых мы уже упоминали. В «истинном» определении касательного расслоения более подробно расшифровывают, что такое пространство расслоения, говорят, что оно «локально диффеоморфно» декартовому произведению, налагают на проекцию π требования гладкости и т. д. Мы не будем в этой книге уточнять и детализировать само определение касательного расслоения — это может увести нас далеко в сторону от интуитивно ясного понятия, возникшего здесь. Поскольку все тонкости «истинного» определения расслоения в этой книжке не понадобятся, нам важно сейчас лишь общее концептуальное понимание того, что такое касательное расслоение поверхности и каков его наглядный геометрический образ.

Чтобы потренировать свое пространственное воображение, мысленно представьте себе такой процесс. Точка p ползет по

некоторой кривой α в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. При этом точка $f(p)$ ползет по кривой $f(\alpha)$ на образе поверхности $f(U) \subseteq \mathbf{R}^m$. (Для облегчения представления воображайте себе эти события в трехмерном пространстве, а пространства более высоких размерностей пока воображать не надо — это может плохо кончиться.) Вместе с точкой $f(p)$ по поверхности ползет приклеенное к ней касательное пространство $T_p f$ (представляйте касательную плоскость в точке $f(p)$). Она поворачивается, наклоняется (как плоскость крыла самолета, выполняющего вираж), плавно повторяет в своем движении изгибы поверхности. Красиво, правда? И весь этот красивый гладкий процесс скольжения касательной плоскости по поверхности происходит не где-нибудь, а в касательном расслоении! Слои гладко сменяют друг друга при переходе от одной точки к другой на базе расслоения. Манера движения, скорость поворота, изменение положения этих слоев-плоскостей очень многое говорит о строении самой поверхности, о ее рельефе, горах и равнинах.



Общий вывод этого пункта таков. Хочешь изучать геометрию поверхностей — изучай их касательные пространства!

Задачи и упражнения



1. В каких точках плоскости \mathbf{R}^2 отображение $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, имеющее параметризацию

$$f(u^1, u^2) = {}^t(3 \cos u^1 \cos u^2, 4 \cos u^1 \sin u^2, 2 \sin u^1),$$

удовлетворяет условию максимальности ранга?

2. Найдите базис касательного пространства $T_p f$ данных поверхностей в указанной точке $p \in U$:

а) $f(u, v) = {}^t(u, v, uv)$, $p(1, 2)$;

б) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, 4v)$, $p(2, \frac{\pi}{4})$;

в) $f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$, $p(0, \frac{\pi}{4})$;

г) $f(u, v, w) = {}^t(u + v, u - v, uv, u + w, uvw)$, $p(1, 2, 3)$.

Найдите параметризации координатных линий этих поверхностей, проходящих через точку $f(p)$. Составьте уравнения аффинных касательных плоскостей (соответствующей размерности) к этим поверхностям в указанных точках.

3. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^3 + y^3$ в точке $A(1, 2, 9)$.

4. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $A(3, 1, -1)$.

5. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $f(u, v) = {}^t(u, u^2 - 2uv, u^3 - 3u^2v)$ в точке $A(1, 3, 4)$. Найдите поверхностные координаты точки A . Найдите параметризацию координатных линий этой поверхности, проходящих через точку A .

6. Составьте уравнения двупараметрического семейства всех касательных плоскостей к сфере («касательное расслоение» сферы):

$$f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u).$$

Найдите на этой сфере множество точек, в которых касательные плоскости параллельны вектору $\vec{s}(1, 2, -3)$.

29. Примеры поверхностей

Этот пункт похож на детский альбом с картинками и пояснениями к ним. Он содержит примеры некоторых поверхностей — их названия, рисунки, параметрические задания, описания их координатных сетей и касательных пространств. Итак, приступим к осмотру.

Пример 29.1. Регулярная кривая. Всякая *регулярная кривая* $\alpha(t) : I \subseteq \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^m$ является одномерной поверхностью (см. рис. 29.1).

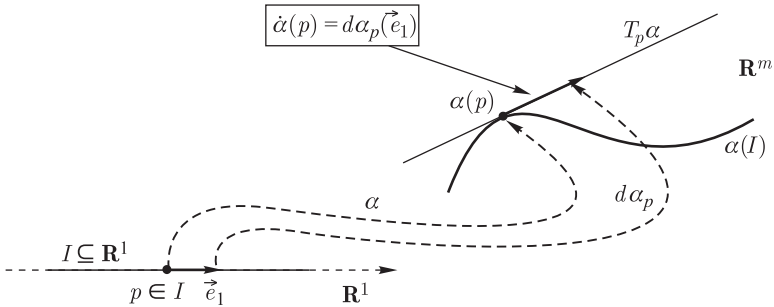


Рис. 29.1

Очевидно, что матрицей Якоби (матрицей дифференциала) гладкого отображения $\alpha(t) : I \subseteq \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^m$ в произвольной точке $p \in I$ является столбец $\dot{\alpha}(p)$. Поскольку $\alpha(t)$ — регулярная кривая ($\forall t \in I \dot{\alpha}(t) \neq \vec{0}$), то отображение $\alpha(t)$ в любой точке $p \in I$ удовлетворяет условию максимальности ранга:

$$\text{rang} [d\alpha_p] = \text{rang} [\dot{\alpha}(p)] = 1.$$

Таким образом, всякая регулярная кривая $\alpha(t) : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ действительно является одномерной поверхностью (что, конечно, согласуется с нашими интуитивными представлениями о размерности кривой линии). Касательное пространство $T_p\alpha$ кривой α в точке $p \in I$ является одномерным и его, допуская традиционную вольность речи и воображения, отождествляют с касательной прямой в точке $\alpha(p)$ (см. рис. 29.1). Стандартным базисом «на касательной прямой» $T_p\alpha$ служит вектор скорости $\dot{\alpha}(p)$, который, разумеется, является образом единственного в $T_p\mathbf{R}^1$ базисного вектора \vec{e}_1 при действии дифференциала $d\alpha_p$.

Координатная сеть на $\alpha(t)$ состоит из единственной линии — самой кривой $\alpha(t)$. Единственной поверхностной координатой точки $\alpha(p)$ является параметр $t \in I$.

Поэтому, когда в документальном фильме академику С. П. Королеву докладывают из Центра управления полетами (ЦУП): «Десять секунд — полет нормальный!», то Главный конструктор понимает, что, на самом деле, в первой части этого доклада содержится криволинейная координата ракеты-носителя на траектории полета.

Пример 29.2. Двумерная плоскость. Параметрическое задание двумерной плоскости $f : U = \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^m$ таково:

$$f(u, v) = q_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

— известное из курса аналитической геометрии *векторное уравнение плоскости* (оно же, но в развернутой координатной записи, называется *параметрическим уравнением плоскости*). Здесь $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^m$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ — направляющие векторы плоскости f , а $q_0 = f(0, 0) \in \mathbf{R}^m$ — начальная точка плоскости f . Образ плоскости $f(U)$ — двумерная аффинная плоскость, лежащая в пространстве \mathbf{R}^m (см. рис. 29.2).

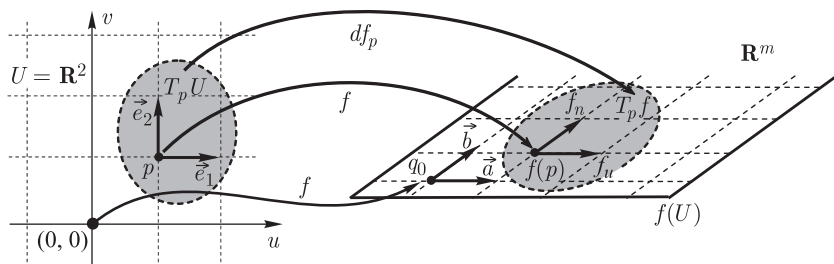


Рис. 29.2

Ясно, что $f_u \equiv \vec{a}$ и $f_v \equiv \vec{b}$. Поскольку направляющие векторы плоскости f не коллинеарны, то

$$\text{rang} [df_p] = \text{rang} [\vec{a}, \vec{b}] = 2$$

в любой точке $p(u, v) \in \mathbf{R}^2$. Таким образом, условие максимальной ранга матрицы Якоби выполнено на всей области $U = \mathbf{R}^2$ и плоскость f действительно является двумерной поверхностью, вложенной в \mathbf{R}^m .

Допуская уже обсуждавшуюся ранее вольность речи (об отождествлении в нашем сознании векторного касательного пространства и аффинной касательной плоскости), можно сказать, что касательное пространство к плоскости в любой точке совпадает с самой этой плоскостью. Базисом $T_p f$ в любой точке $p \in \mathbf{R}^2$ служит пара (\vec{a}, \vec{b}) направляющих векторов.

Координатную сеть на плоскости образуют два семейства параллельных прямых с направляющими векторами $f_u \equiv \vec{a}$ и $f_v \equiv \vec{b}$ соответственно (пунктирные прямые на рис. 29.2). В курсе аналитической геометрии поверхностные координаты (u, v) точки $f(p)$ обычно называют *плоскостными координатами точки $f(p)$* . Плоскостные координаты (u, v) точки $f(p)$ есть не что иное, как координаты вектора $f(p) - q_0$ в базисе (\vec{a}, \vec{b}) .

Таким образом, когда сапер, ползая по плоской равнине, передает командиру роты, что он обнаружил мину $f(p)$ в квадрате $(2, 5)$, то это означает, что они в штабе, вместе с командиром, заранее расчертили карту плоской равнины $U \subset \mathbf{R}^2$ координатными прямыми на квадраты, и командиру следует искать фрагменты сапера в окрестности образа точки $p(2, 5)$.

Пример 29.3. Двумерная сфера в трехмерном пространстве. Это классический пример «воистину нетривиальной», т. е. не одномерной и не плоской поверхности, с изучения которой в стародавние времена зародилась вся «геометрия поверхностей».

Рассмотрим одну из многих возможных параметризаций сферы. Геометрический смысл этой древнейшей параметризации заключается в следующем. Поверхностные координаты точки $f(p)$ на сфере радиуса R с центром в начале координат — это два угла u и v , которыми полностью определяется положение точки на сфере. Эти углы носят достойные исторические названия — *широта* и *долгота* и называются *географическими координатами (u, v) точки $f(p)$* . Посмотрите на рис. 29.3.

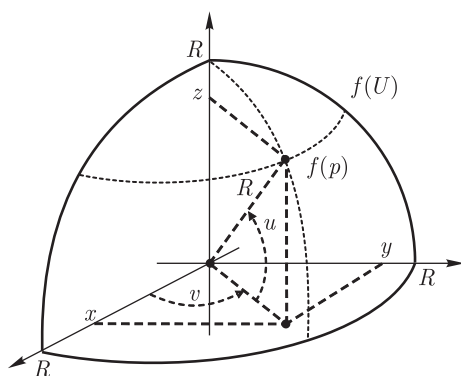


Рис. 29.3

Разглядывая прямоугольные треугольники на этом рисунке, легко уяснить себе параметризацию сферы $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ с помощью географических координат:

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u).$$

Для такой параметризации необходимо уточнить форму и размеры области определения $U \subset \mathbf{R}^2$. Изображение этой области $U \subset \mathbf{R}^2$ на листе бумаги традиционно (особенно в географии) принято называть *картой*.

Для того чтобы отображение $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ было инъективным, нужно ограничить область определения $U \subset \mathbf{R}^2$ величиной периода тригонометрических функций. Обычно (например, в географии) берут *прямоугольник*

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \\ -\pi < v < \pi. \end{cases}$$

Все неравенства в этой системе строгие, так как область $U \subset \mathbf{R}^2$ должна быть открытой (см. рис. 29.4). Таким образом, широта u меняется от *южного полюса* сферы ($u = -\pi/2$) до *северного полюса* сферы ($u = +\pi/2$). Долгота v меняется от линии перемены дат со стороны восточной долготы ($v = -\pi$) через Гринвич ($v = 0$) к линии перемены дат со стороны западной долготы ($v = +\pi$). Рассмотрите рис. 29.4. На нем карта $U \subset \mathbf{R}^2$ изображена так, как это принято в географии — ось v направлена справа налево (т. е. с востока на запад).

Координатная сеть на сфере состоит из двух семейств кривых линий: окружности — *параллели* ($u = \text{const}$) и полуокружно-

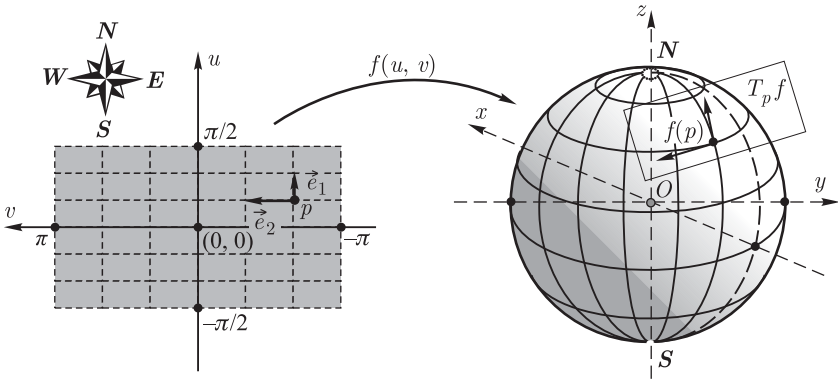



Рис. 29.4

сти — *меридианы* ($v = \text{const}$). Касательное пространство $T_p f$ к сфере часто отождествляют с аффинной касательной плоскостью (см. рис. 29.4).

Убедимся, что сфера f действительно является поверхностью в смысле определения из п. 28. Матрица дифференциала (матрица Якоби) отображения f такова:

$$[df_p] = [f_u, f_v] = \begin{bmatrix} -R \sin u \cos v & -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \cos v \\ R \cos u & 0 \end{bmatrix}.$$

 Легко видеть, что в любой точке $p \in U$ касательные векторы f_u и f_v отличны от нулевого вектора. Кроме того, векторы f_u и f_v всегда ортогональны, ибо их скалярное произведение тождественно равно нулю:

$$\langle f_u, f_v \rangle = R^2 \sin u \cos v \cos u \sin v - R^2 \sin u \sin v \cos u \cos v \equiv 0.$$

Это совершенно естественно, ведь в любой точке на сфере *меридианы перпендикулярны параллелям!*¹⁾ Таким образом, векторы f_u и f_v не коллинеарны, т. е. $\text{rang}[df_p] = \text{rang}[f_u, f_v] = 2$. Условие максимальности ранга выполнено в любой точке области $U \subset \mathbf{R}^2$, следовательно, сфера действительно является двумерной поверхностью.

Определение 29.1. Координатная сеть на поверхности $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *ортогональной*, если для любой

¹⁾ Разумеется, кроме полюсов, которых в рассматриваемой нами параметризации просто нет.

точки $p \in U$ все координатные линии, проходящие через точку $f(p)$, попарно ортогональны.

Таким образом, меридианы и параллели образуют на сфере ортогональную сеть.



Наблюдение 29.1. Обратите внимание! При заданной параметризации отображения f и заданном выборе области $U \subset \mathbf{R}^2$ образ сферы $f(U)$ получается «ущербным»! «Сфера» $f(U)$ не содержит полюсов и линии перемены дат! Привычная сфера оказывается «прорезанной» по одному меридиану и с «выколотыми» полюсами! На рис. 4 линия перемены дат изображена пунктиром (ее нет на образе $f(U)$), а полюса сферы S и N выколоты.

Если, несмотря ни на что, пожертвовать инъективностью отображения f и добавить полюса сферы, т. е. разрешить переменной u принимать значения $\pm\pi/2$, то, как нетрудно заметить, в точках $u = \pm\pi/2$ вектор f_v станет нулевым. Стало быть, в добавленных полюсах нарушится условие максимальности ранга и сфера вообще перестанет быть поверхностью в смысле определения поверхности из п. 28.

Можно доказать, что невозможно взаимно непрерывно и однозначо (т. е. гомеоморфно) отобразить произвольную открытую область $U \subseteq \mathbf{R}^2$ на сферу.¹⁾ Поэтому с наличием на нашей сфере $f(U)$ дыр и прорезей придется смириться. Невозможно придумать гладкую инъективную поверхность (в смысле принятого нами определения поверхности), образом которой являлась бы в точности вся сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, т. е. множество всех точек, удаленных от начала координат на расстояние R . Это известный географический факт — невозможно точно изобразить на одной карте всю поверхность Земли. Для полного изображения земной поверхности без существенных искажений требуется несколько карт.

Сколько карт потребуется, чтобы на них были представлены все точки земного шара? Как ввести на «истинной» сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ поверхностные координаты так, чтобы охватить ими все точки? Как нарисовать возможно более точную карту земного шара? Вопросы, вопросы, вопросы... Эти вопросы вплотную приводят нас к более высоким разделам дифференци-

¹⁾ Например потому, что сфера компактна, а любое открытое множество на плоскости не компактно, в то время как свойство компактности сохраняется при гомеоморфизмах.

альной геометрии — к теории гладких многообразий, но углубиться сейчас в эту теорию у нас нет никакой возможности.

Итак, если капитан океанского лайнера передает вам по радио, что он терпит бедствие в точке $f(p)$ с поверхностными координатами 57 градусов северной широты и 61 градус восточной долготы, то вам стоит задуматься, о каком бедствии идет речь, ибо эта точка находится в самом центре Евразии, на Урале, в городе Екатеринбурге.

Пример 29.4. Поверхность вращения \mathbf{R}^3 .

Поверхностями вращения называют поверхности, образы которых получаются вращением заданной плоской кривой (*профиля поверхности*), вокруг некоторой прямой (*оси поверхности вращения*). Пусть профиль поверхности вращения — кривая $\alpha(u) : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ — изначально находится в плоскости XOZ , а вращение происходит вокруг оси OZ (см. рис. 29.5).

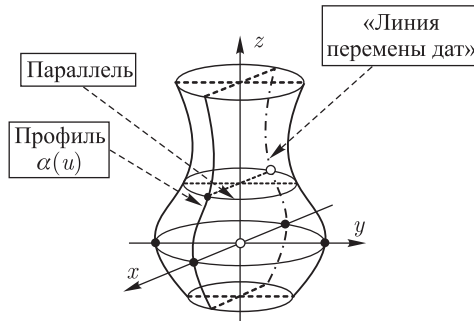


Рис. 29.5

Поскольку кривая $\alpha(u)$ лежит в плоскости XOZ , то параметризация профиля поверхности вращения такова:

$$\alpha(u) = {}^t(x(u), 0, z(u)).$$

Поворот вокруг оси OZ на угол v есть аффинное изометрическое преобразование, которому соответствует ортогональный линейный оператор поворота $A(v)$, имеющий в стандартном базисе (e_1, e_2, e_3) пространства $\vec{\mathbf{R}}^3$ матрицу

$$[A(v)] = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Столбцами написанной матрицы $A(v)$ являются координаты векторов, получаемых из базисных векторов (e_1, e_2, e_3) поворотом на угол v (проверьте это самостоятельно!).

Образ поверхности вращения составляет совокупность всевозможных линий, полученных из линии $\alpha(u)$ поворотом на всевозможные углы $-\pi < v < \pi$. Стало быть, параметризация поверхности вращения $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ такова:

$$\begin{aligned} f(u, v) = A(v) \cdot \alpha(u) &= \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{bmatrix} = \\ &= {}^t(x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)). \end{aligned}$$

Область $U \subseteq \mathbf{R}^2$ при этом является открытым прямоугольником $U = I \times (-\pi, \pi)$ (или полосой, в случае неограниченности интервала $I \subseteq \mathbf{R}$):

$$U : \begin{cases} u \in I, \\ -\pi < v < \pi. \end{cases}$$



Обратите внимание, что сфера из примера 3 является частным случаем поверхности вращения — профилем вращения служит полуокружность радиуса R , лежащая в плоскости XOZ .

Координатная сеть на поверхности вращения, как и в случае сферы, состоит из меридианов и параллелей. Меридианы ($v = \text{const}$) — это всевозможные профили поверхности вращения. Параллели ($u = \text{const}$) — это окружности вращения, т. е. траектории фиксированных точек на профильной кривой $\alpha(u)$ при их вращении вокруг оси OZ . Поскольку $v \in (-\pi, \pi)$, то поверхность вращения, как и сфера из примера 3, не содержит одного меридиана — «линии перемены дат».

Найдем условия, когда поверхность вращения, т. е. отображение

$$f(u, v) = {}^t(x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)),$$

является поверхностью в смысле определения, принятого нами в п. 28. Частные производные отображения $f(u, v)$ таковы:

$$\begin{aligned} f_u &= {}^t(\dot{x}(u) \cos v, \dot{x}(u) \sin v, \dot{z}(u)), \\ f_v &= {}^t(-x(u) \sin v, x(u) \cos v, 0). \end{aligned}$$

Матрица Якоби отображения $f(u, v)$ имеет вид

$$[df_p] = [f_u, f_v] = \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \cos v & -x(u) \sin v \\ \dot{x}(u) \sin v & x(u) \cos v \\ \dot{z}(u) & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы узнать, когда векторы f_u и f_v не коллинеарны (т. е. когда они линейно независимы), найдем их векторное произведение:

$$f_u \times f_v = x(u) \cdot (-\dot{z}(u) \cos v, -\dot{z}(u) \sin v, \dot{x}(u)),$$

и модуль векторного произведения:

$$|f_u \times f_v|^2 = x^2(\dot{z}^2 + \dot{x}^2) = x^2(u) \cdot |\dot{\alpha}(u)|^2.$$

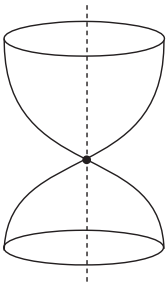



Рис. 29.6

Мы знаем, что векторное произведение равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы коллинеарны. Стало быть, условие максимальности ранга для матрицы $[df_p]$ выполнено, если профиль поверхности вращения $\alpha(u)$ регулярен (т. е. $\dot{\alpha}(u) \neq \vec{0}$) и не пересекает ось вращения OZ (т. е. $x(u) \neq 0$). У поверхности вращения не должно возникать «перетяжек-перекруток» на оси! (См. рис. 29.6.)

 Видно, что при выполнении оговоренных выше условий на область $U \subseteq \mathbf{R}^2$ и кривую $\alpha(u)$ в любой точке $p \in U$ базисные векторы f_u и f_v касательного пространства $T_p f$ ортогональны, так как $\langle f_u, f_v \rangle \equiv 0$. Это означает, что на поверхности вращения меридианы (профили) в любой точке перпендикулярны параллелям, т. е. координатная сеть поверхности вращения ортогональна.

Пример 29.5. «Зонтик Уитни». Геометрическая фигура с таким названием порождает простой пример не инъективной поверхности (с самопересечением). Зонтик Уитни — это множество точек пространства \mathbf{R}^3 , задаваемых алгебраическим уравнением третьего порядка:

$$y^2 - x^2 z = 0,$$

т. е. он является «алгебраической поверхностью третьего порядка» в \mathbf{R}^3 . Чтобы представить себе, как выглядит этот зонтик, рассмотрим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Если $z < 0$, то можно обозначить $-z = a^2$. В этом случае, уравнению $y^2 + a^2x^2 = 0$ удовлетворяет только пара чисел: $x = 0, y = 0$. Таким образом, при $z < 0$ образом уравнения $y^2 - x^2z = 0$ является лишь отрицательная полуось оси OZ — это «ручка зонтика».

Если $z = 0$ (плоскость XOY), то уравнение $y^2 = 0$ задает только ось OX . Если же горизонтальную плоскость XOY приподнять и рассмотреть сечение зонтика Уитни горизонтальной плоскостью $z = a^2 > 0$, то в таком сечении получится пара пересекающихся прямых: $y^2 - a^2x^2 = 0$.

В каждом вертикальном сечении зонтика Уитни парой плоскостей $x = \pm a$ ($a \neq 0$) получаются две одинаковые параболы $y^2 = a^2z$ ветвями вверх. Зонтик Уитни изображен на рис. 29.7.

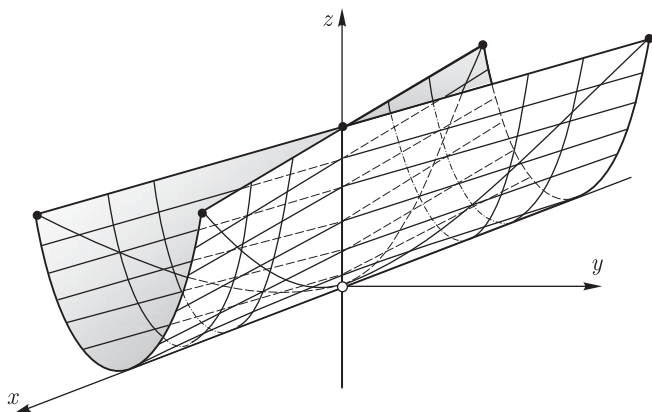


Рис. 29.7

Зонтик Уитни пересекает сам себя по оси OZ , так как в плоскости YOZ (при $x = 0$) сечением поверхности является пара совпавших прямых $y^2 = 0$ (ось OZ). Любое другое сечение зонтика Уитни вертикальной плоскостью, проходящей через ось OZ , является параболой (пара таких парабол, идущих из угла в угол нарисованного фрагмента зонтика, изображена на рис. 29.7).

Параметризация $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ зонтика Уитни получается очень просто. Рассмотрим область $U = \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$ — открытую область, получающуюся выкалыванием из плоскости \mathbf{R}^2 начала координат. Пусть $(u, v) \in U$, т. е. $(u, v) \neq (0, 0)$. Поскольку нижняя часть ручки зонтика Уитни (отрицательный луч оси OZ) очевидно не является двумерной поверхностью, то интуитивно ясно, что при любой параметризации в точках этой ручки будет нарушаться условие максимальности ранга. Поэтому, если мы

хотим получить параметризацию именно двумерной поверхности, то ручку зонтика придется «обломать» и считать, что $z > 0$. Поэтому положим $z = v^2$ и $x = u$. Тогда, глядя на уравнение $y^2 - x^2z = 0$, легко сообразить, что $y = uv$. Окончательно имеем

$$f(u, v) = {}^t(u, uv, v^2).$$



Видно, что полученное отображение $f(u, v)$ не инъективно. Например, пару разных точек $(0, -1)$ и $(0, 1)$ из области определения $U = \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$ оно переводит в одну и ту же точку пространства \mathbf{R}^3 :

$$f(0, -1) = f(0, 1) = (0, 0, 1) \in \mathbf{R}^3.$$

Векторы частных производных отображения $f(u, v)$ таковы:

$$\begin{aligned} f_u &= {}^t(1, v, 0), \\ f_v &= {}^t(0, u, 2v). \end{aligned}$$

Чтобы узнать, когда эти векторы не коллинеарны, найдем их векторное произведение:

$$f_u \times f_v = (2v^2, -2v, u),$$

и модуль векторного произведения:

$$|f_u \times f_v| = 8v^2 + u^2.$$

Видно, что векторное произведение $f_u \times f_v$ может быть равно нулевому вектору только в случае $(u, v) = (0, 0)$, а эту точку мы предусмотрительно выбросили из области U . Это означает, что векторы частных производных в любой точке $p \in U$ не коллинеарны и касательное пространство $T_p U$ двумерно.

Таким образом, отображение $f(u, v) = (u, uv, v^2)$ действительно удовлетворяет условию максимальности ранга в любой точке плоскости $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, за исключением точки $(0, 0)$, поэтому отображение $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ является двумерной поверхностью, образом которой является зонтик Уитни с обрезанной ручкой и выколотым началом координат $(0, 0, 0)$.

При нашей параметризации координатную сеть зонтика Уитни образуют вертикально стоящие параболы и пересекающиеся прямые в горизонтальных плоскостях (см. рис. 29.7). Обратите

внимание, что координатная сеть зонтика Уитни не ортогональна, так как скалярное произведение

$$\langle f_u, f_v \rangle = uv,$$

очевидно, не всегда равно нулю — вертикальные параболы перпендикулярны образующим прямым зонтика Уитни только в точках оси OX .

Пример 29.6. Тор. В дифференциальной геометрии *тором* называется декартово произведение двух сфер каких угодно размеров. Стало быть, простейший пример тора — декартово произведение двух одномерных окружностей S_a^1 и S_b^1 , вложенных в \mathbf{R}^2 , радиусов $a > 0$ и $b > 0$ соответственно. Никаких других ограничений на радиусы перемножаемых окружностей не накладывается.

Давайте поймем одну из возможных параметризаций тора $S_a^1 \times S_b^1$. Сфера S_a^1 является образом кривой $\alpha_1(u) : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}^2$ с параметризацией

$$\alpha_1(u) = (a \cos u, a \sin u).$$

(Если уж говорить совершенно строго, нужно сказать так: образом кривой $\alpha_1(u)$ является сфера S_a^1 за исключением одной выколотой точки!)

Аналогично, сфера S_b^1 (за исключением одной выколотой точки) является образом кривой $\alpha_2(v) : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}^2$ с параметризацией

$$\alpha_2(v) = (b \cos v, b \sin v).$$

Тогда тор $S_a^1 \times S_b^1$, будучи декартовым произведением, является множеством пар точек вида $(\alpha_1(u), \alpha_2(v))$. Его параметризация такова:

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v),$$

где $(u, v) \in U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, т. е. область U — открытый квадрат.



Внимание! Из сказанного следует, что тор $S_a^1 \times S_b^1$ представляет собой первый в нашей книжке естественный пример поверхности, которая расположена в пространстве \mathbf{R}^4 . Ни в каком пространстве меньшей размерности тор *находиться не может!* (Речь идет, между прочим, о торе самой маленькой возможной размерности!) В примере 29.6 мы имеем дело с отображением $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$, поэтому все научно-популярные

рассказы для школьников про то, что «тор — это бублик» или что «тор похож на спасательный круг» очень далеки от нашего примера. Тор не похож ни на что! Он, может быть, лишь отдаленно напоминает улыбку восточносибирского горного бегемота в солнечную погоду. Именно поэтому я не могу снабдить этот пример никаким рисунком (хотя так люблю это делать), а на настойчивые просьбы студентов нарисовать тор на доске, всегда отвечаю вежливым отказом.



Упражнение на способность к обобщению. В пространствах каких размерностей располагаются торы $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{S}_b^2$, $\mathbf{S}_a^2 \times \mathbf{S}_b^2$, $\mathbf{S}_a^k \times \mathbf{S}_b^n$? Каковы их параметризации? Образами поверхностей каких размерностей являются эти торы?

Вернемся к отображению

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v).$$

Его частные производные таковы:

$$f_u = {}^t(-a \sin u, a \cos u, 0, 0),$$

$$f_v = {}^t(0, 0, -b \sin v, b \cos v).$$

Очевидно, что векторы f_u и f_v в любой точке $(u, v) \in U$ отличны от нулевых векторов и взаимно перпендикулярны, так как $\langle f_u, f_v \rangle \equiv 0$. Стало быть, эти векторы линейно независимы и рассматриваемое отображение $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ в любой точке области U удовлетворяет условию максимальности ранга:

$$\text{rang}[f_u, f_v] = 2.$$

Это означает, что тор $f(u, v)$ действительно является двумерной поверхностью, вложенной в четырехмерное пространство.

Координатную сеть на торе составляют два семейства окружностей. Любые две окружности из разных семейств в любых своих точках взаимно перпендикулярны, и это опять-таки невозможно себе представить.



Справедливости ради нужно отметить, что очень часто, в разговорно-математической речи, вопреки ясным определениям, «тором» называют некую «реализацию» настоящего тора $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{S}_b^1$ в виде поверхности вращения в трехмерном пространстве. Эта «реализация» тора действительно похожа на бублик или на спасательный круг. Будем двигать маленькую окружность \mathbf{S}_b^1 по окружности \mathbf{S}_a^1 большого радиуса так, чтобы плоскость

маленькой окружности всегда оставалась перпендикулярна большой окружности, а центр S_b^1 всегда оставался на окружности S_a^1 . Посмотрите на рис. 29.8.

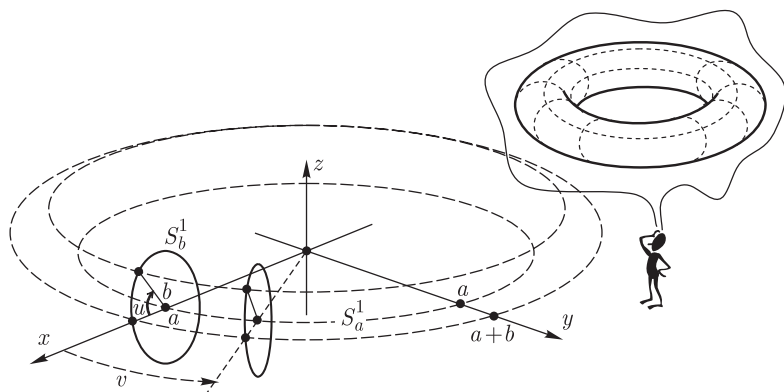


Рис. 29.8

Окружность S_b^1 в плоскости XOZ имеет параметризацию $\alpha(u) = (a + b \cos u, 0, b \sin u)$ — это профиль поверхности вращения. Тогда, согласно примеру 29.5, параметризация тора-бублика как поверхности вращения такова:

$$f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u).$$

Геометрический смысл параметров (u, v) ясен из рис. 29.8 — это углы соответствующих поворотов, или *тороидальные координаты* точки $f(p)$. Координатную сеть на торе-бублике, как на всякой поверхности вращения, образуют профили (окружности радиуса b) и параллели (траектории точек вращаемой окружности S_b^1).

В «материализации» тора в виде бублика, в отличие от настоящего тора, возникают ограничения на радиусы участвующих в конструкции окружностей. Очевидно, что должны выполняться неравенства $0 < b < a$, иначе поверхность вращения окажется не инъективной (появится самопересечение) и нарушится условие максимальности ранга.

Таким образом, если голодный сосед-математик в общежитии просит дать ему пожевать тор, то дайте бублик — именно его он имеет в виду и просто неудачно шутит с голодухи. Вам придется пожалеть соседа и смириться с этой исторически сложившейся разговорно-математической практикой — называть одним словом *тор* две разные поверхности, вложенные в разные пространства.

Остановим здесь нашу маленькую прогулку по огромному музею поверхностей из страны «дифференциальная геометрия». Как и Эрмитаж, этот музей невозможно осмотреть за один заход. Множество интересных примеров поверхностей еще встретится вам на практических занятиях и в упражнениях к последующим пунктам этой книжки. Давайте пойдем в следующий параграф и займемся, наконец, изучением основных геометрических свойств поверхностей.

Задачи и упражнения



1. Найдите параметризацию поверхности, которая получается вращением цепной линии $\alpha(u) = {}^t(a \operatorname{ch}(u/a), 0, u)$ вокруг оси OZ . (*Катеноид*.)

2. Найдите параметризацию поверхности, которая получается вращением трактрисы

$$\alpha(u) = {}^t\left(a \left(\ln\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + \cos u\right), 0, a \sin u\right)$$

вокруг ее асимптоты. (*Псевдосфера*.)

3. Прямая, лежащая на оси OX , начинает равномерно вращаться вокруг оси OZ , оставаясь при вращении перпендикулярной оси OZ , и одновременно движется поступательно вдоль оси OZ с постоянной скоростью. Найдите параметризацию поверхности, заметаемой этой прямой. (*Прямой геликоид*.)

Найдите базис касательного пространства и нормальный вектор к геликоиду в произвольной точке. Найдите параметрические задания координатных линий прямого геликоида.

4. Напишите параметризацию двумерного прямого кругового цилиндра, расположенного в пространстве \mathbf{R}^3 , который является декартовым произведением $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{R}$ одномерной окружности \mathbf{S}_a^1 радиуса a , лежащей в плоскости XOY , и прямой \mathbf{R} (оси OZ). Найдите базис касательного пространства и нормальный вектор в произвольной точке к этому цилиндру.

5. Напишите параметризацию цилиндра $\mathbf{S}_a^2 \times \mathbf{R}$, расположенного в пространстве \mathbf{R}^4 , где \mathbf{S}_a^2 — двумерная сфера радиуса a , расположенная в пространстве \mathbf{R}^3 . Найдите базис касательного пространства и нормальный вектор в произвольной точке к этому цилиндру.

6. Напишите параметризацию тора $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{S}_b^2$ в пространстве \mathbf{R}^5 . Найдите базис касательного пространства $T_p f$ в произвольной точке к этому тору. Найдите базис нормального пространства $(T_p f)^\perp$ к этому тору в произвольной точке.

7. Напишите уравнения нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в произвольной точке. Убедитесь, что все нормали пересекают ось OZ .

8. Докажите, что если все нормали к поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ пересекают некоторую фиксированную прямую, то эта поверхность есть поверхность вращения.

9. Опять за старое! Докажите, что если все нормали к поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ проходят через фиксированную точку, то образ этой поверхности лежит на сфере.

10. Найдите параметризацию поверхности, образованной главными нормальными винтовой линии.

11. Поверхность f образована касательными к бигулярной кривой $\alpha(u) : I \rightarrow \mathbf{R}^3$. Найдите параметризацию поверхности f . Докажите, что во всех точках одной и той же касательной к $\alpha(u)$ поверхность f имеет одну и ту же касательную плоскость (рассматриваемую, разумеется, как аффинное пространство).

12. При каких условиях на значения параметров $a, b, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ образ прямой $\alpha(t) = {}^t(\lambda t, \mu t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ будет замкнутой линией вдоль тора $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, имеющего параметризацию

$$f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)?$$

А когда образ этой прямой будет замкнутой линией вдоль тора $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ с параметризацией

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)?$$

§ 6. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Понятие внутренней геометрии поверхности родилось в работах Гаусса. Содержание внутренней геометрии составляют все те свойства фигур на поверхности и все те величины, которые могут обнаружить и измерить жители этой поверхности, не выходя из нее в окружающее пространство (не отрываясь от поверхности и «не поднимая головы»). Забавно представлять себе двумерных тараканов, которые ползают по двумерной поверхности и не могут поднять с этой поверхности даже усов. У них нет перископа, чтобы осмотреться вокруг (у них просто нет третьего измерения). Тараканы меряют на своей поверхности углы, длины кривых и площади земельных участков — это они изучают свойства внутренней геометрии своей поверхности и об окружающем пространстве просто не подозревают.

30. Первая фундаментальная форма

Как мы уже обсуждали в предыдущих пунктах, вычислять геометрические величины (длины, углы, площади, объемы и т. п.) мы умеем только при наличии скалярного произведения, т. е. в евклидовых пространствах. В п. 28 была сформулирована генеральная программа действий — для определения геометрических величин на поверхности нужно заменить «изогнутую» поверхность в окрестности ее некоторой точки на касательное пространство в этой точке и все нужные измерения производить в удобном и понятном линейном евклидовом касательном пространстве. Мы хотим научиться определять геометрические величины на поверхности через скалярное произведение в слоях касательного расслоения этой поверхности.

Однако, до настоящего времени, все касательные пространства к поверхностям у нас не были евклидовыми! В них не было определено скалярное произведение! Они были просто линейными пространствами, в которых скалярное произведение еще нужно определить, чтобы получить возможность вычислять в них различные геометрические величины. Как только мы зададим скалярное произведение в каждом слое касательного расслоения (в каждом касательном пространстве поверхности), так мы,

фактически, определим на поверхности некую «геометрию», т. е. фигуры на поверхности обретут с помощью этого скалярного произведения свои метрические свойства — длины, углы, объемы и т. п.

Беда в том, что скалярное произведение в каждом касательном пространстве $T_p f$ можно задать огромным количеством способов. Этих способов столько, сколько различных матриц Грама можно назначить для стандартного базиса $T_p f$ (см. п. 4), а эти матрицы Грама можно придумывать вообще «от балды»! Например, можно считать, что скалярное произведение во всех касательных пространствах поверхности задается единичной матрицей Грама, т. е. назначить «от фонаря», что в любом касательном пространстве $T_p f$ скалярное произведение двух векторов $^1) X = x^i f_{u^i}$ и $Y = y^j f_{u^j}$ из $T_p f$ вычисляется по формуле $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x^k y^k$. И «геометрия» поверхности готова!

Ясно, однако, что такая «геометрия» ничего не говорит нам о свойствах самой поверхности — поверхность просто не участвует в определении свойств геометрических объектов, на ней лежащих. При таком «тупом» определении скалярного произведения, свойства фигур, лежащих на «изогнутой» поверхности, ничем не будут отличаться от свойств фигур, лежащих на обычном «плоском» евклидовом пространстве \mathbf{R}^n .

Понятно также, что для каждого способа задания скалярного произведения в слоях касательного расслоения будет получаться своя «геометрия» на поверхности. Это гениальная идея Римана — задавать геометрию на поверхности (да на чем угодно, не только на поверхности!), определяя некоторым (вообще говоря, — произвольным!) способом скалярное произведение в ее касательных пространствах. $^2)$ Идеи римановой геометрии породили целые направления современной математики и естествознания, в частности, они привели к формированию красивого общепhilosophического взгляда на устройство окружающего мира, который называется «Общая теория относительности Эйнштейна».

$^1)$ Обозначения Эйнштейна!

$^2)$ Поясняю рецепт Римана простыми словами. Есть «нечто» (например, топологическое пространство с некоторыми разумными свойствами), состоящее из точек. К каждой точке этого «нечто» приклеиваем экземпляр центрoаффинного пространства и провозглашаем его «касательным пространством» к этому «нечто» в данной точке. Образуется «касательное расслоение» этого «нечто». В каждом «касательном пространстве» задаем произвольным образом скалярное произведение. Геометрия этого «нечто» готова.

Мы сейчас не станем подробно обсуждать идеи римановой геометрии, так как наша задача здесь несколько другая. Попытаемся ее понять и сформулировать.

Определение 30.1. Пространство \mathbf{R}^m , в котором содержится образ $f(U)$ поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, будем называть *окружающим* (или *объемлющим*) *пространством поверхности f* .

Порассуждаем немного о естественных вещах. Все рассматриваемые нами поверхности лежат в своих объемлющих пространствах. Стало быть, если некоторая фигура Φ лежит на поверхности $f(U)$, она, одновременно, лежит и в пространстве \mathbf{R}^m , окружающем эту поверхность. Уберем мысленно поверхность $f(U)$ из окружающего пространства, оставив там «висеть» только фигуру Φ (форму фигуры и расположение ее точек при этом не меняем! — см. рис. 30.1).

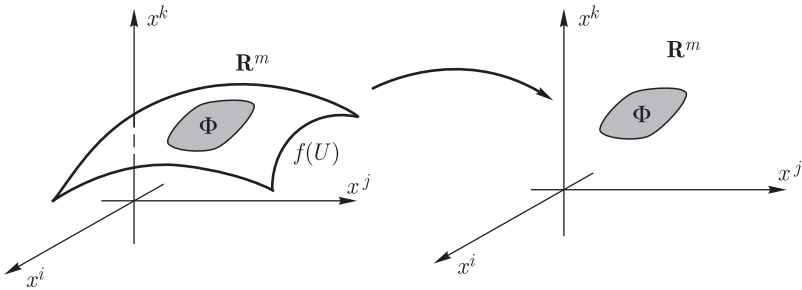


Рис. 30.1

Само окружающее пространство \mathbf{R}^m уже является евклидовым пространством, в котором определена своя «геометрия» (т. е. задано скалярное произведение). Пусть в этом окружающем пространстве, используя его скалярное произведение, нам удалось вычислить какую-нибудь величину «висящей» в нем фигуры Φ (скажем, найти ее площадь S). Теперь мысленно вернем поверхность $f(U)$ обратно на свое место в \mathbf{R}^m и фигура Φ снова «ляжет» на поверхность $f(U)$.

Представляется вполне естественным потребовать, чтобы «геометрия» на поверхности $f(U)$ была определена так, чтобы фигура Φ , став снова фигурой на поверхности, имела в «геометрии» поверхности ту же самую площадь S , что и в «геометрии» окружающего пространства \mathbf{R}^m . Мы хотим, чтобы площадь фигуры Φ , вычисленная с помощью скалярного произведения в касательных пространствах поверхности, совпадала с площадью этой же фигуры Φ , вычисленной с помощью скалярного произведения в окружающем пространстве \mathbf{R}^m !



Итак, наша задача: определить на поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ «геометрию» (т.е. определить скалярное произведение в слоях $T_U f$) таким образом, чтобы свойства всех фигур, лежащих на поверхности $f(U)$, совпадали со свойствами этих же фигур как если бы поверхность убрали, а фигуры бы остались просто «висеть» в окружающем пространстве \mathbf{R}^m , сохранив свою форму.

Как только мы поняли нашу задачу, так сразу стало ясно, как ее решать. Мы договорились считать, что каждое касательное пространство $T_p f$ приклеено к точке $f(p) \in f(U)$, т.е. $T_p f$ лежит в объемлющем евклидовом пространстве \mathbf{R}^m (точнее так: $T_p f \leq \leq T_{f(p)} \mathbf{R}^m$, а $T_{f(p)} \mathbf{R}^m \cong \vec{\mathbf{R}}^m$). Наша задача будет решена, если скалярное произведение векторов в $T_p f$ будет просто совпадать со скалярным произведением этих векторов в \mathbf{R}^m !

Именно поэтому из всех возможных способов задания скалярного произведения в $T_p f$ нужно выбрать один единственный и самый естественный — объявить, что скалярное произведение в каждом касательном пространстве *индуцировано* из окружающего пространства \mathbf{R}^m , т.е. вычислять скалярное произведение в касательном пространстве по тем же правилам, по которым вычисляется скалярное произведение в окружающем евклидовом пространстве.

Это означает, что матрица Грама стандартного базиса пространства $T_p f$ формируется вычислением скалярных произведений $\langle f_{u^i}, f_{u^j} \rangle$ базисных векторов по правилам окружающего пространства \mathbf{R}^m (т.е. фактически, с помощью «данной нам выше» матрицы Грама базиса пространства \mathbf{R}^m). Центроаффинное касательное пространство $T_p f$, будучи подпространством евклидова объемлющего пространства \mathbf{R}^m , автоматически само становится евклидовым пространством. Фактически, еще до начала решения нашей задачи скалярное произведение в каждом $T_p f$ уже «было определено», поскольку оно было определено для всех векторов объемлющего пространства.

Исторически, этот способ определения скалярного произведения в касательных пространствах возник первым, он учитывает свойства поверхностей при вычислении геометрических величин, он решает поставленную в этом пункте задачу и, благодаря всем этим качествам, имеет специальное название.



Определение 30.2. *Первой фундаментальной формой* $I_p(X, Y)$ поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ в точке $p \in U$ называется скалярное произведение в касательном простран-

стве $T_p f$, индуцированное из окружающего пространства $T_{f(p)} \mathbf{R}^m \cong \vec{\mathbf{R}}^m$.

Таким образом, по определению,

$$\mathbf{I}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\mathbf{R}^m}, \quad \text{где } X, Y \in T_p f.$$



В данном касательном пространстве можно задать много разных скалярных произведений, но только одно из них называется первой фундаментальной формой. Первая фундаментальная форма поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ в точке $p \in U$ обозначается одним из следующих способов:

$$\mathbf{I}_p(X, Y) = \mathbf{I}(p; X, Y) = \langle X, Y \rangle_p.$$

Замечание 1. Первая фундаментальная форма превращает каждое векторное касательное пространство $T_p f$ в евклидово пространство, наделяя его специальным скалярным произведением. В разных касательных пространствах поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (т. е. в разных слоях касательного расслоения $T_U f$) это скалярное произведение может быть разным! Таким образом, все слои касательного расслоения (все касательные пространства поверхности в разных точках) изоморфны между собой как векторные пространства, но различны как евклидовы пространства — матрицы Грама их базисов различны! Я уже предупреждал вас об этом явлении в п. 4.

Замечание 2. *Первой фундаментальной формой поверхности* $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (без указания точки) называют совокупность форм $\mathbf{I}_p(X, Y)$ по всем точкам $p \in U$, рассматриваемую на всем касательном расслоении $T_U f$ (в каждом слое — свое скалярное произведение). Пусть $u(t) : I \rightarrow U$ — некоторая кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, тогда $\alpha(t) = f(u(t))$ — кривая вдоль поверхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$. Совершенно естественно, что при движении точки $f(u(t))$ по кривой α на поверхности скалярное произведение в соответствующих слоях $T_{u(t)} f$ должно изменяться плавно и постепенно, т. е. гладко. Поэтому обычно постулируют гладкость отображения $\mathbf{I}_p(X, Y) : (U \times T_p f \times T_p f) \rightarrow \mathbf{R}$ по аргументу $p \in U$, т. е. по переменным u^1, u^2, \dots, u^n , или налагают какие-либо специфические требования на класс гладкости поверхности. ¹⁾

¹⁾ Например, в § 8 этой книжки нам потребуется дифференцировать коэффициенты первой фундаментальной формы по переменным u^1, u^2, \dots, u^n . Эти коэффициенты являются скалярными произведениями первых частных производных $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ отображения $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Разумно пожелать,



Замечание 3. Первая фундаментальная форма — это *билинейная форма*! По определению, первая форма есть скалярное произведение *двух разных* векторов $\mathbf{I}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\mathbf{R}^m}$! В п. 3 мы подробно обсуждали разницу между билинейными и квадратичными формами, и я просил вас никогда их не путать — я не выношу этого на экзамене. Еще раз повторяю свою просьбу: никогда при мне не называйте первую фундаментальную форму «первой квадратичной формой», хотя в математической литературе такой жаргон встречается сплошь и рядом.

Как вычислить первую фундаментальную форму для данной поверхности и что вообще означают слова «вычислить первую фундаментальную форму»? Давайте ответим на этот вопрос.

Пусть $X, Y \in T_p f$ — два вектора из одного касательного пространства (из одного слоя касательного расслоения). Тогда их разложения по стандартному базису $T_p f$ таковы:

$$X = x^i f_{u^i}(p), \quad Y = y^j f_{u^j}(p).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p(X, Y) &= \langle x^i f_{u^i}(p), y^j f_{u^j}(p) \rangle = x^i y^j \langle f_{u^i}, f_{u^j} \rangle_p = \\ &= x^i y^j \mathbf{I}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = x^i y^j g_{ij}. \end{aligned}$$

Определение 30.3. Функции $g_{ij} : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (их всего n^2 штук), где

$$g_{ij}(p) = \mathbf{I}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = \langle f_{u^i}, f_{u^j} \rangle,$$

называются *коэффициентами первой фундаментальной формы* поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (или, иначе, *метрическими коэффициентами* этой поверхности).

Очевидно, что $g_{ij}(p)$ — гладкие функции, ибо они являются скалярными произведениями гладких вектор-функций.

Очевидно, что $(g_{ij}(p))$ — матрица Грама стандартного базиса $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ в (теперь уже!) евклидовом пространстве $T_p f$. Матрицу $(g_{ij}(p))$ также называют *матрицей первой фундаментальной формы поверхности* f и часто обозначают через $[\mathbf{I}_p]$.

чтобы первые производные коэффициентов формы хотя бы просто существовали. Легко понять, что для этого само отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ должно быть отображением класса гладкости не ниже C^2 .



Так как билинейная форма полностью определяется своими коэффициентами в некотором базисе (см. п. 3), то совершенно ясно, что слова «вычислить первую фундаментальную форму поверхности» в точности означают — вычислить матрицу первой фундаментальной формы (метрические коэффициенты) в стандартном базисе касательного пространства поверхности в каждой точке $p \in U$. Для этого нужно найти всевозможные попарные скалярные произведения векторов $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ по правилам, установленным в объемлющем евклидовом пространстве \mathbf{R}^m .

Еще раз обратите внимание — именно этим способом вычисления и ценна для нас первая фундаментальная форма. Скалярное произведение в касательном пространстве в данной точке зависит от устройства самой поверхности в окрестности этой точки — от углов между координатными линиями, от направлений и величин частных производных самой поверхности. Матрица первой фундаментальной формы не придумана отвлеченно «с потолка», а вычислена с использованием поверхности и содержит в себе информацию о ее свойствах. Она «ухватывает» устройство поверхности!

Основные свойства матрицы Грама и метрических коэффициентов мы вспоминали в п. 4, когда готовились к чтению этой книжки. Тем не менее, еще раз отмечу, что в любой точке $p \in U$ (в любом слое касательного расслоения) выполнены следующие условия:

- 1) $g_{ij} = g_{ji}$ — матрица первой фундаментальной формы симметрична;
- 2) матрица $(g_{ij}(p))$ положительно определена;
- 3) $g_{ii} > 0$ — элементы главной диагонали, будучи квадратами длин базисных векторов, строго положительны;
- 4) $\det(g_{ij}(p)) = (V[f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}])^2 > 0$ — определитель матрицы первой фундаментальной формы, будучи квадратом объема параллелепипеда, построенного на базисных векторах пространства $T_p f$, строго положителен.

Наблюдение 30.1. Благодаря симметричности ($g_{ij} = g_{ji}$) матрицы первой фундаментальной формы, для полного ее нахождения нужно вычислить реально не n^2 штук функций $g_{ij}(p)$, а только $\frac{n(n+1)}{2}$ штук (верхний или нижний треугольник матрицы Грама вместе с диагональю). Говорят: матрица первой

фундаментальной формы имеет только $\frac{n(n+1)}{2}$ существенных компонент.

Пример 30.1. Вычислим первую фундаментальную форму поверхности вращения в объемлющем пространстве \mathbf{R}^3 со стандартным скалярным произведением (единичной матрицей Грама). Параметризация поверхности вращения (см. п. 29) такова:

$$f(u, v) = {}^t(x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)).$$

Частные производные отображения $f(u, v)$ есть векторы стандартного базиса $T_p f$. Их координаты в стандартном базисе объемлющего пространства \mathbf{R}^3 :

$$\begin{aligned} f_u &= {}^t(\dot{x} \cos v, \dot{x} \sin v, \dot{z}), \\ f_v &= {}^t(-x \sin v, x \cos v, 0). \end{aligned}$$

В евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 с единичной матрицей Грама $\mathbf{1}_3$ скалярное произведение векторов $x = x^i e_i$ и $y = y^j e_j$ вычисляется по знакомой формуле

$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3.$$

Следовательно, коэффициенты первой фундаментальной формы поверхности вращения имеют вид

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle f_u, f_u \rangle = \dot{x}^2 \cos^2 v + \dot{x}^2 \sin^2 v + \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = |\dot{\alpha}|^2, \\ g_{12} &= g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = -\dot{x} x \cos v \sin v + \dot{x} x \cos v \sin v \equiv 0, \\ g_{22} &= \langle f_v, f_v \rangle = x^2 \sin^2 v + x^2 \cos^2 v = x^2. \end{aligned}$$

Так как $\dim T_p f = 2$, то матрица $[\mathbf{I}_p]$ первой фундаментальной формы поверхности вращения имеет размеры 2×2 и выглядит следующим образом:

$$[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} |\dot{\alpha}|^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица первой фундаментальной формы поверхности вращения получилась диагональной, следовательно, базис пространства $T_p f$ в каждой точке $p \in U$ ортогональный.

Так как базисные векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ являются касательными к координатным линиям вдоль поверхности, то становится очевидной справедливость следующей леммы.

Лемма 30.1. Матрица $(g_{ij}(p))$ первой фундаментальной формы поверхности f диагональна в любой точке $p \in U$ тогда и только тогда, когда координатная сеть поверхности f ортогональна.

Внимание — анахронизм! В старых книжках традиционно излагается теория только двумерных поверхностей в трехмерном пространстве. В этом случае индексы в обозначениях коэффициентов g_{ij} не нужны, ибо для записи метрических коэффициентов хватает простых букв латинского алфавита (посчитайте, шутки ради, для пространства какой наибольшей размерности хватит букв латинского алфавита без индексов). До сих пор во многих учебниках и задачниках применяются обозначения:

$$\begin{aligned}g_{11} &= E, \\g_{12} &= g_{21} = F, \\g_{22} &= G.\end{aligned}$$

В таких обозначениях, например, площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах f_u и f_v , запишется так:

$$V = \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{EG - F^2}$$

— узнаёте выражение, изрядно набившее оскомину в курсе математического анализа (используемое, например, в задачнике Демидовича) и называемое там то «элементом площади», то «якобианом перехода»?

Уважаемые читатели! В этом пункте шла речь о «внутренней геометрии» поверхности, но сам термин «внутренняя геометрия» понимался лишь на интуитивном уровне. Мы до сих пор не уточняли, что это такое. И вот, наконец, под занавес этого пункта, мы можем дать строгое определение понятия «внутренней геометрии поверхности».



Определение 30.4. Все свойства поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (и фигур на этой поверхности), которые могут быть выражены **только** через коэффициенты $g_{ij}(p)$ первой фундаментальной формы этой поверхности (и параметры, определяющие эти поверхностные фигуры), называются *свойствами внутренней геометрии поверхности f* . Совокупность таких свойств составляет *внутреннюю геометрию* поверхности.

Итак, дело сделано. На рассматриваемых поверхностях возникла внутренняя геометрия. С помощью первой фундаменталь-

ной формы каждое касательное пространство поверхности преобразовано в евклидово пространство, и мы можем приступить к определению и вычислению привычных геометрических понятий — длин, углов, площадей и объемов фигур на поверхности.

Задачи и упражнения



1. Найдите первую фундаментальную форму следующих поверхностей, если скалярное произведение в окружающем пространстве каждой поверхности задано единичной матрицей Грама:

а) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

б) $f(u, v) = {}^t(u + v, u - 2v)$;

в) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;

г) $z = F(x, y)$;

д) $f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$;

е) $f(u, v, R) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;

ж) $f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$;

з) $f(u, v, w) = {}^t(u + v, u - v, uvw, u^2 + v^2 + w^2)$;

и) $f(u, v, w) = {}^t(uv, u^3 - v^2, vw, u^2 + 2v^2 + 3w^2, v^2 - 3w^2, 3v - w^2)$;

к) $f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin w)$.

2. Найдите угол между координатными линиями на поверхности $f(u, v) = {}^t(u, v, uv)$ в точке $p(2, 3)$, если скалярное произведение в окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

3. Найдите первую фундаментальную форму поверхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

б) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$,

если скалярное произведение в окружающем их пространстве \mathbf{R}^3 задано следующей матрицей Грама:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Найдите первую фундаментальную форму поверхности $f(u, v) = {}^t(u + v, u - v, u^2 + w^2, u^2 - v^2)$, если скалярное произведение в окружающем пространстве \mathbf{R}^4 задано следующей матрицей Грама:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

31. Длина кривой вдоль поверхности

Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность, $u(t) : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbf{R}^n$ — некоторая кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ и $u(t) = {}^t(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t))$ — параметрическое задание этой кривой. Тогда, очевидно, $\alpha(t) = f(u(t)) : [a, b] \rightarrow f(U) \subset \mathbf{R}^m$ — кривая вдоль поверхности f . Научимся находить длину $\ell[\alpha]_a^b$ кривой $\alpha(t)$.

По определению, длина кривой $\alpha(t)$ есть интеграл от модуля ее скорости:

$$\ell[\alpha]_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

Значит, нужно найти модуль скорости $|\dot{\alpha}(t)|$. Для этого сначала вычислим саму скорость — вектор $\dot{\alpha}(t)$. Ясно, что $\dot{\alpha}(t) \in T_{u(t)}f$. Дифференцируем, используя воспоминания из п. 27: ¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \frac{d}{dt}(f(u(t))) = df_{u(t)} \cdot \dot{u}(t) = f_{u^i}(u(t)) \cdot \dot{u}^i(t) = \\ &= [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}] \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \\ \vdots \\ \dot{u}^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Дифференцирование сложного отображения по правилам, изложенным в курсе математического анализа, сразу дает разложение вектора $\dot{\alpha}(t)$ по стандартному базису $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_{u(t)}f$! Мы говорили об этом в п. 27 — дифференциал $df_{u(t)}$ переводит касательный вектор $\dot{u}(t)$ в касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$.

Далее все стандартно и очевидно. Пусть первая фундаментальная форма поверхности $\mathbf{I}_p(X, Y)$ имеет матрицу $(g_{ij}(p))$. Мы хотим найти модуль скорости — для этого сначала считаем скалярный квадрат вектора скорости:

$$\begin{aligned} |\dot{\alpha}(t)|^2 &= \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = \mathbf{I}_{u(t)}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = \\ &= \langle \dot{u}^i(t) \cdot f_{u^i}(u(t)), \dot{u}^j(t) \cdot f_{u^j}(u(t)) \rangle_{\mathbf{R}^m} = \\ &= \dot{u}^i(t) \cdot \dot{u}^j(t) \cdot \langle f_{u^i}(u(t)), f_{u^j}(u(t)) \rangle_{\mathbf{R}^m} = \\ &= g_{ij}(u(t)) \cdot \dot{u}^i(t) \cdot \dot{u}^j(t). \end{aligned}$$

¹⁾ Всюду далее, безоговорочно, используем обозначения Эйнштейна.

Теперь автоматически получается ответ:

$$\ell[\alpha]_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)} dt. \quad (\spadesuit)$$

Видно, что длина кривой вдоль поверхности выражается только через коэффициенты $(g_{ij}(p))$ первой фундаментальной формы и заданную параметризацию (координатные функции) кривой $u(t)$ в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$.



Это означает, что длина кривой вдоль поверхности есть свойство внутренней геометрии. Длина кривой, в частности, не зависит от свойств объемлющего пространства (например, от его размерности). Тараканы, ползая по образу поверхности, могут самостоятельно измерять длины кривых, не выходя в окружающее пространство.



Полезно понимать, что формула (\spadesuit) является, по сути, *определением* понятия «длина кривой вдоль поверхности».

Вот и все. Теоретический материал этого пункта закончен — он уместился на одной странице. Дальше идет текст, обусловленный традициями и «исторической необходимостью».

Обсуждение традиций. Давайте посвятим еще пару страниц этого пункта разъяснению смысла некоторых исторически сложившихся обозначений.

Я уже брюзжал по поводу традиции, принятой в математическом анализе, обозначать **произвольное** отличное от нуля число неестественной комбинацией букв dt .

Мы имеем $u(t) = {}^t(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t))$ — кривую в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ и $\dot{u}(t) = {}^t(\dot{u}^1(t), \dot{u}^2(t), \dots, \dot{u}^n(t))$ — ее вектор скорости. Если умножить вектор $\dot{u}(t)$ на произвольное число $dt \neq 0$, то он останется коллинеарен сам себе, но будет растянут (или сжат?) в dt раз. Для получившегося касательного «вектора неопределенной длины»

$$\dot{u}(t) dt = {}^t(\dot{u}^1(t) dt, \dot{u}^2(t) dt, \dots, \dot{u}^n(t) dt)$$

в допотопной терминологии принято обозначение

$$\dot{u}(t) dt = du,$$

красоту которого мы уже начали обсуждать в п. 27. Кроме того, $\dot{u}^i(t) dt = du^i$ — дифференциалы координатных функций, поэтому

$$du = {}^t(du^1, du^2, \dots, du^n).$$



Во многих книжках разные авторы толкуют столбец du как касательный вектор «неопределенной длины» к кривой $u(t)$ в области U и говорят, что он **одновременно** является столбцом «координат» вектора $\dot{\alpha}(t) dt$ в стандартном базисе касательного пространства $T_{u(t)}f$. Мне кажется это толкование достаточно мутным, поскольку я не понимаю словосочетания «вектор неопределенной длины». На самом деле, выражение $du = \dot{u}(t) dt$ есть векторное уравнение *одномерного подпространства в $T_{u(t)}\mathbf{R}^n$* (т. е. касательной прямой к кривой $u(t)$ в области U), где $\dot{u}(t)$ — направляющий вектор, а dt — произвольный параметр. И, (о боже!), получается, что, одновременно, в этих же книжках выражение $du = \dot{u}(t) dt = {}^t(du^1, du^2, \dots, du^n)$ обозначает *одномерное подпространство в $T_{u(t)}f$* (т. е. касательную прямую к кривой $\alpha(t)$ на поверхности) с направляющим вектором $df_{u(t)}(\dot{u}(t))!$ Обратите внимание на эту путаницу в смыслах символа du и постарайтесь с ней смириться.¹⁾

Следуя традиции, «внесем» формально число dt в выражении

$$\int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)} dt$$

под знак корня. Получим классическую запись формулы длины кривой вдоль поверхности:

$$\ell[\alpha]_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}.$$

Справедливости ради надо отметить, что такая форма записи имеет свои преимущества, ибо для нахождения длины кривой по этой формуле не требуется явного параметрического задания кривой $u : I \rightarrow U$. Этой формулой можно пользоваться и в том случае, когда явная параметризация координатных функций $u^i(t)$ неизвестна, но из каких-нибудь соображений удалось определить соотношения между дифференциалами du^i . Такое случается, например, когда кривая вдоль поверхности изначально задана уравнениями в поверхностных координатах.

¹⁾ Эта путаница оказывается не столь разительной, когда касательное пространство $T_p f$ изначально договариваются приклеивать не к точке $f(p)$ на поверхности, а к точке p из области U . Тогда, по крайней мере, пространства $T_p f$ и $T_p \mathbf{R}^n$ находятся в одном месте....

Как обычно, обозначим через $s = s(t)$ натуральный параметр (длину дуги) кривой $\alpha(t)$:

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta.$$

Тогда $ds = |\dot{\alpha}(t)| dt$, и эта величина традиционно называется *дифференциалом дуги* (или *элементом дуги*) кривой $\alpha(t)$. Поскольку

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{g_{ij}(u(\theta)) \dot{u}^i(\theta) \dot{u}^j(\theta)} d\theta,$$

то

$$ds^2 = g_{ij}(u(t)) du^i du^j.$$



Это выражение часто встречается в анахроничной литературе. Оно является *квадратичной формой* — это скалярный квадрат касательного вектора $\dot{\alpha}(t) dt$ (бог знает какой длины!) к кривой $\alpha(t)$. Видимо отсюда идет довольно распространенная манера постоянно называть первую фундаментальную форму «первой квадратичной формой».

Но это еще не все! Эту же абстрактную величину $ds = \sqrt{g_{ij} du^i du^j}$ (геометрический смысл которой, на мой взгляд, и так весьма туманен), принято называть еще и *линейным элементом поверхности!* Вчитайтесь в этот термин — там нет никакого намека на исходную кривую! (На мой взгляд, было бы точнее называть величину ds *линейным элементом поверхности f в направлении подпространства du .*) Линейный элемент поверхности, таким образом, понимается в старых книжках как некая «функция», которая позволяет по исходной кривой $u(t)$ найти ее дифференциал дуги ds .

Ну, тогда, в этих обозначениях, формула длины кривой становится совсем простой и краткой:

$$\ell[\alpha] \Big|_a^b = \int_a^b ds.$$

Эта краткость приятна, но уж очень условна. (Я серьезно опасюсь, как бы нерадивый студент на экзамене не «вычислил явно» интеграл, стоящий в этой формуле справа: $\int_a^b ds = b - a$.)

Случай поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. В традиционном изложении курса дифференциальной геометрии этот случай занимает особое место, ибо других случаев просто нет. Посмотрите, как выглядят формулы для вычисления длины кривой на поверхности в классической форме записи. Пусть

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t))$$

— параметризация плоской кривой в области $U \subseteq \mathbf{R}^2$. Применяем традиционные обозначения для коэффициентов первой фундаментальной формы E, F, G и для координатных функций $u^1(t) = u(t)$, $u^2(t) = v(t)$. Тогда формула, выражающая длину кривой на поверхности, запишется так:

$$\begin{aligned} \ell[\alpha] \Big|_a^b &= \int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t)) \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2} = \\ &= \int_a^b \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \end{aligned}$$

Последний интеграл можно обнаружить в любом справочнике по «высшей» математике.

Пример 31.1. Найти длину кривой $v = 4u$ от точки $u = -\pi$ до точки $u = \pi$ на цилиндре радиуса 3:

$$f(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v),$$

где область U — полоса, заданная неравенствами $-\pi < u < \pi$, $-\infty < v < \infty$.

Легко понять, что прямая $v = 4u$ после действия на нее отображением $f(u, v)$ становится на цилиндре $f(U)$ винтовой линией (образно говоря, отображение $f(u, v)$ «сворачивает в трубочку» полосу U). Требуется найти длину одного витка этой винтовой линии.

Матрица первой фундаментальной формы цилиндра легко вычисляется:

$$[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Мы «как будто бы не знаем» параметрического задания линии $v = 4u$ в области U , но это и не требуется, так как мы легко находим соотношение между дифференциалами: $dv = 4 du$. Произвольный касательный вектор к винтовой линии на цилиндре имеет в касательном пространстве координаты $(du, 4 du)$. Вычисляем:

$$\ell[\alpha] = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9 du^2 + dv^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9 du^2 + 16 du^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9 + 16} du = 10\pi.$$

Вот и все.

Задачи и упражнения



1. Найдите длину дуги кривой $v = \ln(+\sqrt{u^2 + a^2})$ между двумя произвольными точками вдоль прямого геликоида $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$.

2. Найдите периметр криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \pm av^2/2$ и $v = 1$ вдоль поверхности, первая фундаментальная форма которой имеет матрицу

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{bmatrix}.$$

3. Найдите длину дуги между двумя произвольными точками кривой $u = v$ вдоль поверхности, первая фундаментальная форма которой имеет матрицу

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 u \end{bmatrix}.$$

4. На псевдосфере

$$f(u, v) = {}^t\left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + \cos u\right)\right)$$

заданы два семейства линий $v = \pm \ln\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + C$. Докажите, что длины дуг всех линий одного семейства между двумя фиксированными линиями второго семейства одинаковы.

5. Найдите длину «обмотки» $u(t) = {}^t(t, t)$, $t \in (-\pi, \pi)$ вдоль гора:
- а) $f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$,
- б) $f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$.

32. Углы на поверхности

Известно, что угол между кривыми — это угол между их касательными векторами в точке пересечения этих кривых. Давайте научимся находить углы между кривыми на поверхности. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность, первая фундаментальная форма $\mathbf{I}_p(X, Y)$ которой имеет матрицу $[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}(p))$.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(t) &= f(u_1(t)) \\ \alpha_2(\theta) &= f(u_2(\theta)) \end{aligned} \right\} \text{ — пара кривых вдоль } f.$$

Пусть прообразы этих кривых (т. е. кривые $u_1(t)$ и $u_2(\theta)$) пересекаются в области U в точке p :

$$u_1(t_0) = u_2(\theta_0) = p.$$

Это означает, что кривые $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(\theta)$ пересекаются на поверхности в точке $f(p)$:

$$\alpha_1(t_0) = \alpha_2(\theta_0) = f(p).$$

Найдем касательные векторы к кривым $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(\theta)$ в точке пересечения. Оба эти вектора лежат в одном касательном пространстве $T_p f$ (см. рис. 32.1) и угол φ между ними — искомый.

Дифференцирование кривых $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(\theta)$ сразу дает разложение касательных векторов по стандартному базису $T_p f$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1(t_0) &= \dot{u}_1^i(t_0) \cdot f_{u^i}(p), \\ \dot{\alpha}_2(\theta_0) &= \dot{u}_2^j(\theta_0) \cdot f_{u^j}(p). \end{aligned}$$

Поскольку при нахождении угла между векторами совершенно неважно, какой они длины, мы смело умножаем первый вектор $\dot{\alpha}_1(t_0)$ на произвольное ненулевое число dt , а второй вектор $\dot{\alpha}_2(\theta)$ — на произвольное ненулевое число $\delta\theta$ (ясно, что угол между векторами от этого либо не изменится, либо станет дополнительным до развернутого). Получаем

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1(t_0) dt &= \dot{u}_1^i(t_0) dt \cdot f_{u^i}(p) = du_1^i(t_0) \cdot f_{u^i}(p) = d\alpha_1, \\ \dot{\alpha}_2(\theta_0) \delta\theta &= \dot{u}_2^j(\theta_0) \delta\theta \cdot f_{u^j}(p) = \delta u_2^j(\theta_0) \cdot f_{u^j}(p) = \delta\alpha_2 \end{aligned}$$

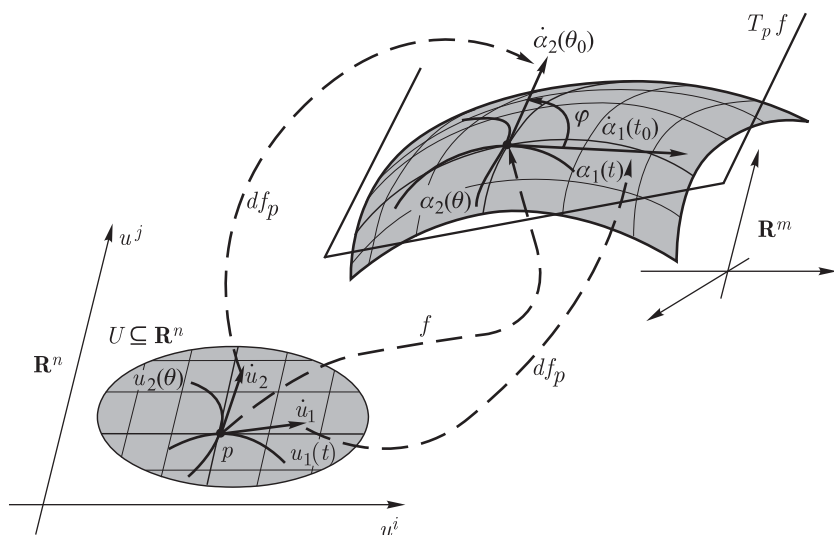


Рис. 32.1

— некоторые касательные векторы (на самом деле — касательные одномерные подпространства!) к кривым $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(\theta)$ соответственно.

Дальше все стандартно и очевидно — углы в евклидовых пространствах ищутся через скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \dot{\alpha}_1(t_0), \dot{\alpha}_2(\theta_0) \rangle}{|\dot{\alpha}_1(t_0)| \cdot |\dot{\alpha}_2(\theta_0)|} = \\ &= \frac{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}_1(t_0), \dot{\alpha}_2(\theta_0))}{\sqrt{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}_1(t_0), \dot{\alpha}_1(t_0))} \cdot \sqrt{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}_2(\theta_0), \dot{\alpha}_2(\theta_0))}} = \\ &= \frac{\mathbf{I}_p(d\alpha_1, \delta\alpha_2)}{\sqrt{\mathbf{I}_p(d\alpha_1, d\alpha_1)} \cdot \sqrt{\mathbf{I}_p(\delta\alpha_2, \delta\alpha_2)}} = \\ &= \frac{g_{ij}(p) du_1^i \delta u_2^j}{\sqrt{g_{ij}(p) du_1^i du_1^j} \cdot \sqrt{g_{ij}(p) \delta u_2^i \delta u_2^j}} \end{aligned}$$

— это классическая запись формулы для нахождения угла между кривыми вдоль поверхности с использованием дифференциалов координатных функций кривых. Лично мне больше нравится такая запись:

$$\cos \varphi = \frac{g_{ij}(p) \dot{u}_1^i(t_0) \dot{u}_2^j(\theta_0)}{\sqrt{g_{ij}(p) \dot{u}_1^i(t_0) \dot{u}_1^j(t_0)} \cdot \sqrt{g_{ij}(p) \dot{u}_2^i(\theta_0) \dot{u}_2^j(\theta_0)}} \quad (\spadesuit)$$

— понимание смысла входящих в нее символов не вызывает у меня никаких излишних усилий.



Видно, что величины углов между кривыми вдоль поверхности выражаются только через коэффициенты $g_{ij}(p)$ первой фундаментальной формы и заданные параметризации (координатные функции) кривых в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Это означает, что величины углов между кривыми вдоль поверхности являются свойствами внутренней геометрии.



Кроме того, полезно понимать, что формула (♠) является, по сути, *определением* понятия «угол между кривыми вдоль поверхности».

Пример 32.1 (задача П. Нуньеса, 1537 г.). На сфере требуется найти кривые, пересекающие все меридианы под одним и тем же одинаковым углом φ . Любая такая кривая на сфере ¹⁾ называется *локсодромой*, что в переводе с латинского означает «косо́й бег».

Сразу напрашивается очевидный ответ — параллели. Каждая параллель пересекает все меридианы под одним и тем же углом $\varphi = \pi/2$. Португалец Нуньес ²⁾, в далекие годы бурного развития парусного мореплавания, задался вопросом — какие еще кривые на сфере пересекают меридианы под одним и тем же углом φ , но теперь $\varphi < \pi/2$. Нуньес, как ребенок, спрашивал окружающих — если все время плыть на север, то приплывешь на северный полюс и там остановишься, если все время плыть на восток, то обойдешь Земной шар и вернешься в исходную точку, а если все время плыть точно на северо-восток, то куда приплывешь? Посмотрите на рис. 32.2.

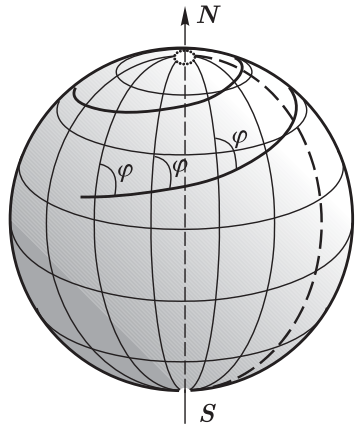


Рис. 32.2

Нуньес открыл эту важную в мореплавании кривую и опубликовал ее описание в работе «Трактат в защиту морской карты»,

¹⁾ И не только на сфере, но и более общо — на произвольной поверхности вращения.

²⁾ Общепринятая русская транскрипция фамилии, которая по-португальски произносится Нуньеш.

изданной в Лиссабоне в 1537 г. Первоначально он называл эту кривую «румб». Локсодрому исследовали многие ученые того времени, в частности, астроном Э. Галлей (его именем названа знаменитая комета) нашел, что стереографическая проекция локсодромы есть логарифмическая спираль.

Найдем уравнение локсодромы на сфере $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, где

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u).$$

Матрица дифференциала отображения $f(u, v)$:

$$[df_p] = [f_u, f_v] = \begin{bmatrix} -R \sin u \cos v & -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \cos v \\ R \cos u & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица первой фундаментальной формы сферы:

$$[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{bmatrix}.$$

Пусть кривая $\alpha_1(t)$ — меридиан на сфере, тогда $v = \text{const}$ — уравнение его прообраза в области $U \subset \mathbf{R}^2$. Значит, в касательном пространстве $T_p f$ касательный вектор $\dot{\alpha}_1(t) = f_u$ имеет «координаты» $(du, 0) = (1, 0) \cdot dt$.

Пусть кривая $\alpha_2(\theta)$ — локсодрома на сфере и пусть $u_2(\theta) = (u(\theta), v(\theta))$ — параметрическое задание ее прообраза в области $U \subset \mathbf{R}^2$. Тогда в касательном пространстве $T_p f$ касательный вектор $\dot{\alpha}_2(\theta)$ имеет «координаты» $(\delta u, \delta v) = (\dot{u}, \dot{v}) \cdot \delta \theta$.

Угол между всеми меридианами и локсодромой постоянен и равен φ , следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \varphi = \text{const} &= \frac{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2)}{\sqrt{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_1)} \cdot \sqrt{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_2)}} = \\ &= \frac{R^2 du \delta u}{\sqrt{R^2 du^2} \sqrt{R^2 \delta u^2 + R^2 \cos^2 u \delta v^2}}. \end{aligned}$$

После возведения в квадрат и несложных преобразований, получается дифференциальное уравнение

$$\cos^2 \varphi (\delta u^2 + \cos^2 u \delta v^2) = \delta u^2,$$

то есть, после деления переменных,

$$\delta v^2 = \text{tg}^2 \varphi \cdot \frac{\delta u^2}{\cos^2 u}.$$

Это уравнение нужно решить и найти функциональную зависимость $F(u, v) = 0$ между переменными u и v . Тогда уравнение $F(u, v) = 0$ будет задавать в области $U \subset \mathbf{R}^2$ некоторую кривую — прообраз локсодромы, или, если угодно, это уравнение будет задавать локсодрому на сфере в географических координатах.

Упражнение 32.1. Решите это уравнение. (Не жульничать!)

Общим решением этого уравнения является семейство интегральных кривых

$$v = \operatorname{tg} \varphi \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) + v_0,$$

расположенных в области $U \subset \mathbf{R}^2$. Каждая такая кривая является прообразом некоторой локсодромы.

Упражнение 32.2. Нарисуйте эти кривые в области $U \subset \mathbf{R}^2$ и сообразите, как выглядят локсодромы на сфере. Что зависит от значения произвольной постоянной v_0 ?

Упражнение 32.3. Сообразите (для этого придется пожертвовать инъективностью отображения $f(u, v)$ и расширить прямоугольник $U \subset \mathbf{R}^2$ до бесконечной полосы), что локсодрома при $0 < \varphi < \pi/2$ делает на сфере бесконечное число оборотов вокруг полюса, неограниченно к нему приближаясь, но не достигая его (говорят — полюс является *асимптотической точкой* локсодромы). Докажите, что, тем не менее, длина всей локсодромы конечна и равна $\frac{\pi R}{\cos \varphi}$.

Задача Нуньеса решена. Пункт 32 закончен.

Задачи и упражнения



1. Под каким углом пересекаются образы кривых

$$u_1(t) = {}^t(t, 2t, -t) \text{ и } u_2(\theta) = {}^t(3\theta, -\theta, \theta^2)$$

вдоль поверхности $f(u, v, w) = {}^t(3u, u + v, uvw, v^2 + w^2)$?

2. Найдите внутренние углы криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \pm av^2/2$ и $v = 1$ вдоль поверхности, первая фундаментальная форма которой имеет матрицу

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{bmatrix}.$$

3. Под каким углом пересекаются линии $u + v = 0$ и $u - v = 0$ на прямом геликоиде $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$?

А под каким углом эти же линии пересекаются на сфере

$$f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)?$$

А на торе

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)?$$

4. Найдите угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2)$.

5. Докажите, что кривые, которые в каждой точке делят пополам углы между координатными линиями поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^m$, задаются дифференциальным уравнением

$$\sqrt{g_{11}} du \pm \sqrt{g_{22}} dv = 0.$$

Найдите уравнения линий, делящих пополам углы между координатными линиями на геликоиде $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$.

6. Найдите уравнения локсодром на поверхности

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})).$$

7. Найдите уравнения локсодром на торе

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v).$$

33. Объем поверхности

Как уже оговаривалось в п. 4, в случае разных размерностей евклидова пространства (или поверхности), величину «объем» обычно называют по-разному:

при $n = 1$ — обычно говорят «длина»,

при $n = 2$ — обычно говорят «площадь»,

при $n \geq 3$ — говорят «объем».

Нам известно, что объем $V[a_1, a_2, \dots, a_n]$ n -мерного параллелопада, построенного на векторах a_1, a_2, \dots, a_n евклидова пространства, равен $\sqrt{\det((a_i, a_j))}$, где $((a_i, a_j))$ — матрица Грама системы векторов (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — инъективная поверхность, $\mathbf{I}_p(X, Y)$ — ее первая фундаментальная форма и $[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}(p))$ — матрица этой формы. Наша задача в этом пункте — определить и научиться находить объем $V[f]$ образа $f(U)$ поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Обозначим определитель $\det(g_{ij}(p))$ матрицы первой фундаментальной формы поверхности через $g(p)$. Очевидно, что объем параллелотопа, построенного на векторах стандартного базиса касательного пространства $T_p f$, равен

$$V[f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}] = \sqrt{\det(g_{ij}(p))} = \sqrt{g(p)}.$$

Обозначение $V = \sqrt{g}$ квадрата объема параллелотопа буквой g общепринято в математике, но особенно любимо физиками в заумных книжках по «теории поля». ¹⁾

Напомню, что *гиперплоскостью* в аффинном пространстве мы договорились называть подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности окружающего пространства.

А дальше, дорогие читатели, я расскажу вам сказку про то, как исторически сформировалось понятие объема поверхности. Это занимательное повествование про дольки, куски-лоскутки и чешуйки.

Пусть $\Delta u^1, \Delta u^2, \dots, \Delta u^n$ — произвольные положительные (отличные от нуля!) числа (в математическом анализе их называют «приращения аргументов»), а (e_1, e_2, \dots, e_n) — стандартный базис \mathbf{R}^n . Разобьем область $U \subseteq \mathbf{R}^n$ гиперплоскостями, параллельными координатным плоскостям, на n -мерные параллелотопы U_k . Эти параллелотопы построены на векторах $\Delta u^1 e_1, \Delta u^2 e_2, \dots, \Delta u^n e_n$, которые отложены от точки p_k . Параллелотопы U_k назовем «дольками» области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Посмотрите на рис. 33.1 — он иллюстрирует продланное разбиение и дальнейшее развитие событий.

Очевидно, что если область $U \subseteq \mathbf{R}^n$ разбита на «дольки», то тогда образ поверхности $f(U)$ разбивается на «куски-лоскутки» $f(U_k)$ — образы «долек». На рис. 33.1 эти «куски-лоскутки» образованы координатными линиями на поверхности. Так получилось лишь потому, что наш рисунок двумерный. Координатные линии на двумерной поверхности как раз и являются образами разбивающих координатных «гиперплоскостей» — координатных линий в области $U \subseteq \mathbf{R}^2$. В случае более высоких размерностей координатные линии здесь ни при чем, ведь область $U \subseteq \mathbf{R}^n$ разбивается на параллелотопы не координатными линиями, а координатными гиперплоскостями. Но тогда и «куски-лоскутки» рисовать крайне затруднительно.

¹⁾ В таких заумных книжках физики забывают, что g — это у них ускорение свободного падения (см., например, книжку «Теория поля» выдающихся советских физиков Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица).

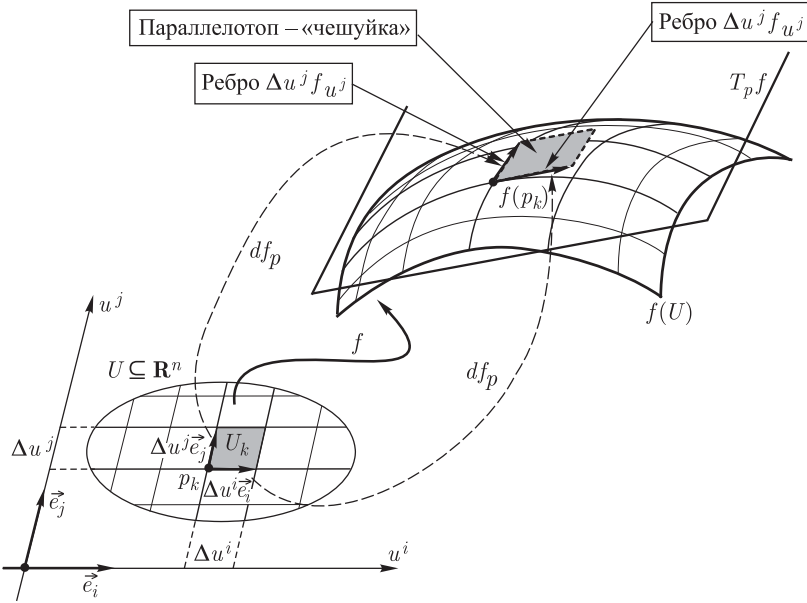


Рис. 33.1

Слушайте дальше. Векторы $\Delta u^1 e_1, \Delta u^2 e_2, \dots, \Delta u^n e_n$ лежат в касательном пространстве $T_{p_k} \mathbb{R}^n$. Дифференциал df_{p_k} переводит эти векторы в векторы $\Delta u^1 f_{u^1}, \Delta u^2 f_{u^2}, \dots, \Delta u^n f_{u^n}$ из касательного пространства $T_{p_k} f$. Таким образом, дифференциал df_{p_k} переводит параллелограмм U_k в «параллелограмм-чешуйку» $df_{p_k}(U_k)$, построенный на векторах $\Delta u^1 f_{u^1}, \Delta u^2 f_{u^2}, \dots, \Delta u^n f_{u^n}$. «Параллелограмм-чешуйка» $df_{p_k}(U_k)$ лежит в касательном пространстве $T_{p_k} f$ аккурат «над куском-лоскутком $f(U_k)$!» (Смотрите — на рис. 33.1 чешуйка лишь чуть-чуть приподнята над куском поверхности!)

В соответствии с нашей генеральной идеей заменять «изогнутую» поверхность в окрестности каждой точки $p_k \in U$ на «прямое» касательное пространство $T_{p_k} f$, заменим каждый «кусочек-лоскуток» $f(U_k)$ «параллелограммом-чешуйкой» $df_{p_k}(U_k)$ в касательном пространстве, ведь «чешуйка» и «лоскуток» очень похожи друг на друга — смотрите на рис. 33.1!



Теперь осталось принять соглашение, что объем «кусочка-лоскутка» $f(U_k)$ примерно равен объему «параллелограмма-чешуйки» $df_{p_k}(U_k)$. Разумеется, это не более, чем интуитивное соглашение, но лично я, глядя на рис. 33.1, склонен считать, что

площадь куска-лоскутка поверхности примерно равна площади параллелограмма-чешуйки над этим куском-лоскутком.

Далее, после принятых соглашений, все стандартно и очевидно. Объем $V[\Delta u^1 f_{u^1}, \Delta u^2 f_{u^2}, \dots, \Delta u^n f_{u^n}]$ параллелотопа-чешуйки, построенного на векторах $\Delta u^1 f_{u^1}, \Delta u^2 f_{u^2}, \dots, \Delta u^n f_{u^n}$ вычисляется автоматически:

$$\begin{aligned} V[\Delta u^1 f_{u^1}, \Delta u^2 f_{u^2}, \dots, \Delta u^n f_{u^n}] &= \\ &= \Delta u^1 \Delta u^2 \dots \Delta u^n \cdot V[f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}] = \\ &= \Delta u^1 \Delta u^2 \dots \Delta u^n \sqrt{\det(\langle f_{u^i}, f_{u^j} \rangle)} = \sqrt{g(p_k)} \Delta u^1 \Delta u^2 \dots \Delta u^n. \end{aligned}$$

В силу наших соглашений мы вынуждены теперь признать, что объем поверхности $V[f]$ примерно равен сумме объемов чешуек:

$$V[f] = \sum_k V[f(U_k)] \approx \sum_k V[df_{p_k}(U_k)] = \sum_k \sqrt{g(p_k)} \Delta u^i \Delta u^j.$$

Коллеги! Это интегральная сумма! Если теперь перейти к пределу, устремив размеры «долек» к нулю (мы не будем сейчас доказывать, что можно перейти к такому пределу!), то получится

$$V[f] = \int_U \sqrt{g(p)} du^1 du^2 \dots du^n,$$

где этот n -кратный интеграл берется по всей области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ определения поверхности. Вот и все. Сказка кончилась, и мы готовы дать формальное определение объема поверхности.



Определение 33.1. Объемом n -мерной инъективной поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется число

$$V[f] = \int_U \sqrt{g(p)} du^1 du^2 \dots du^n.$$

Проверьте самостоятельно, что при $n = 1$ эта формула становится формулой для вычисления длины дуги кривой.



Совершенно очевидно, что объем поверхности является свойством внутренней геометрии этой поверхности, так как в определении объема ничего, кроме коэффициентов первой фундаментальной формы, не участвует.

Два примера.

Пример 33.1. Вычислим площадь (т.е. двумерный объем) поверхности тора-бублика $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, заданного параметризацией

$$f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u), \text{ где } a > b.$$

Область $U \subset \mathbf{R}^2$ задается неравенствами $0 < u, v < 2\pi$ (см. п. 29).

Стандартный базис касательного пространства $T_p f$ в произвольной точке $p(u, v) \in U$:

$$\begin{aligned} f_u &= {}^t(-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u), \\ f_v &= {}^t(-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0). \end{aligned}$$

Первая фундаментальная форма тора-бублика имеет матрицу

$$[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b \cos u)^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $g = \det(g_{ij}) = b^2(a + b \cos u)^2$ и, поскольку $a > b$, квадратный корень можно извлечь:

$$\sqrt{g} = b(a + b \cos u).$$

Считаем площадь поверхности тора-бублика (чур, вычислить интеграл самостоятельно, благо область U — прямоугольник и переход от двойного интеграла к повторному осуществляется элементарно!):

$$V[f] = \iint_U \sqrt{g} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) \, du \, dv = 4\pi^2 ab = (2\pi a)(2\pi b).$$



Таким образом, площадь поверхности тора-бублика есть произведение длин окружностей, участвующих в образовании тора.

Пример 33.2. Вычислим площадь (т.е. двумерный объем) поверхности $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ — настоящего тора $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{S}_b^1$, заданного параметризацией

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v).$$

Область $U \subset \mathbf{R}^2$ задается неравенствами $0 < u, v < 2\pi$ (см. п. 29), т.е. точно такая же, как и в случае тора-бублика.

Стандартный базис касательного пространства $T_p f$ в произвольной точке $p(u, v) \in U$:

$$f_u = {}^t(-a \sin u, a \cos u, 0, 0), \quad f_v = {}^t(0, 0, -b \sin v, b \cos v).$$

Первая фундаментальная форма настоящего тора имеет матрицу

$$[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$g = a^2 b^2 \text{ и } \sqrt{g} = ab.$$

Считаем площадь поверхности тора $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{S}_b^1$ (тут вычисление интеграла вообще не требует никакого умственного напряжения):

$$V[f] = \iint_U \sqrt{g} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (ab) \, du \, dv = (2\pi a)(2\pi b).$$



Видно, что площадь поверхности тора $\mathbf{S}_a^1 \times \mathbf{S}_b^1$ в четырехмерном пространстве получилась точно такая же, как у тора-бублика в трехмерном пространстве — произведение длин окружностей \mathbf{S}_a^1 и \mathbf{S}_b^1 . Мне кажется, это обстоятельство является очень сильной иллюстрацией сущности понятия «внутренняя геометрия» — площадь тора не зависит от того, в какое пространство он вложен и как он там расположен. Площадь тора — это его внутреннее свойство! Он везде носит его с собой.

На лекции эти два примера, рассказанные подряд, производят на студентов сильное впечатление. Как звездное небо над головой, они заставляют их «замереть и задуматься». Хотя, конечно, я понимаю, что эти примеры — просто фокус, «бублик из шляпы». Мы нашли объемы *разных* поверхностей, и эти объемы оказались равны. Правда, они оказались равны совсем не случайно, но вскрывать истинные причины равенства этих объемов мы, в этой книжке, не имеем возможности.

Задачи и упражнения



1. Преподавателя на экзамене будет интересовать объем области $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$; $-\pi < v < \pi$; $0 < w < 5$ на цилиндре

$$f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u, w).$$

Стоит найти этот объем заранее!

2. Найдите объем шара

$$f(u, v, w) = {}^t(w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u),$$

где $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$; $-\pi < v < \pi$; $0 < w < R$.

3. Найдите объем поверхности трехмерной сферы в R^4 :

$$f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin u \sin w).$$

4. Найдите площадь четырехугольника на прямом геликоиде $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$, ограниченного линиями $u = 0, u = a, v = 0, v = 1$. На этом же геликоиде найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $u = \pm av, v = 1$.

5. Найдите площадь прямоугольного треугольника на сфере радиуса R , сторонами которого являются дуги больших окружностей этой сферы.

34. Замена параметров на поверхности. Изометричность поверхностей

Первая половина этого пункта аналогична по своему содержанию п. 9, где рассматривалась замена параметра на кривой, поэтому я советую в процессе чтения заглядывать туда и устанавливать соответствующие аналогии. Текст пункта специально написан мной достаточно кратко, без подробного толкования причин возникновения обсуждаемых понятий. Это должно послужить хорошим упражнением для вашей способности понимать не только буквальное содержание текста, но и идейную сторону излагаемых вопросов.

Определение 34.1. Две поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ связаны заменой параметров Φ , если:

- 1) $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$ — диффеоморфизм;
- 2) для любой точки $u \in U$ выполнено $f(u) = \tilde{f}(\Phi(u))$, т. е.

$$f = \tilde{f} \circ \Phi.$$

Посмотрите на рис. 34.1, иллюстрирующий данное определение.

Упражнение 34.1. Докажите, что на множестве всех n -мерных поверхностей, вложенных в \mathbf{R}^m , бинарное отношение «быть связанными заменой параметров» является отношением эквивалентности.

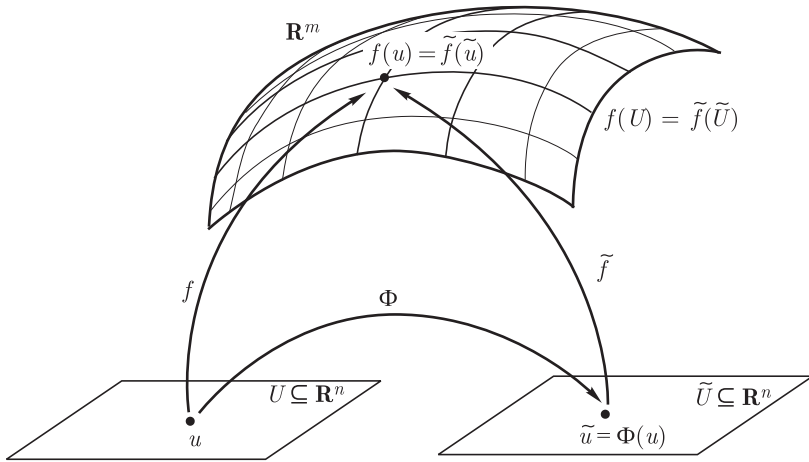


Рис. 34.1

Опираясь на сформулированное утверждение, часто вместо фразы «поверхности связаны заменой параметров» говорят просто «поверхности эквивалентны».

Замечание 34.1. Во многих книжках термином «поверхность» или «непараметризованная поверхность» называют класс эквивалентных поверхностей, а каждое конкретное отображение $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ из такого класса называют «параметризованной поверхностью». Мы в этой книжке не придерживаемся подобной точки зрения.

Наблюдение 34.1. Образы эквивалентных поверхностей совпадают.

Диффеоморфизм $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$ осуществляет гладкое взаимно-однозначное отображение области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ на область $\tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n$, т. е. производит на поверхности $f(U) = \tilde{f}(\tilde{U})$ замену поверхностных координат (u^1, u^2, \dots, u^n) на «новые» поверхностные координаты $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^n)$. Поэтому замену параметров $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$ часто называют еще и *заменой координат*.

Покажем, что у поверхностей $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, связанных заменой параметров Φ , в точках $u \in U$ и $\tilde{u} = \Phi(u) \in \tilde{U}$ касательное пространство одно и то же:

$$T_u f = T_{\tilde{u}} \tilde{f}. \quad ^1)$$

¹⁾ Касательные пространства не просто изоморфны, а именно равны как множества векторов.

Действительно,

$$f(u) = \tilde{f}(\Phi(u)),$$

следовательно, согласно цепному правилу

$$df_u = d\tilde{f}_{\Phi(u)} \cdot d\Phi_u.$$

Значит, $\text{Im } df_u = \text{Im}(d\tilde{f}_{\Phi(u)} \cdot d\Phi_u)$. Это означает, что

$$T_u f \subseteq T_{\Phi(u)} \tilde{f}.$$

Поскольку Φ — диффеоморфизм, $d\Phi_u$ — невырожденный линейный оператор, $\text{rang}(d\Phi_u) = n$, значит, $\text{Im}(d\Phi_u) = T_{\Phi(u)} \tilde{U}$. Отсюда, поскольку $T_{\tilde{u}} \tilde{f} = d\tilde{f}_{\Phi(u)}(T_{\Phi(u)} \tilde{U})$ и $\dim T_u f = \dim T_{\Phi(u)} \tilde{f}$, следует $T_u f = T_{\tilde{u}} \tilde{f}$.

Очевидно, что стандартные базисы касательных пространств $T_u f$ и $T_{\tilde{u}} \tilde{f}$ связаны следующим образом:

$$[f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}] = [\tilde{f}_{\tilde{u}^1}, \tilde{f}_{\tilde{u}^2}, \dots, \tilde{f}_{\tilde{u}^n}] \cdot \Phi'(u),$$

где $\Phi'(u) = [d\Phi_u]$ — матрица перехода, являющаяся матрицей дифференциала диффеоморфизма Φ , т. е. матрицей Якоби отображения Φ . (Помним, что $\text{rang}(d\Phi_u) = n$ и якобиан перехода $\det[d\Phi_u]$ отличен от нуля в любой точке $u \in U$.)

Посмотрим теперь, как меняется матрица первой фундаментальной формы поверхности при замене параметров.

Очевидно, что

$$(g_{ij}(u)) = {}^t[df_u] \cdot [df_u],$$

$$(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) = {}^t[d\tilde{f}_{\tilde{u}}] \cdot [d\tilde{f}_{\tilde{u}}].$$

Так как $[df_u] = [d\tilde{f}_{\tilde{u}}] \cdot [d\Phi_u]$ и ${}^t[df_u] = {}^t[d\Phi_u] \cdot {}^t[d\tilde{f}_{\tilde{u}}]$, то получаем

$$\begin{aligned} (g_{ij}(u)) &= {}^t[df_u] \cdot [df_u] = {}^t[d\Phi_u] \cdot {}^t[d\tilde{f}_{\tilde{u}}] \cdot [d\tilde{f}_{\tilde{u}}] \cdot [d\Phi_u] = \\ &= {}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u]. \end{aligned}$$



Окончательно, имеем

$$(g_{ij}(u)) = {}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u].$$

Это известно из курса алгебры правило изменения матрицы билинейной формы при замене базиса. (Замена базиса происходит в линейном пространстве $T_u f = T_{\tilde{u}} \tilde{f}$ с помощью матрицы перехода $[d\Phi_u]$.)



Утверждение 34.1. Длины кривых вдоль поверхности, углы между кривыми и объем поверхности инвариантны относительно замены параметров, сохраняющей ориентацию (т. е. диффеоморфизма $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$ такого, что $\det[d\Phi_u] > 0$ в любой точке $u \in U$).

Доказательство. Это достаточно очевидное утверждение, так как при замене параметров на поверхности любая кривая вдоль поверхности будет просто перепараметризована, поэтому, по лемме п. 9, ее длина не изменится. Вектор скорости кривой при замене параметра разве лишь умножается на некоторую скалярную функцию, т. е. остается коллинеарен сам себе. Следовательно, углы между кривыми инвариантны относительно замены параметров. Наконец, объем поверхности остается неизменным вследствие правила замены переменных в кратных интегралах (подынтегральное выражение необходимо умножить на якобиан перехода $\det[d\Phi_u^{-1}]$):

$$\begin{aligned} V[f] &= \int_U \sqrt{g} du^1 du^2 \cdots du^n = \\ &= \int_{\tilde{U}} \sqrt{\det({}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u]) \cdot \det[d\Phi_u^{-1}]} \cdot d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \cdots d\tilde{u}^n = \\ &= \int_{\tilde{U}} \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot \det[d\Phi_u] \cdot \det[d\Phi_u^{-1}]} \cdot d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \cdots d\tilde{u}^n = \\ &= \int_{\tilde{U}} \sqrt{\tilde{g}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \cdots d\tilde{u}^n = V[\tilde{f}]. \end{aligned}$$



Впрочем, это утверждение можно было предугадать и ранее, так как у эквивалентных поверхностей в соответствующих точках касательные пространства совпадают, а соотношение $(g_{ij}(u)) = {}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u]$ показывает, что метрические коэффициенты g_{ij} и \tilde{g}_{ij} являются коэффициентами *одной и той же билинейной формы* (скалярного произведения) в разных базисах (см. конец п. 3).



Это означает, что в соответствующих точках эквивалентных поверхностей их первые фундаментальные формы просто совпадают и эти поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию. Внутренняя геометрия поверхности не меняется при замене параметров!

Такой итоговый вывод не содержит в себе ничего неожиданного с интуитивной точки зрения, ведь образы эквивалентных поверхностей $f(U)$ и $\tilde{f}(\tilde{U})$ просто совпадают. Представляется вполне естественным, что тараканам, ползающим на поверхности, совершенно наплевать, каким из возможных способов она параметризована. И если уж они там измерили длину какой-то кривой, то результат их измерения есть константа, никак не зависящая от выбора системы координат на поверхности.

Продолжим наши рассуждения. Давайте несколько усложним и обобщим ситуацию, а именно, «разнесем в разные места» образы $f(U)$ и $\tilde{f}(\tilde{U})$ в пространстве \mathbf{R}^m (см. рис. 34.2) и позволим этим образам быть, вообще говоря, разными:

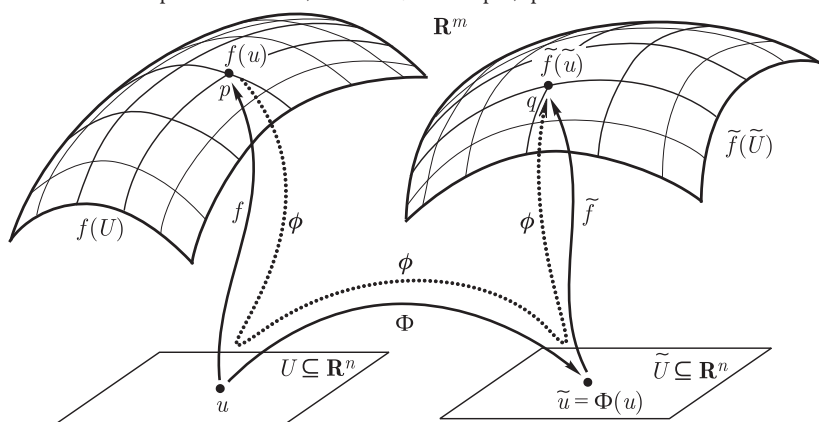


Рис. 34.2

Предметом нашего дальнейшего обсуждения, таким образом, будут *разные* поверхности, но с *одинаковой внутренней геометрией* и диффеоморфными областями определения. Дадим точные определения.

Определение 34.2. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — две инъективные поверхности. Произвольный диффеоморфизм $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$ называется *диффеоморфизмом поверхности f на поверхность \tilde{f}* . В этом случае говорят, что поверхности f и \tilde{f} *связаны диффеоморфизмом Φ* (или поверхности f и \tilde{f} *диффеоморфны*).



Мы уже обсуждали в п. 28 эту общепринятую практику — провозглашать координатами точки $p \in f(U)$ координаты точки $f^{-1}(p)$ в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, т. е. приписывать точкам образа поверхности «свойства и характеристики» их прообразов из об-

ласти определения. Теперь идем еще дальше. Поскольку мы научены устанавливать диффеоморфизмы только между **открытыми** областями пространства \mathbf{R}^n , то мы провозглашаем поверхности диффеоморфными, если установлен диффеоморфизм между их областями определения. Таким образом, термин «диффеоморфизм поверхностей», являясь общеупотребительным, имеет все-таки достаточно условный характер — ведь диффеоморфны не образы поверхностей, а их координатные области (т. е. *карты* поверхности).

Тем не менее, образы диффеоморфных поверхностей не ускользают из нашего рассмотрения, ибо между ними тоже рождается связь.



Наблюдение 34.2. Так как диффеоморфные поверхности f и \tilde{f} предполагаются инъективными (т. е. $f : U \rightarrow f(U)$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$ — биекции), то возникает естественное взаимно-однозначное соответствие ϕ между точками их образов:

$$\phi = \tilde{f} \circ \Phi \circ f^{-1} : f(U) \xrightarrow{1-1} \tilde{f}(\tilde{U}).$$

Точке $p \in f(U)$ при этом отображении соответствует точка $q = \tilde{f}(\Phi(f^{-1}(p))) \in \tilde{f}(\tilde{U})$. (Смотрите на рис. 34.2 и водите по точечной линии пальцем, чтобы проследить, как действует отображение ϕ .) Точки $p \in f(U)$ и $q = \phi(p) \in \tilde{f}(\tilde{U})$, связанные отображением ϕ , будем называть *соответственными* (при диффеоморфизме поверхностей Φ). Таким образом, всякой фигуре (множеству точек) на $f(U)$ соответствует некоторая фигура на $\tilde{f}(\tilde{U})$, состоящая из множества соответственных точек.


Замечание 34.2. Легко понять, что любые две открытые односвязные области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ и $\tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n$ можно диффеоморфно отобразить друг на друга (они обе диффеоморфны, например, открытому единичному шару в пространстве \mathbf{R}^n , а отношение областей «быть диффеоморфными» является симметричным и транзитивным). Поэтому само по себе, в отрыве от контекста, понятие диффеоморфизма поверхностей мало что дает, поскольку потенциально, при наших общих определениях, любые две поверхности могут быть диффеоморфны. Однако содержательный интерес в этих вопросах представляет сама терминология, конструкция отображения $\phi = \tilde{f} \circ \Phi \circ f^{-1}$ для диффеоморфных поверхностей и различные применения диффеоморфных поверхностей в других (более конкретных) построениях.

Определение 34.3. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — две инъективные поверхности, связанные диффеоморфизмом $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$. Если матрицы $(g_{ij}(u))$ и $(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}))$ первой фундаментальной формы этих поверхностей во всех соответствующих точках u и $\tilde{u} = \Phi(u)$ связаны соотношением


$$(g_{ij}(u)) = {}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u],$$

то поверхности f и \tilde{f} называются *изометричными*. Диффеоморфизм Φ называется *изометрией* поверхностей f и \tilde{f} .

Следуя общей установке одинаково именовать свойства образов поверхностей и областей их определения, отображение $\phi = \tilde{f} \circ \Phi \circ f^{-1}$, осуществляющее «наложение» образа $f(U)$ на образ $\tilde{f}(\tilde{U})$ в пространстве \mathbf{R}^m , часто также называют *изометрией* поверхностей f и \tilde{f} .

 **Наблюдение 34.3.** Внутренние геометрии изометричных поверхностей f и \tilde{f} совпадают! Это совершенно очевидно, поскольку поверхности f и \tilde{f} имеют в соответственных точках одну и ту же первую фундаментальную билинейную форму! Действительно, невырожденный линейный оператор $d\Phi_u$ переводит стандартный базис касательного пространства $T_u f$ в стандартный базис касательного пространства $T_{\tilde{u}} \tilde{f}$, а при таком переходе матрица билинейной формы как раз и преобразуется по правилу $(g_{ij}(u)) = {}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u]$. Это означает, что в пространствах $T_u f$ и $T_{\tilde{u}} \tilde{f}$ определено одно и то же скалярное произведение. Касательные пространства изометричных поверхностей в соответствующих точках оказываются изоморфными не только как линейные, но и как *евклидовы* пространства!

Объемы, длины, углы и прочие метрические свойства соответственных фигур на изометричных поверхностях оказываются одинаковыми. Кроме всего прочего, это означает, что длины любых соответственных линий на поверхностях $f(U)$ и $\tilde{f}(\tilde{U})$ одинаковы — в традиционных учебниках на это обстоятельство принято обращать особое внимание.

 **Упражнение 34.2.** Докажите, что если на диффеоморфных поверхностях длины любых соответственных кривых совпадают, то эти поверхности изометричны.

Результат этого упражнения порождает такой художественный образ. Представим себе поверхность, изготовленную из гибкой, но нерастяжимой пленки (подойдет также бумага, фольга, брезент или парусина). Произвольно изгибая такую поверхность,

мы не изменим длин лежащих на ней кривых (а также площадей фигур, углов между кривыми и т. д.) и, следовательно, получим изометричную поверхность. Основываясь на этом художественном представлении, геометры XIX и начала XX веков даже называли изометрию *изгибанием* (сейчас термин «изгибание» понимается в несколько ином смысле — как некоторое непрерывное семейство последовательных изометрий, называемое иногда «изотопией»).

Так как поверхности, эквивалентные изометричным поверхностям, снова изометричны, то справедливо следующее

Утверждение 34.2. *Две произвольные инъективные поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ изометричны тогда и только тогда, когда подходящей заменой параметров на одной из них ($\Psi : U \rightarrow U_1$ или $\tilde{\Psi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}_1$) матрицы их первой фундаментальной формы ($g_{ij}(u)$) и ($\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})$) можно сделать одинаковыми с точностью до обозначения переменных (поверхностных координат).*

Я настоятельно советую вам аккуратно написать доказательство этого несложного утверждения, нарисовав соответствующие картинки с поверхностями, областями и стрелками-отображениями. Если вы справитесь с этой задачей — вы поняли содержание этого пункта.

Итак, изометричные поверхности — это поверхности с одинаковой внутренней геометрией, одинаковыми длинами соответствующих кривых, равными площадями соответственных фигур и т. д. Имея две изометричные поверхности, мы можем так изогнуть одну из них в окружающем пространстве, что она «тютелька в тютельку» ляжет на вторую поверхность. Тараканы, ползающие по изометричным поверхностям, не смогут отличить их друг от друга никакими измерениями — настолько эти поверхности похожи своим «внутренним устройством».

Казалось бы, что благодаря столь сильному совпадению всех свойств внутренней геометрии, «внешний вид» изометричных поверхностей в окружающем пространстве должен не слишком сильно различаться. Ну, подумаешь, изогнули слегка одну поверхность, и получилась другая — это всегда можно себе представить! Полоса плоскости и цилиндр изометричны — так мы же легко сворачиваем лист бумаги в трубочку!

Удручающий пример 34.1. Рассмотрим две двумерные поверхности, вложенные в трехмерное пространство. Вот их описание.

Первая поверхность. Линия провеса тяжелой однородной нити, концы которой закреплены на двух гвоздях, вбитых в стенку на одинаковой высоте, называется *цепной линией*. На рис. 34.3 цепная линия сразу изображена в нужном для дальнейшего ракурсе — в плоскости XOZ . Исходя из постулата о том, что потенциальная энергия провисшей нити минимальна, можно доказать, что цепная линия является графиком гиперболического косинуса ¹⁾ $x = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$, где a — точка пересечения цепной линии с осью OZ (*вершина* цепной линии). Таким образом, параметризация цепной линии как кривой $\alpha(u) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, лежащей в плоскости XOZ , с ветвями вдоль оси OZ , такова:

$$\alpha(u) = \left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a}, 0, u \right).$$

Поверхность вращения, профилем которой служит цепная линия, называется *катеноидом*. Параметризация катеноида, полученного вращением профиля $\alpha(u)$ вокруг оси OZ , такова (см. п. 29):

$$f(u, v) = \left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u \right),$$

где $u \in \mathbf{R}$ и $v \in (-\pi, \pi)$. Если же пожертвовать инъективностью отображения $f(u, v)$, то можно расширить область изменения второго параметра и считать, что $v \in (-\infty, +\infty)$. Катеноид изображен на рис. 34.4.

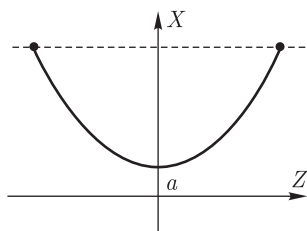


Рис. 34.3. Цепная линия

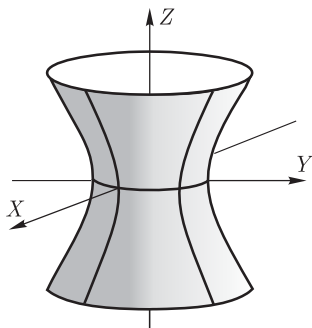


Рис. 34.4. Катеноид

¹⁾ А вовсе не параболой, как ошибочно думал в свое время Галилео Галилей.

Стандартный базис касательного пространства катеноида:

$$f_u = {}^t \left(\operatorname{sh} \frac{u}{a} \cos v, \operatorname{sh} \frac{u}{a} \sin v, 1 \right),$$

$$f_v = {}^t \left(-a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, 0 \right).$$

Матрица первой фундаментальной формы катеноида выглядит следующим образом:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} & 0 \\ 0 & a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} \end{bmatrix}.$$

Вторая поверхность. Пусть прямая, первоначально лежащая на оси OX , равномерно вращается вокруг оси OZ и, оставаясь ей перпендикулярной, одновременно поднимается по оси OZ на высоту, пропорциональную углу поворота. Поверхность, заметаемая этой прямой, называется *геликоидом*. Очевидно, что геликоид целиком состоит из прямых (прямолинейных образующих), поэтому он относится к классу так называемых *линейчатых поверхностей*. Геликоид изображен на рис. 34.5. Он похож на винтовую лестницу или шнек от мясорубки.

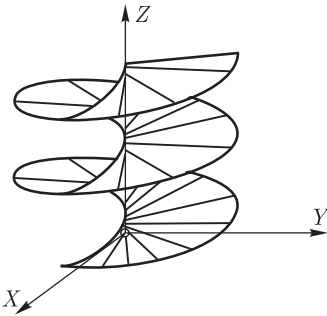


Рис. 34.5. Геликоид

Если u — параметр на прямолинейной образующей геликоида, а v — угол поворота вокруг оси OZ , то параметризация геликоида такова:

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av),$$

где $(u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Стандартный базис касательного пространства геликоида:

$$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0),$$

$$f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, a).$$

Матрица первой фундаментальной формы геликоида выглядит следующим образом:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{bmatrix}.$$



А теперь внимание! Устроим диффеоморфизм $\Phi : \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{R}^2$ (внизу я приписал обозначения переменных в этих двух разных экземплярах пространства \mathbf{R}^2), действующий по следующему правилу:

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = {}^t\left(a \operatorname{sh} \frac{\tilde{u}}{a}, \tilde{v}\right),$$

т. е. выполним на геликоиде замену параметров:

$$u = a \operatorname{sh} \frac{\tilde{u}}{a}, \quad v = \tilde{v}.$$

Матрица Якоби отображения Φ такова:

$$[d\Phi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\tilde{u}}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Видно, что $d\Phi_p$ — невырожденный линейный оператор, т. е. Φ действительно является диффеоморфизмом. Вычислим матрицу первой фундаментальной формы геликоида после такой замены параметров:

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{ij}) &= {}^t[d\Phi] \cdot (g_{ij}) \cdot [d\Phi] = \\ &= {}^t \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\tilde{u}}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(a \operatorname{sh} \frac{\tilde{u}}{a}\right)^2 + a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\tilde{u}}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= {}^t \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\tilde{u}}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\tilde{u}}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\tilde{u}}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{ch}^2 \frac{\tilde{u}}{a} & 0 \\ 0 & a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\tilde{u}}{a} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Даже невооруженным взглядом видно, что после замены параметров матрица первой фундаментальной формы геликоида отличается от матрицы первой фундаментальной формы катеноида только обозначением переменных! Потрясающий результат — катеноид изометричен геликоиду! Причем катеноид можно целиком так наложить на геликоид, что меридианы катеноида лягут на

прямолинейные образующие геликоида. ¹⁾ Внутренние геометрии этих совершенно непохожих поверхностей совпадают. Тараканы, живущие на такой поверхности, могут спорить до хрипоты, на чем они, собственно, живут — на геликоиде или катеноиде, но узнать им этого принципиально не дано.

Этот удивительный пример особенно остро показывает, что для описания поверхностей недостаточно свойств одной только внутренней геометрии — слишком уж непохожие поверхности могут иметь одинаковые внутренние свойства. Нам необходимы инструменты, с помощью которых можно было бы взглянуть на поверхность снаружи, из окружающего пространства. Изготовление таких инструментов и взгляд на поверхности из окружающих пространств — тема следующего параграфа.

Задачи и упражнения



1. Докажите, что любая цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости.
2. Докажите, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости.
3. Докажите, что винтовая поверхность

$$f(u, v) = {}^t\left(u \cos v, u \sin v, a \left(\ln \frac{u}{a}\right) + av\right)$$

локально изометрична поверхности вращения

$$f(\rho, \varphi) = {}^t(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, a\sqrt{2} \ln(\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2})).$$

4. Поверхность $f(u, v) : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, матрица первой фундаментальной формы которой может быть приведена к виду

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \phi(u) + \varphi(v) & 0 \\ 0 & \phi(u) + \varphi(v) \end{bmatrix},$$

где ϕ, φ — некоторые скалярные функции, называется *поверхностью Лиувилля*. Докажите, что любая двумерная поверхность вращения $\tilde{f} : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ локально изометрична некоторой поверхности Лиувилля.

¹⁾ Здесь мы считаем катеноид инъективной поверхностью вращения, образ которой не содержит линии перемены дат, т. е. $v \in (-\pi, \pi)$. Разверните экватор катеноида в прямолинейный отрезок, тогда катеноид самостоятельно (в силу нерастяжимости пленки) перекрутится и примет форму куска геликоида, а этот развернутый экватор станет отрезком оси OZ — оси геликоида. Мысленно представить себе эту операцию весьма и весьма сложно.

5. Рассмотрим два тора:

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$$

и

$$f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u),$$

где $a > b$.

Совпадают ли их внутренние геометрии?

§ 7. ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Определение 35.1. Поверхность $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, имеющая размерность на единицу меньше размерности окружающего пространства, называется *гиперповерхностью* (или *поверхностью коразмерности один*).¹⁾

Хороший пример гиперповерхностей дают двумерные поверхности в трехмерном пространстве $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ — собственно с этого наиболее наглядного и практически важного случая исторически началось построение всей геометрии поверхностей.

Содержание внешней геометрии поверхности составляют те свойства, которые обусловлены ее расположением в окружающем пространстве. В этой книжке мы ограничимся только рассмотрением внешней геометрии гиперповерхностей $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, так как этот случай является наиболее простым и, при $n = 2$, еще и наглядным. В силу соображений, которые мы уже обсуждали в п. 16, изучение гиперповерхностей более доступно, чем исследование поверхностей коразмерности больше единицы — именно на гиперповерхностях легко определить понятие нормального вектора. Именно для коразмерности один срабатывают мощные идеи Гаусса, которые и приведут нас к успеху.

35. Нормальное гауссово поле. Дифференциал нормального отображения

Определение 35.2. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — произвольная поверхность. *Векторным полем вдоль поверхности f* называется гладкое отображение

$$\vec{X} : U \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m.$$

Если внимательно посмотреть на это определение, становится видно, что по большому счету, векторное поле $\vec{X} : U \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^m$

¹⁾ Ясно, что в обозначении гиперповерхностей можно не указывать пространство, в котором находится область определения U и писать просто $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$.

вдоль поверхности f никакого отношения к самой поверхности f не имеет! Поле — само по себе, поверхность — сама по себе. Общая у них только область определения $U \subseteq \mathbf{R}^n$ и другой связи между полем и поверхностью нет. Ничего страшного — это распространенное явление в абстрактных разделах дифференциальной геометрии. Однако мы будем более конкретны и, чтобы предотвратить ужас непонимания, договоримся считать, что вектор $\vec{X}(u)$ отложен от точки $f(u)$ для любого $u \in U$ (см. рис. 35.1 — «Ёж»). Как я уже говорил ранее, эта договоренность обусловлена, в основном, соображениями удобства и наглядности. Впрочем, иногда бывает полезно откладывать вектор $\vec{X}(u)$ от какой-нибудь другой точки (как это делал Гаусс, определяя сферическое отображение — см. п. 16).

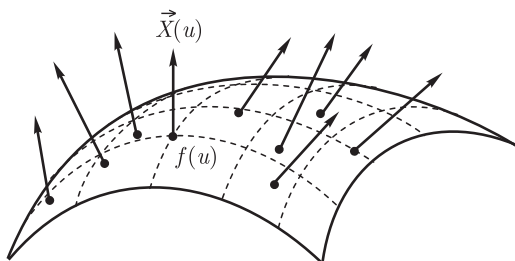


Рис. 35.1. «Ёж»

Определение 35.3. Векторное поле $\vec{X} : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ вдоль поверхности f называется *касательным*, если

$$\forall u \in U \quad \vec{X}(u) \in T_u f.$$

Таким образом, векторное поле \vec{X} является касательным, если в любой точке $u \in U$ вектор $\vec{X}(u)$ является касательным вектором поверхности f (см. рис. 35.2 — «Причесанный ёж»). При обозначении касательных векторных полей стрелочку над векторами обычно не ставят и пишут просто $X(u)$.

Вопросы существования касательного векторного поля вдоль поверхностей весьма непросты и чрезвычайно интересны, а изучение касательных полей преподносит немало сюрпризов. Чего стоит только одна знаменитая теорема Пуанкаре о «волосатом шаре», которая утверждает, что на двумерной сфере \mathbf{S}^2 не может существовать гладкого касательного векторного поля, которое ни в одной точке не обращается в нуль. Оказывается, волосатый бильярдный шар невозможно гладко причесать (т. е. располо-

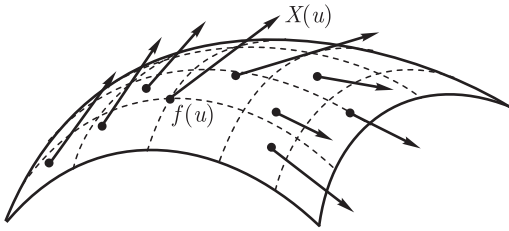


Рис. 35.2. «Причесанный ёж»

жить все волосики по касательной к шару) — хоть в одной точке да обязательно будет вихор и волосок в этой точке будет торчать. Если рассмотреть векторное поле скоростей движения воздушных масс на поверхности Земли, то теорема Пуанкаре для метеорологов означает, что на земном шаре в каком-нибудь месте обязательно имеется циклон, а в центре циклона скорость ветра равна нулю.¹⁾ К сожалению, мы не имеем возможности в этой книжке сколько-нибудь подробно обсуждать эти чрезвычайно интересные и полезные вопросы.

Определение 35.4. Векторное поле $\vec{X} : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ вдоль поверхности f называется *нормальным*, если

$$\forall u \in U \quad \vec{X}(u) \in (T_u f)^\perp.$$

Таким образом, векторное поле \vec{X} является нормальным, если в любой точке $u \in U$ вектор $\vec{X}(u)$ перпендикулярен касательному пространству к поверхности в этой точке (см. рис. 35.3 — «Ёж в ужасе»). При записи нормальных векторных полей договоримся всегда ставить стрелочки над векторами, т. е. писать $\vec{X}(u)$.

Чтобы хорошо понимать дальнейший текст, нужно вспомнить (см. п. 4), что всякое евклидово пространство раскладывается в прямую сумму произвольного подпространства и его ортогонального дополнения:

$$\mathbf{R}^m = \vec{V} \oplus \vec{V}^\perp \quad \text{и} \quad m = \dim \vec{V} + \dim \vec{V}^\perp.$$

¹⁾ Впрочем, теорема Пуанкаре ничего не говорит о том, где этот циклон находится, а лишь утверждает его существование — именно поэтому метеорологам совершенно бессмысленно использовать теорему «о волосатом шаре» в своей повседневной работе. Хотя, признаться, у меня иногда складывается впечатление, что наши синоптики только этой теоремой и пользуются.

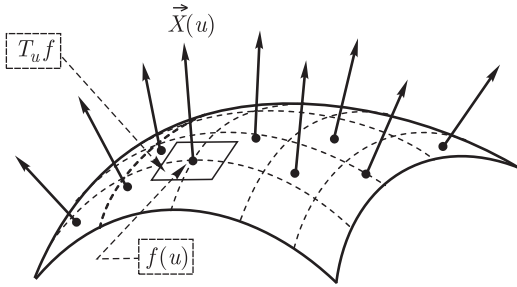


Рис. 35.3. «Ёж в ужасе»



Замечание 35.1. Совокупность всех центроаффинных векторных пространств $(T_u f)^\perp$ для рассматриваемой поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (более точно — совокупность пар (u, \vec{n}) , где $u \in U$ и $\vec{n} \in (T_u f)^\perp$) иногда называют *нормальным расслоением поверхности* и обозначают через $\nu_U f$. Векторы из ортогональных дополнений $(T_u f)^\perp$ называются *нормальными векторами* поверхности f . Пространство $(T_u f)^\perp$ называется *нормальным пространством поверхности f в точке $u \in U$* . Расслаивающая проекция нормального расслоения $\pi : \nu_U f \rightarrow f(U)$ ставит в соответствие каждому нормальному вектору поверхности ту точку, от которой он отложен. Типовым стандартным слоем нормального расслоения является векторное пространство $\vec{\mathbf{R}}^{m-n} \cong (T_u f)^\perp$ размерности $m - n = \dim T_{f(u)} \mathbf{R}^m - \dim T_u f$. Число $m - n$ называется *коразмерностью поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$* .



Легко понять, что в случае гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, вложенной в пространство \mathbf{R}^{n+1} , ортогональное дополнение $(T_u f)^\perp$ каждого касательного пространства *одномерно*, поскольку $T_{f(u)} \mathbf{R}^{n+1} = T_u f \oplus (T_u f)^\perp$ и $\dim T_u f = n$ (см. рис. 35.4). Одномерность нормальных пространств играет решающую роль в исследовании внешней геометрии гиперповерхностей и во всех наших дальнейших рассмотрениях.

Если мы возьмем произвольный ненулевой нормальный вектор $\vec{n} \in (T_u f)^\perp$ гиперповерхности f , то он, в совокупности со стандартным базисом $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_u f$, образует базис $(f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{n})$ всего окружающего пространства. Если стараться говорить более точно, то нужно сказать так: совокупность векторов $(f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{n})$ образует базис пространства $T_{f(u)} \mathbf{R}^{n+1}$ или, что то же самое, совокупность $(f(u); f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{n})$ есть репер аффинного пространства \mathbf{R}^{n+1} .

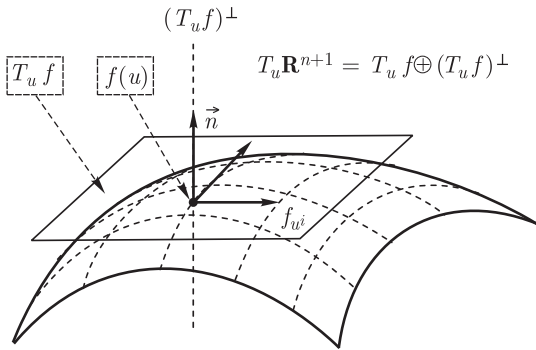


Рис. 35.4

Все сказанное дает прекрасную возможность определить для гиперповерхностей простое и естественное понятие — единичное нормальное векторное поле.


Лемма 35.1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — n -мерная инъективная гиперповерхность. Тогда вдоль f существует и единственно нормальное векторное поле $\vec{N} : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ такое, что в любой точке $u \in U$ выполнено:

- 1) $|\vec{N}(u)| \equiv 1$, т. е. векторное поле \vec{N} единичное;
- 2) $\det[f_{u^1}(u), f_{u^2}(u), \dots, f_{u^n}(u), \vec{N}(u)] > 0$, то есть базис $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{N}$ пространства $T_{f(u)}\mathbf{R}^{n+1}$ положительно ориентирован.

Доказательство. Сформулированная лемма фактически доказана в п. 6 этой книжки, где я рассказывал про обобщенное векторное произведение. Действительно, пусть $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ — стандартный базис $T_u f$. Тогда, очевидно, вектор

$$\vec{N}(u) = \frac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}}{|f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}|} = \frac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}}{\sqrt{g}}$$

удовлетворяет всем условиям леммы (см. п. 6). Единственность этого вектора в каждой точке следует из единственности обобщенного векторного произведения. \blacklozenge

 **Определение 35.6.** Векторное поле $\vec{N} : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, удовлетворяющее условиям доказанной леммы, называется *нормальным гауссовым полем* вдоль f или *нормальным отображением* вдоль поверхности f .

Поясняю, что делает нормальное отображение $\vec{N} : U \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^{n+1}$. Оно ставит в соответствие каждой точке $p \in U$ нормальный вектор к поверхности f единичной длины, образующий вместе с векторами стандартного базиса $T_p f$ базис $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{N}$ пространства $T_{f(p)} \mathbf{R}^{n+1}$ положительной ориентации (см. подробный рис. 35.5).

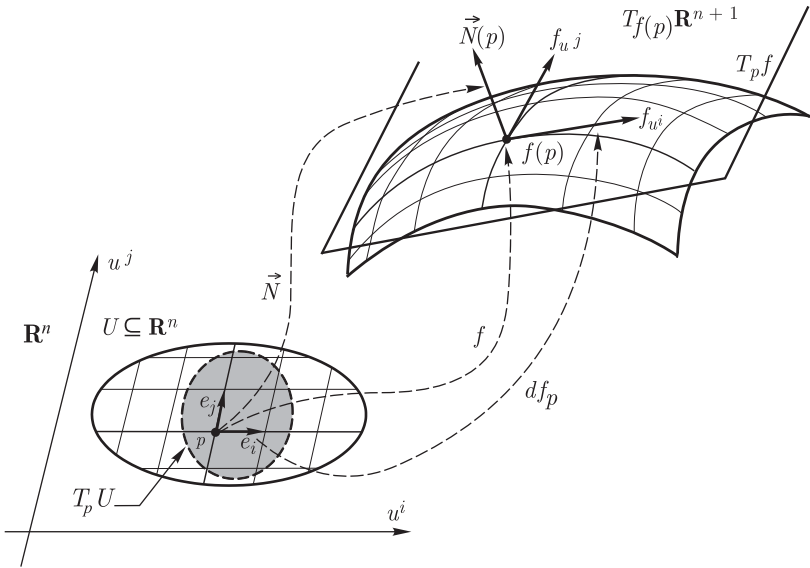


Рис. 35.5

Замечание 35.2. Ясно, что определить *единственным образом* нормальное гауссово поле для поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ коразмерности выше единицы (т. е. при $m > n + 1$) крайне затруднительно, так как ортогональные дополнения $(T_u f)^\perp$ касательных пространств не одномерны и в каждой точке поверхности одновременно существуют аж целых $m - n$ штук линейно независимых нормальных к f векторов. В такой ситуации становится непонятно, как из них выбирать «единственный и неповторимый» нормальный вектор единичной длины?! В сущности, это затруднение и является основной причиной нашего самоограничения — рассказывать в этой книжке внешнюю геометрию только для случая гиперповерхностей.¹⁾

¹⁾ Разумеется, это затруднение можно обойти, детально изучая общие нормальные расслоения поверхностей произвольной (ко)размерности, но при первоначальном знакомстве с излагаемой теорией это делать не стоит.

А теперь — счастье! Имеем для любой точки $u \in U$

$$\langle \vec{N}(u), \vec{N}(u) \rangle \equiv 1.$$

Видишь тождество — дифференцируй! Дифференцируем по любой переменной $u^i (i = 1, 2, \dots, n)$:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \equiv 0,$$

т. е. $\langle \vec{N}_{u^i}, \vec{N} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{N}_{u^i} \rangle \equiv 0$. Следовательно, $\vec{N}_{u^i} \perp \vec{N}$ в любой точке $u \in U$ — производная вектора постоянной длины ему ортогональна. Этот фундаментальный факт мироздания мы знали и раньше (см. п. 5). Но истинное счастье заключается не в очередной встрече с фундаментальным фактом мироздания, а в том, что *любая частная производная \vec{N}_{u^i} единичного нормального вектора \vec{N} , будучи ортогональна к \vec{N} , всегда лежит в касательном пространстве:*



$$\vec{N}_{u^i} \in T_u f!$$

Действительно, у гиперповерхности ортогональное дополнение касательного пространства одномерно (т. е. является нормальной прямой!) и порождено как раз единичным нормальным вектором $(T_u f)^\perp = (\vec{N})$. Значит, любой вектор, перпендикулярный нормальному вектору, лежит в касательном пространстве. В случае гиперповерхности дифференцирование «укладывает» нормальный вектор в касательное пространство!

Разберемся, что делает дифференциал $d\vec{N}_p$ нормального отображения $\vec{N} : U \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^{n+1}$. Ясно, что $d\vec{N}_p$ — линейный оператор, ведь $\vec{N}(u)$ — гладкое отображение. Пусть $u(t) : I \rightarrow U$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. По определению:

$$d\vec{N}_p(\dot{u}(t_0)) = \left(\frac{d}{dt} \vec{N}(u(t)) \right) \Big|_{t=t_0} \in T_{u(t_0)} f.$$

Следовательно, линейный оператор $d\vec{N}_p$ действует из касательного пространства $T_p U$ в касательное пространство $T_p f$:

$$d\vec{N}_p : T_p U \rightarrow T_p f.$$

Это радует. Очевидно, что если в качестве кривой $u(t) : I \rightarrow U$ взять i -ю координатную линию в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, то получим,

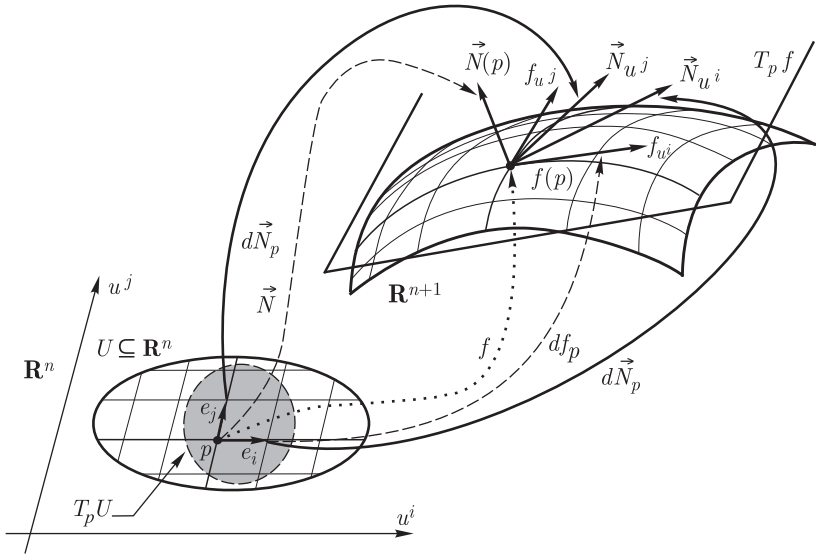


Рис. 35.6

что $d\vec{N}_p(e_i) = \vec{N}_{u^i}(p)$ — именно так дифференциал нормального отображения действует на векторы стандартного базиса. Если теперь $x \in T_p U$ — произвольный вектор и $x = x^i e_i$, то

$$d\vec{N}_p(x) = x^i \cdot d\vec{N}_p(e_i) = x^i \cdot \vec{N}_{u^i}(p).$$



Итак, дифференциал нормального отображения берет векторы $x = x^i e_i$ из касательного пространства $T_p U$ к области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ и делает из них векторы $x^i \vec{N}_{u^i}(p)$, которые лежат в касательном пространстве $T_p f$ гиперповерхности f .

Матрица дифференциала нормального отображения имеет следующий вид:

$$[d\vec{N}_p] = [\vec{N}_{u^1}(p), \vec{N}_{u^2}(p), \dots, \vec{N}_{u^n}(p)].$$

Рассмотрите, наконец, рис. 35.6, призванный хоть как-то пояснить работу дифференциала нормального отображения и на этом п. 35 закончим.

Задачи и упражнения



1. Найдите нормальное гауссово поле вдоль заданных гиперповерхностей, после чего найдите матрицу дифференциала нормального отображения в каждом случае:

а) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

б) $f(u, v, w) = {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, w)$.

2. Пусть $f : U \rightarrow R^3$ — гиперповерхность, имеющая параметризацию $f(u, v) = {}^t(u + v, u - v, uv)$, и пусть $\beta(t) = {}^t(2t, 1 - t^2)$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^2$. Найдите образы вектора скорости кривой β при действии на него линейными операторами df_p и $d\vec{N}_p$ в произвольной точке $p \in U$.

36. Основной оператор гиперповерхности и вторая фундаментальная форма

Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность и $\vec{N} : U \rightarrow \vec{\mathbf{R}}^{n+1}$ — нормальное гауссово поле вдоль f . Наша цель — ухватить и записать в каком-нибудь виде информацию о рельефе поверхности в окрестности ее некоторой точки. Используя нормальное отображение \vec{N} в роли инструмента, мы хотим выявлять и в каком-нибудь виде фиксировать данные об искривленности поверхности, чтобы бережно сохранять эти сведения для последующего изучения.

Давайте порассуждаем, подключив пространственное воображение. Если мы будем двигать нормальный вектор $\vec{N}(p)$ своим основанием по поверхности, то чем «кривее» поверхность, тем быстрее будет поворачиваться конец нормального вектора (длина-то у него всегда единичная). Следовательно, скорость поворота вектора $\vec{N}(p)$ при его движении вдоль поверхности является отличной характеристикой «кривизны» поверхности.

Высказанные соображения для нас не новость — здесь явно просматривается аналогия с кривизной плоской кривой — там кривизна есть не что иное, как скорость поворота нормального вектора кривой (обратите внимание — регулярная плоская кривая является гиперповерхностью). Кроме того, мы уже обсуждали нечто подобное в п. 16 во время нашего первоначального знакомства с идеями Гаусса о сферическом отображении.

Заморочка состоит в том, что двигать нормальный вектор по поверхности (в отличие от кривой) можно в разных направлениях и, в зависимости от направления движения, скорость поворота может быть разной. Представьте себе прямой круговой цилиндр и нормальное гауссово поле на нем — эдакое бревно с гвоздями! Если двигать основание нормального вектора \vec{N} вдоль окружности вращения (по «экватору» цилиндра), то вектор \vec{N} будет поворачиваться, и скорость такого вращения явно отлична от

нуля. А если двигать нормальный вектор вдоль прямолинейной образующей, то он будет передвигаться, оставаясь параллельным самому себе, и вовсе не будет поворачиваться! Цилиндр в направлении образующей совсем не искривлен, зато в направлении параллелей — довольно кривой.

Вывод: для полноты картины нужно рассматривать движения нормального вектора вдоль поверхности по разным направлениям, например, по координатным линиям. В дневник наблюдений нужно аккуратно записывать скорости поворота нормального вектора при его перемещении вдоль каждой координатной линии. Такие записи дадут нам более-менее полную картину изогнутости гиперповерхности в окрестности точки.

Следующее наблюдение. Скорости поворота нормального вектора $\vec{N}(p)$ при его движении вдоль координатных линий есть не что иное, как частные производные $N_{u^1}, N_{u^2}, \dots, N_{u^n}$. Как мы выяснили в предыдущем пункте, эти частные производные лежат в касательном пространстве $T_p f$. Значит, для составления дневника наблюдений за искривлением поверхности в окрестности точки $p \in U$ достаточно записывать координаты частных производных нормального вектора в стандартном базисе $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$. Если, при этом, записывать координаты частных производных $N_{u^1}, N_{u^2}, \dots, N_{u^n}$, как и полагается, в столбики, то на листочке возникнет матрица удивительного линейного оператора $f_{u^i} \mapsto N_{u^i}$, ставящего в соответствие каждому направлению f_{u^i} скорость поворота N_{u^i} нормального вектора \vec{N} при его движении в этом направлении! Полезный вывод!

Теперь подойдем к делу более строго и сурово, с точки зрения серьезных математиков. Соберем весь наш интеллектуальный потенциал в единый кулак понимания и рассмотрим рис. 36.1. На нем пунктирными стрелками изображена работа двух линейных операторов — дифференциала df_p гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ и дифференциала $d\vec{N}_p$ нормального отображения вдоль f . Оба оператора на рис. 36.1 работают с вектором $e_i \in T_p U$, взятым на этом рисунке исключительно для примера в качестве подопытного кролика. Кроме того, на этом рисунке сплошной стрелкой изображена работа отображения $(df_p)^{-1}$, обратного к df_p . Мы помним (см. п. 28), что $df_p : T_p U \rightarrow T_p f$ — изоморфизм линейных пространств, поэтому обратное отображение $(df_p)^{-1} : T_p f \rightarrow T_p U$ является невырожденным линейным оператором.

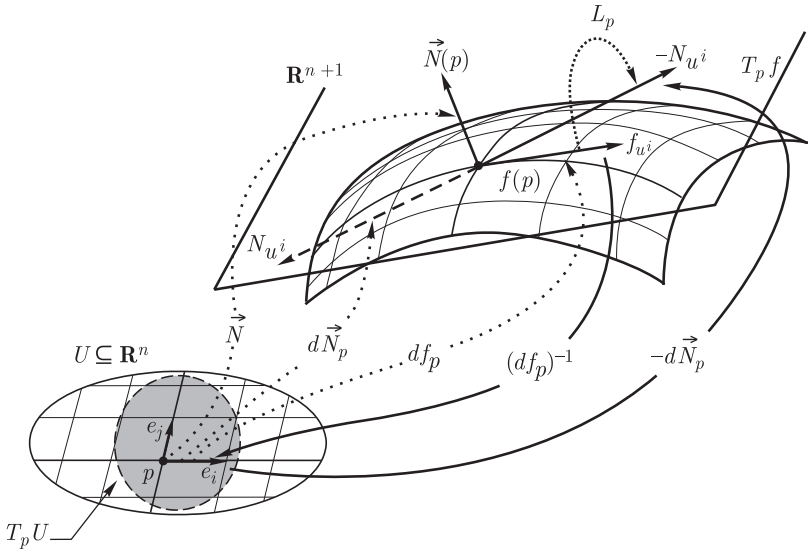


Рис. 36.1

Перед нами возникает прекрасная и уникальная ¹⁾ возможность — определить некоторый линейный оператор L_p из $T_p f$ в $T_p f$ способом «хождения» по жирным стрелкам на рис. 36.1. Смотрите внимательно. Сначала на вектор $f_{u^i} \in T_p f$ действует оператор $(df_p)^{-1}$, который делает из него вектор $e_i \in T_p U$, т. е. находит прообраз вектора f_{u^i} . Затем за работу берется дифференциал нормального отображения $d\vec{N}_p$ — он снова укладывает результат работы оператора $(df_p)^{-1}$ обратно в касательное пространство — получается вектор $d\vec{N}_p(e_i) = N_{u^i}$. Затем мы, хомосапиенсы, исходя из некоторых своих соображений удобства, ставим перед результатом знак минус (об этом минусе — чуть позже).



Итог. В результате последовательной совместной работы отображений $(df_p)^{-1}$ и $-d\vec{N}_p$ рождается линейный оператор L_p , действующий в касательном пространстве $T_p f$ — на рисунке он изображен жирной пунктирной стрелкой.

Для порядка подчеркну очевидный факт, что рожденное отображение $L_p = -d\vec{N}_p \circ (df_p)^{-1}$, будучи композицией двух линейных операторов $(df_p)^{-1}$ и $d\vec{N}_p$, действительно является линейным оператором.

¹⁾ В силу коразмерности один.

Этот оператор как раз и будет (условно, в сжатом виде) содержать в себе интересующую нас информацию — направления движения нормального вектора и скорости его поворота в этих направлениях. Направления движения — это базисные векторы f_{u^i} стандартного базиса $T_p f$ (касательные к координатным линиям), а скорости поворота — это частные производные N_{u^i} единичного нормального вектора. Видно, что значения оператора L_p на базисных векторах f_{u^i} касательного пространства как раз и есть векторы $-N_{u^i}$, т.е. скорости поворота нормального вектора с обратным знаком. Определяя оператор L_p , мы одним ударом решаем задачи обнаружения, записи и сохранения в привычном (и доступном для изучения виде) нужной информации об изогнутости поверхности. А уж изучать линейные операторы мы умеем, у нас в арсенале есть мощные орудия линейной алгебры!



Определение 36.1. Линейный оператор $L_p : T_p f \rightarrow T_p f$, действующий по правилу

$$L_p = -d\vec{N}_p \circ (df_p)^{-1},$$

называется *основным оператором гиперповерхности* $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ или *оператором Петерсона–Вейнгартена*.¹⁾

Как уже отмечалось, знак минус в этом определении стоит из некоторых соображений удобства, которые вскроются позже. Я предлагаю пока воспринимать этот минус философски-созерцательно — ведь мы имеем право определять что угодно и как угодно, лишь бы определяемое понятие не было противоречивым. Но на экзамене я обязательно спрошу — зачем в определении основного оператора гиперповерхности стоит минус? Какие такие удобства он обеспечивает?²⁾

¹⁾ Карл Михайлович Петерсон (1828–1881) — российский математик, по национальности латыш, родился в Риге, окончил университет в городе Тарту (в те времена город назывался Дерпт) в Эстонии. Преподавал математику в Петропавловском училище в Москве. Автор большого числа работ по дифференциальной геометрии и по дифференциальным уравнениям. Получил докторскую степень «*Uponoris causa*», т.е. за выдающиеся заслуги без официальной защиты диссертации. Юлиус Вейнгартен (1836–1910) — немецкий математик польского происхождения, родился в Берлине, закончил Берлинский университет (слушал лекции у Дирихле). Автор замечательных работ по дифференциальной геометрии поверхностей.

²⁾ Ясно, что для ответа на такой вопрос нужно хорошо понимать материал всего параграфа про внешнюю геометрию гиперповерхностей. Для сильно заинтригованных читателей сразу скажу ответ — вы его запомните, а поймете потом. Минус нужен для того, чтобы собственные числа основного оператора

Таким образом, мы будем далее изучать основной оператор гиперповерхности, чтобы потом, используя его как орудие труда, изучать с его помощью саму гиперповерхность.



По определению оператора L_p имеем

$$L_p(f_i) = -N_{u^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Собственно, эти равенства можно было бы и принять за определение оператора L_p , поскольку для задания линейного оператора в линейном пространстве достаточно указать его значения на базисных векторах. Однако такой путь ничего не сказал бы нам о «внутреннем устройстве» L_p и его связи с операторами df_p и $d\vec{N}_p$.

Если теперь $X \in T_p f$ — произвольный вектор и $X = x^i f_{u^i}$ — его разложение по стандартному базису касательного пространства, то результат действия оператора L_p на вектор $X \in T_p f$ вычисляется так:

$$L_p(X) = L_p(x^i f_{u^i}) = -x^i N_{u^i}.$$



Определение 36.2. Второй фундаментальной формой гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ в точке $p \in U$ называется билинейная форма $\mathbf{II}_p(X, Y)$, определенная в касательном пространстве $T_p f$ следующим образом:

$$\forall X, Y \in T_p f \quad \mathbf{II}_p(X, Y) = \langle L_p(X), Y \rangle.$$

Замечание 36.1. Отображение $\mathbf{II}_p(X, Y) : T_p f \times T_p f \rightarrow \mathbf{R}$ является *билинейной* формой. Действительно, линейность этого отображения по второму аргументу очевидна, так как скалярное произведение линейно по второму аргументу. А вот линейность формы $\mathbf{II}_p(X, Y)$ по первому аргументу вызвана к жизни линейностью оператора L_p :

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_p(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) &= \langle L_p(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2), Y \rangle = \\ &= \langle \alpha_1 L_p(X_1) + \alpha_2 L_p(X_2), Y \rangle = \alpha_1 \langle L_p(X_1), Y \rangle + \alpha_2 \langle L_p(X_2), Y \rangle = \\ &= \alpha_1 \mathbf{II}_p(X_1, Y) + \alpha_2 \mathbf{II}_p(X_2, Y). \end{aligned}$$

являлись главными нормальными кривизнами гиперповерхности. Если бы минуса не было, то потребовались бы некоторые дополнительные рассуждения, чтобы определить знаки главных нормальных кривизн в соответствии с их геометрическим смыслом.

Таким образом, вторая фундаментальная форма — это *билинейная форма!* В математической среде бытует жаргон называть форму $\mathbf{II}_p(X, Y)$ «второй квадратичной формой». Я уже неоднократно просил вас не путать билинейные формы с квадратичными и не допускать такой вольности речи, по крайней мере, у меня на экзамене.

З а м е ч а н и е 36.2. Часто второй фундаментальной формой гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ (без указания точки) называют совокупность форм $\mathbf{II}_p(X, Y)$ по всем точкам $p \in U$, рассматриваемую на всем касательном расслоении $T_U f$ (в каждом слое — своя форма). Пусть $u(t) : I \rightarrow U$ — некоторая кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, тогда $\alpha(t) = f(u(t))$ — кривая вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. Совершенно естественно потребовать, чтобы при движении точки $f(u(t))$ по кривой α на поверхности форма $\mathbf{II}_p(X, Y)$ в соответствующих слоях $T_{u(t)} f$ изменялась плавно и постепенно, т. е. гладко. Поэтому когда говорят о второй фундаментальной форме в касательном расслоении, обычно постулируют гладкость (класса не ниже C^2) отображения $\mathbf{II}_p(X, Y) : (U \times T_p f \times T_p f) \rightarrow R$ по аргументу $p \in U$, т. е. по переменным u^1, u^2, \dots, u^n .

З а м е ч а н и е 36.3. Видно, что вторая фундаментальная форма внешне похожа на первую фундаментальную форму (скалярное произведение) — вот только первый аргумент в скалярном произведении «подпорчен» оператором L_p . Может возникнуть соблазн обобщения и желание пойти дальше в своих фантазиях. А что, если определить *третью фундаментальную форму* — тоже скалярное произведение, в котором уже оба аргумента «подпорчены» оператором L_p :

$$\forall X, Y \in T_p f \quad \mathbf{III}_p(X, Y) = \langle L_p(X), L_p(Y) \rangle ?$$

Однако на этом обманчиво-заманчивом пути механистического обобщения мало что получится. Можно доказать, что в случае гиперповерхности размерности 2 такая «третья» фундаментальная форма будет даже линейно выражаться через первую и вторую фундаментальные формы и, следовательно, не даст никакой новой информации для изучения гиперповерхностей.¹⁾

¹⁾ Опять-таки, забегая вперед, чтобы слишком усердные читатели не пытались прямо сейчас получить линейное выражение третьей формы через первую и вторую, напишу это выражение в явном виде:

$$\mathbf{III}_p = 2H \cdot \mathbf{II}_p - K \cdot \mathbf{I}_p,$$

А теперь — внимание! Основополагающие свойства второй фундаментальной формы и основного оператора гиперповерхности приведены в следующей теореме.



Теорема 36.1. Для произвольной гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$:

- 1) вторая фундаментальная форма $\mathbf{II}_p(X, Y)$ симметрична;
- 2) основной оператор L_p — самосопряженный.

Доказательство.

1). Симметричность $\mathbf{II}_p(X, Y)$. Нам необходимо доказать, что для любых векторов $X, Y \in T_p f$ выполнено $\mathbf{II}_p(X, Y) = \mathbf{II}_p(Y, X)$. Возьмем векторы $X, Y \in T_p f$, и пусть $X = x^i f_{u^i}$, $Y = y^j f_{u^j}$ — их разложения по стандартному базису касательного пространства. Имеем

$$\mathbf{II}_p(X, Y) = \mathbf{II}_p(x^i f_{u^i}, y^j f_{u^j}) = x^i y^j \mathbf{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j}).$$

Совершенно естественно возникли величины $\mathbf{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j})$ — значения второй фундаментальной формы на базисных векторах. В полном соответствии с п. 3 эти величины называются коэффициентами второй фундаментальной формы и обозначаются через

$$h_{ij} = \mathbf{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j}).$$

По определению,

$$h_{ij} = \mathbf{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle.$$

Равенства $h_{ij} = -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle$ дают один из возможных способов практического вычисления этих коэффициентов. Нужно сначала вычислить нормальный вектор \vec{N} (т. е. найти обобщенное векторное произведение $f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}$ и нормировать его), затем найти частные производные нормального вектора и вычислить всевозможные скалярные произведения $\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle$, не забыв поставить перед ними знак минус.

Матрица второй фундаментальной формы, таким образом, есть $[\mathbf{II}_p] = (h_{ij})$. Билинейная форма симметрична тогда и толь-

где H — средняя кривизна гиперповерхности, K — полная гауссова кривизна гиперповерхности (обе эти кривизны тоже вычисляются с помощью первой и второй фундаментальных форм). Видно, что для отыскания такой зависимости нужно почитать эту книжку дальше.

ко тогда, когда ее матрица в некотором базисе симметрична (см. п. 3). Сейчас мы докажем симметричность матрицы (h_{ij}) .

Рассмотрим очевидное тождество $\langle \vec{N}, f_{uj} \rangle \equiv 0$, так как $\vec{N} \perp T_p f$. Видишь тождество — дифференцируй! Дифференцируем это тождество по переменной u^i :

$$\langle N_{u^i}, f_{uj} \rangle + \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle \equiv 0.$$

Значит,



$$h_{ij} = -\langle N_{u^i}, f_{uj} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle.$$

Это, между прочим, еще один эффективный способ вычисления коэффициентов второй фундаментальной формы. Можно не искать частные производные нормального вектора, а искать вторые частные производные гиперповерхности f . Выбирайте то, что вам больше нравится! Разумеется, каждый раз нужно выбирать тот способ, который проще для данной поверхности — какие производные легче считать, те и считать.

А теперь вспомним замечательный факт из курса математического анализа — если смешанные частные производные $f_{u^i u^j}$ и $f_{u^j u^i}$ (разный порядок дифференцирования!) существуют и непрерывны, то они совпадают:

$$f_{u^i u^j} = f_{u^j u^i}.$$



Этот факт и является основной причиной симметричности второй фундаментальной формы гиперповерхности: ¹⁾

$$h_{ij} = -\langle N_{u^i}, f_{uj} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^i u^j} \rangle = -\langle N_{u^j}, f_{ui} \rangle = h_{ji}.$$

Итак, вторая фундаментальная форма гиперповерхности всегда симметрична:

$$\mathbf{II}_p(X, Y) = \mathbf{II}_p(Y, X).$$

2). Самосопряженность L_p . Морщим лоб и самостоятельно вспоминаем определение самосопряженного оператора из курса линейной алгебры. Вспомнили? Тогда понятно, что необходимо проверить выполнение равенства

$$\langle L_p(X), Y \rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle$$

для любых двух векторов $X, Y \in T_p f$.

¹⁾ Разумеется, класса гладкости не ниже C^2 .

А это равенство есть совершенно очевидное следствие только что доказанной симметричности второй фундаментальной формы:

$$\langle L_p(X), Y \rangle = \mathbf{II}_p(X, Y) = \mathbf{II}_p(Y, X) = \langle L_p(Y), X \rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle.$$

Вот и все. ◆

Приведу еще раз вычислительные формулы для коэффициентов второй фундаментальной формы:

$$h_{ij} = -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle.$$

Если вспомнить определение нормального вектора \vec{N} :

$$\vec{N} = \frac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}}{|f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}|} = \frac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}}{\sqrt{g}},$$

где $g = \det(g_{ij})$ — определитель матрицы первой фундаментальной формы (определитель матрицы Грама), то легко получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{STOP} \quad h_{ij} &= -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle = \\ &= \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle = \left\langle \frac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}}{\sqrt{g}}, f_{u^j u^i} \right\rangle = \\ &= \frac{\langle f_{u^1} \times f_{u^2} \times \dots \times f_{u^n}, f_{u^i u^j} \rangle}{\sqrt{g}} = \frac{\det[f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, f_{u^i u^j}]}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Обведите у себя в тетрадке эти формулы в рамочку, и каждый раз используйте для практического вычисления ту формулу, которая для данной поверхности требует меньших вычислений.

Анахронизм! Для случая гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, т.е. для наиболее наглядного случая, в традиционной литературе используются наименее наглядные обозначения для коэффициентов второй фундаментальной формы:

$$h_{11} = L, \quad h_{12} = h_{21} = M, \quad h_{22} = N.$$

Более того, встречаются обозначения и того хлеще:

$$h_{11} = D, \quad h_{12} = h_{21} = D', \quad h_{22} = D''.$$

Зато вычислительные формулы для коэффициентов второй фундаментальной формы в случае гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ выглядят совсем привычно и не столь пугающе:



$$\begin{aligned}
 h_{ij} &= -\langle N_{u^i}, f_{v^j} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^i u^j} \rangle = \\
 &= \frac{\langle f_u \times f_v, f_{u^i u^j} \rangle}{\sqrt{g}} = \frac{\det[f_u, f_v, f_{u^i u^j}]}{\sqrt{g}} = \frac{(f_u, f_v, f_{u^i u^j})}{\sqrt{g}}.
 \end{aligned}$$

Здесь (u, v) — традиционные обозначения двух поверхностных координат; (f_u, f_v) — стандартный базис касательной плоскости $T_p f$. Числитель $(f_u, f_v, f_{u^i u^j})$ есть смешанное произведение (определитель третьего порядка) векторов стандартного базиса на вторые производные $f_{u^i u^j}$ гиперповерхности, для обозначения которых все-таки приходится использовать обозначения переменных с индексами.

Давайте закончим п. 36 важнейшим следствием из основной теоремы этого пункта.



Следствие. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — произвольная гиперповерхность, L_p — ее основной оператор. Тогда:

- 1) все собственные значения оператора L_p вещественны;
- 2) в пространстве $T_p f$ существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора L_p .

Доказательство. См. свойства самосопряженных операторов в евклидовых пространствах — линейная алгебра, первый курс.



Сформулированное следствие является основой всего дальнейшего изучения внешней геометрии гиперповерхностей с помощью оператора L_p . Глубинный смысл этого следствия познается не сразу. Нужны годы размышлений и внимательное прочтение следующих пунктов, которые непосредственно базируются на утверждениях этого следствия. Идем в следующий пункт.

Задачи и упражнения



1. Найдите вторую фундаментальную форму следующих гиперповерхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;

б) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

в) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2)$;

г) $f(u, v) = {}^t(R \cos v, R \sin v, u)$;

д) $f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$,

где $a > b$;

е) $z = \varphi(x, y)$;

$$\text{ж) } f(u, v) = {}^t \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) + \cos u \right) \right);$$

$$\text{з) } f(u, v, w) = {}^t (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u, w);$$

$$\text{и) } f(u, v, w) = {}^t (u, v, w, uvw)$$

$$\text{к) } f(u, v, w) = {}^t (R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin w).$$

2. Докажите, что вторая фундаментальная форма двумерной плоскости в \mathbf{R}^3 тождественно равна нулю (при любом выборе плоскостных криволинейных координат).

3. Докажите, что если вторая фундаментальная форма гиперповерхности $z = \varphi(x, y)$ тождественно равна нулю, то эта гиперповерхность является двумерной плоскостью в \mathbf{R}^3 или ее частью.

4. Выясните самостоятельно, является ли вторая фундаментальная форма инвариантной относительно замены параметров на гиперповерхности?

37. Матрица основного оператора гиперповерхности. Кривизны и главные направления. Линии кривизны

В этом пункте мы начнем изучать свойства гиперповерхности, пользуясь ее основным оператором как орудием труда. С его помощью мы определим самые популярные числовые характеристики гиперповерхностей — кривизны разных сортов и мастей, а также введем некоторые другие интересные понятия.

Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность. Для того чтобы изучать гиперповерхность с помощью основного оператора, для начала было бы неплохо узнать его матрицу.



Лемма 37.1. В стандартном базисе $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$ матрица оператора L_p имеет вид

$$[L_p] = [\mathbf{I}_p]^{-1} \cdot [\mathbf{II}_p].$$

Совет для забывчивых студентов: порядок матриц-сомножителей легко запомнить — умножать надо матрицы форм в порядке возрастания их номеров — сначала стоит первая, потом вторая. Вот только у матрицы первой формы нужно предварительно найти обратную.

Доказательство. Пусть $[L_p] = (a_i^j)$ (помним, что нижний индекс — это номер столбца, верхний — номер строки). Мы знаем,

что i -й столбец матрицы линейного оператора есть результат действия этого оператора на i -й базисный вектор:

$$L_p(f_{u^i}) = a_i^k f_{u^k}.$$

Умножим скалярно эти равенства на базисные векторы f_{u^j} . Получим

$$\langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = \langle a_i^k f_{u^k}, f_{u^j} \rangle = a_i^k \langle f_{u^k}, f_{u^j} \rangle.$$

Теперь (как раз к месту) вспомним определения коэффициентов первой и второй фундаментальных форм:

$$h_{ij} = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = a_i^k \langle f_{u^k}, f_{u^j} \rangle = a_i^k g_{kj}.$$

Таким образом, $h_{ij} = a_i^k g_{kj}$, или $h_{ji} = g_{jk} a_i^k$. Здесь записано (т. е. расписано поэлементно) не что иное, как равенство матриц:

$$[\mathbf{II}_p] = [\mathbf{I}_p] \cdot [L_p].$$

Поскольку матрица первой фундаментальной формы $[\mathbf{I}_p]$ всегда обратима (ее определитель строго положителен — см. п. 30), можно найти обратную матрицу $[\mathbf{I}_p]^{-1}$ и умножить матричное равенство $[\mathbf{II}_p] = [\mathbf{I}_p] \cdot [L_p]$ на матрицу $[\mathbf{I}_p]^{-1}$ с левой стороны. После умножения получится

$$[L_p] = [\mathbf{I}_p]^{-1} \cdot [\mathbf{II}_p],$$

а именно это и требовалось. ◆

Уважаемые читатели! Теперь мы приступим к определению важнейших и наиболее популярных характеристик гиперповерхности.



Определение 37.1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $L_p : T_p f \rightarrow T_p f$ — ее основной оператор. Тогда:

- 1) определитель $K(p) = \det[L_p]$ называется *полной (гауссовой) кривизной гиперповерхности f в точке $p \in U$* ;
- 2) среднее арифметическое $H(p) = \frac{1}{n} \text{tr}[L_p]$ элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $[L_p]$ (где $\text{tr}(a_i^j) = \sum_i a_i^i = a_i^i$ — след матрицы (a_i^j)), называется *средней кривизной гиперповерхности f в точке $p \in U$* ;
- 3) собственные значения k_1, k_2, \dots, k_n оператора L_p (они все вещественны — см. п. 36) называются *главными нормальными кривизнами гиперповерхности f в точке $p \in U$* ;

- 4) собственные векторы X_1, X_2, \dots, X_n основного оператора L_p гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ (они все попарно ортогональны — см. п. 36) называются *главными направлениями гиперповерхности f в точке $p \in U$* .



Замечание 37.1. Все только что введенные характеристики гиперповерхности f в точке $p \in U$ основываются на понятии характеристического многочлена линейного оператора L_p . Так как характеристический многочлен линейного оператора *не меняется при замене базиса*, то введенные величины *не зависят от выбора базиса в касательном пространстве*. Это означает, что определенные величины являются «личными» свойствами основного оператора, следовательно, они являются «личными» свойствами самой гиперповерхности. В таких случаях принято говорить, что мы имеем дело с *чисто геометрическими величинами и объектами*, значение которых не зависит от выбора системы координат и произвола ученых.

Замечание 37.2. В силу самосопряженности оператора L_p в пространстве $T_p f$ имеется ортонормированный базис X_1, X_2, \dots, X_n из собственных векторов оператора L_p (см. п. 36). Известно, что в базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид, при этом на главной диагонали матрицы $[L_p]$ как раз стоят собственные значения оператора L_p , т. е. главные нормальные кривизны. След матрицы оператора и ее определитель (будучи коэффициентами ее характеристического многочлена) не меняются при замене базиса. Следовательно, мы можем сразу (используя диагональный вид матрицы оператора $[L_p]$ в базисе X_1, X_2, \dots, X_n) написать формулы, связывающие главные нормальные кривизны с полной гауссовой кривизной и со средней кривизной гиперповерхности:



$$K = k_1 k_2 \cdots k_n \text{ и } H = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \dots + k_n).$$

Чтобы немножко привыкнуть к введенным понятиям кривизн и почувствовать их естественность, приведу три простых примера. Вдумчивому читателю они скажут достаточно много.

Пример 37.1. $f = \alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ — плоская кривая единичной скорости. Это гиперповерхность. Для нее $\vec{N} = \vec{\nu}$ — нормальный вектор (гауссово нормальное поле), $\dot{\alpha}$ — базис $T_p f$.

В этом игрушечном случае имеем $L_t = -d\nu \circ (d\alpha)^{-1}$, т. е. $L_t(\dot{\alpha}) = -\dot{\nu} = k\dot{\alpha}$, так как $-\dot{\nu} = k\dot{\alpha}$ — уравнение Френе. Следо-

вательно, k есть собственное значение оператора L_t и является кривизной гиперповерхности в смысле нашего определения. И это не удивительно, ведь кривизна плоской кривой есть не что иное, как скорость поворота нормального вектора при его перемещении вдоль кривой, а именно этот эффект мы и старались отразить в определении основного оператора.

Пример 37.2. Пусть $a^1x^1 + a^2x^2 + \dots + a^{n+1}x^{n+1} = a^0$ — гиперплоскость в аффинном пространстве \mathbf{R}^{n+1} . Очевидно, что ее единичный нормальный вектор есть

$$\vec{N} = \frac{(a^1, a^2, \dots, a^{n+1})}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + \dots + (a^{n+1})^2}} = \text{const.}$$

Следовательно, $d\vec{N} \equiv \vec{0}$. Значит, основной оператор L_p для гиперплоскости является нулевым, все кривизны гиперплоскости нулевые и все направления главные. И это не удивительно — при перемещении нормального вектора своим основанием по любому направлению на гиперплоскости, конец нормального вектора не поворачивается и его угловая скорость нулевая — никаких изгибов-то у гиперплоскости нет, она же ровная!

Пример 37.3. Менее тривиальный пример. Пусть

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = R^2$$

— сфера $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^n$ радиуса R (коразмерности один) в аффинном пространстве \mathbf{R}^{n+1} .¹⁾ Центр сферы поместим в начало координат. Тогда единичный нормальный вектор направлен вдоль радиуса сферы:

$$\vec{N} = \frac{(-1)^n}{R} \cdot f.$$

Призадумайтесь самостоятельно над направлением нормального вектора — знак $(-1)^n$ поставлен так, чтобы ориентация базиса $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{N}$ оказалась положительной!

Имеем

$$d\vec{N}_p = \frac{(-1)^n}{R} \cdot df_p$$

и

$$N_{u^i} = \frac{(-1)^n}{R} f_{u^i}.$$

¹⁾ Если быть предельно точными — будем рассматривать сферу как инъективную поверхность, т. е. без «линии перемены дат» и без «полюсов».

Значит,

$$L_p(f_{u^i}) = -N_{u^i} = \frac{(-1)^{n+1}}{R} f_{u^i},$$

т. е. любой базисный вектор f_{u^i} является собственным вектором оператора L_p . Следовательно, все собственные числа оператора L_p совпадают и равны как главным нормальным кривизнам, так и, одновременно, средней кривизне n -мерной сферы:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = H = \frac{(-1)^{n+1}}{R}.$$

Таким образом, полная гауссова кривизна ¹⁾ гиперсферы $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^n$ в аффинном пространстве \mathbf{R}^{n+1} равна

$$K = \prod_{i=1}^n k_i = \frac{(-1)^{(n+1)n}}{\mathbf{R}^n} = \frac{1}{\mathbf{R}^n}.$$

Упражнение 37.1 (для творческих читателей). Помните, в п. 16 я рассказывал, что Гаусс определял полную кривизну двумерной поверхности как предел отношения размера области на единичной сфере, утыканной концами единичных нормальных векторов, к размеру исходной площадки на поверхности, с которой эти векторы были сняты и без изменения их направления перенесены в начало координат? Загляните еще раз в п. 16 и освежите в памяти «нормальное» или «сферическое» отображение Гаусса! Вот схематичная запись его действий:

$$|K| = \lim_{\substack{\text{(Размер окрестности} \\ \text{точки } T) \rightarrow 0}} \frac{\left(\begin{array}{c} \text{(Размер области на единичной сфере,} \\ \text{утыканной концами единичных} \\ \text{нормальных векторов, выходящих} \\ \text{из центра сферы)} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{(Размер окрестности)} \\ \text{точки } T \end{array} \right)}.$$

Докажите, что Гаусс в те далекие годы определил, на самом деле, модуль полной гауссовой кривизны гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ (в точке T) в смысле нашего определения!

Приведем теперь общие вычислительные формулы для полной и средней кривизн гиперповерхности, основанные на первой

¹⁾ Определитель матрицы равен произведению ее собственных значений — см. курс линейной алгебры, второй семестр.

лемме из этого пункта. Эта лемма дала нам явный вид матрицы оператора L_p в стандартном базисе касательного пространства:

$$[L_p] = [\mathbf{I}_p]^{-1} \cdot [\mathbf{II}_p].$$

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению их определителей (см. курс алгебры, первый семестр), то автоматически получается формула для вычисления полной гауссовой кривизны гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$:



$$K = \frac{h}{g},$$

где, как обычно, через $g = \det(g_{ij}) = \det[\mathbf{I}_p]$ обозначен определитель матрицы первой фундаментальной формы; а через $h = \det(h_{ij}) = \det[\mathbf{II}_p]$ обозначен определитель матрицы второй фундаментальной формы гиперповерхности.



Внимание! Наиполезнейшее соглашение! Договоримся на будущее обозначать матрицу $(g_{ij})^{-1}$, т.е. матрицу, обратную к (g_{ij}) , через (g^{ji}) . Мы будем просто *поднимать индексы* у элементов исходной матрицы, имея ввиду, конечно, что g^{ji} — это соответствующие алгебраические дополнения к элементам g_{ij} , разделенные на определитель $g = \det(g_{ij})$. Обратите внимание, что индексы в записи обратной матрицы $(g^{ji}) = (g_{ij})^{-1}$ поменялись местами, ведь матрица из алгебраических дополнений «транспонирована» по отношению к исходной.¹⁾ Как выяснится впоследствии, кроме соображений удобства в использовании обозначений Эйнштейна, такая запись обратных матриц имеет нетривиальный глубинный смысл.

Приведем теперь вычислительные формулы для средней кривизны произвольной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$:



$$H = \frac{1}{n} \text{tr}[L_p] = \frac{1}{n} \text{tr}(g^{jk} \cdot h_{kj}) = \frac{1}{n} a_k^k = \frac{1}{n} g^{ji} h_{ij},$$

так как диагональные элементы a_k^k матрицы L_p вычисляются так: $a_k^k = g^{jk} h_{kj}$ (сначала по индексу k нет суммирования!); а затем суммирование происходит по индексу k , чтобы найти сумму диагональных элементов.

¹⁾ Впрочем, в этом месте факт транспонирования для нас не столь важен, ведь матрица (g_{ij}) изначально симметрическая.

Мой вам совет — если от индексов уже начало «рябить в глазах», перемножьте на отдельном листочке мягким приятным карандашом две небольшие матрицы и найдите след их произведения — вы привыкните и почувствуете все изящество обозначений Эйнштейна.

Дань традиции. Рассмотрим теперь милый, традиционный и наглядный случай гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Пусть традиционные обозначения поверхностных координат точки будут $p(u, v) \in \mathbf{R}^2$, а $(g_{ij}) = [\mathbf{I}_p]$ и $(h_{ij}) = [\mathbf{II}_p]$ — матрицы первой и второй фундаментальной формы гиперповерхности f соответственно.

Гауссова кривизна такой гиперповерхности легко вычисляется сразу:



$$K = \frac{h}{g} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Упражнение 37.2. Найдите полную гауссову кривизну *псевдосферы* — поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, имеющей параметрическое задание

$$f(u, v) = {}^t \left(R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) + \cos u \right) \right).$$



Подивитесь результату этого упражнения и запомните его! Полная гауссова кривизна псевдосферы $K = -1/R^2$, т. е. постоянна и отрицательна!

Перемножим теперь «в лоб» матрицы $(g^{ji}) = [\mathbf{I}_p]^{-1}$ и $(h_{ij}) = [\mathbf{II}_p]$ (размера 2×2) с целью получить матрицу оператора L_p для двумерной гиперповерхности:



$$\begin{aligned} [L_p] &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{g} \cdot \begin{bmatrix} g_{22}h_{11} - g_{12}h_{21} & g_{22}h_{12} - g_{12}h_{22} \\ -g_{21}h_{11} + g_{11}h_{21} & -g_{21}h_{12} + g_{11}h_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перед вами выписанный в явном виде облик матрицы основного оператора двумерной гиперповерхности!

Упражнение 37.3 (для усидчивых). Выпишите в явном виде матрицу основного оператора L_p для гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$. Физики, которые часто работают, например, с трехмерными гиперповерхностями в четырехмерных пространствах, очень любят вычислять матрицы основного оператора в пространствах высоких размерностей. Помогите физикам!

Теперь, поскольку след матрицы (как и любой другой коэффициент ее характеристического многочлена) не изменяется при замене базиса, мы с легкостью получаем формулу для еще одной «геометрической» величины-характеристики гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ — средней кривизны. Надо аккуратно сложить диагональные элементы вычисленной матрицы L_p , поделить результат на определитель первой фундаментальной формы и не забыть двойку в знаменателе, которая тащится там со времен определения средней кривизны как среднего арифметического:



$$H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Итак, обведите в своих конспектах в рамочку эти наиболее распространенные формулы, *пригодные лишь для гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$* :



$$K = \frac{h}{g} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Эти формулы в первую очередь пригодятся вам на государственном экзамене, который предстоит в конце всего периода обучения на математико-механическом факультете!

В старых пособиях, использующих архаичные обозначения, эти формулы выглядят так:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

Выбирайте самостоятельно, какую форму записи вам легче запомнить.

Так как собственные векторы самосопряженного оператора L_p гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ образуют ортонормированный базис пространства $T_p f$, матрица оператора L_p в *базисе из собственных векторов* (главных направлений) имеет диагональный вид, причем на главной диагонали этой матрицы

стоят собственные числа оператора L_p , т. е. главные нормальные кривизны:

$$[L_p] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Вспоминая про инвариантность характеристического многочлена любой матрицы при замене базиса, в случае двумерной поверхности в трехмерном пространстве мгновенно получаем

$$\begin{cases} K = k_1 k_2, \\ 2H = k_1 + k_2. \end{cases}$$

А это наблюдение — ключ к простому и непосредственному вычислению главных нормальных кривизн k_1 и k_2 (собственных чисел оператора L_p) для двумерной гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Величины-то K и H к этому моменту уже найдены! Это значит, что кривизны k_1 и k_2 согласно теореме Виета являются корнями обычного квадратного уравнения:



$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

Решив его, вы с успехом найдете оба его вещественных корня — главные нормальные кривизны k_1 и k_2 двумерной гиперповерхности.

Давайте пока завершим рассмотрение кривизн для традиционного случая двумерных гиперповерхностей $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ и поговорим немного о главных направлениях (собственных векторах) оператора L_p в случае гиперповерхностей произвольной размерности. Вопрос: как искать главные направления?

Предложение 37.1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $p \in U$, $X = x^i f_{u^i} \in T_p f$ — ненулевой вектор, столбец координат которого есть $[X] = {}^t(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Утверждается, что:

1) X — главное направление, отвечающее главной нормальной кривизне k , тогда и только тогда, когда

$$([\mathbf{II}_p] - k \cdot [\mathbf{I}_p])[X] = 0,$$

или, что то же самое для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено

$$(h_{ij} - k \cdot g_{ij})x^j = 0;$$

2) k — главная кривизна гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ в точке $p \in U$ тогда и только тогда, когда

$$\det([\mathbf{II}_p] - k \cdot [\mathbf{I}_p]) = 0.$$

Доказательство этого предложения представляет собой простое повторение часто употребляемых утверждений курса линейной алгебры.

1). Пусть $L_p(X) = kX$, т. е. $[L_p][X] = k \cdot [X]$. Значит,

$$[\mathbf{I}_p]^{-1}[\mathbf{II}_p][X] = k \cdot [X].$$

Перенесем все в левую часть:

$$\left([\mathbf{I}_p]^{-1}[\mathbf{II}_p] - k \cdot \mathbf{1}_n\right) \cdot [X] = 0.$$

Умножим последнее равенство *слева* на матрицу $[\mathbf{I}_p]$:

$$([\mathbf{II}_p] - k \cdot [\mathbf{I}_p]) \cdot [X] = 0,$$

что, собственно, и требовалось.

2). Однородная система $([\mathbf{II}_p] - k \cdot [\mathbf{I}_p]) \cdot [X] = 0$ имеет ненулевое решение, следовательно, определитель ее матрицы равен нулю:

$$\det([\mathbf{II}_p] - k \cdot [\mathbf{I}_p]) = 0,$$

а именно это и утверждалось. ◆

Следствие. Пусть стандартный базис $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$ ортогонален. В этом случае векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ являются главными направлениями оператора L_p тогда и только тогда, когда матрица второй фундаментальной формы $[\mathbf{II}_p]$ диагональна. При этом

$$k_i = \frac{h_{ii}}{g_{ii}}.$$

Доказательство. Очевидно. Воистину очевидно. ◆

Под конец этого «алгебраического» пункта, я рискну познакомить вас с одним важным и популярным геометрическим понятием, непосредственно связанным с только что пройденным материалом. Это понятие *линий кривизны*. Они находят свое применение в геометрии, оптике, теоретической физике, да и еще

много где. В нашей книжке мы лишь коснемся этого естественного понятия для случая наиболее наглядных гиперповерхностей вида $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Кроме того, в разных задачниках полностью задач на отыскание линий кривизны как раз на двумерных поверхностях в трехмерных пространствах. (Не могу оставить без работы преподавателей, ведущих практику, а бедных студентов бросить в состоянии ужаса перед страшными задачками!)



Определение 37.2. Кривая α вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ называется *линией кривизны*, если в каждой ее точке касательный вектор $\dot{\alpha}$ является главным направлением.

Отыщем уравнения линий кривизны вдоль гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Пусть $\alpha(t) = f(u(t))$ — кривая вдоль f . Традиционные обозначения координат в области $U \subseteq \mathbf{R}^2$ таковы: $(u(t), v(t))$. Тогда разложение касательного вектора $\dot{\alpha}$ по базису $T_p f$ в анахроничных обозначениях выглядит так:

$$\dot{\alpha}(t) = f_u du + f_v dv.$$

Мы хотим, чтобы этот вектор являлся главным направлением, отвечающим собственному значению k . Это произойдет тогда, когда

$$\begin{bmatrix} h_{11} - kg_{11} & h_{12} - kg_{12} \\ h_{21} - kg_{21} & h_{22} - kg_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перепишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{cases} h_{11} du + h_{12} dv = k(g_{11} du + g_{12} dv), \\ h_{21} du + h_{22} dv = k(g_{21} du + g_{22} dv) \end{cases}$$

и запишем возникшую пропорциональность в виде определителя, равного нулю:

$$\begin{vmatrix} h_{11} du + h_{12} dv & h_{21} du + h_{22} dv \\ g_{11} du + g_{12} dv & g_{21} du + g_{22} dv \end{vmatrix} = 0.$$

Сделав над собой еще одно усилие, можно привести получившееся дифференциальное уравнение для нахождения линий кривизны на двумерной гиперповерхности к весьма удобному для запоминания эстетичному виду (будь оно неладно!):



$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Позвольте мне закончить этими изысканиями п. 37, но я настоятельно советую поискать на практических занятиях (под руководством опытного преподавателя!) семейства линий кривизны некоторых поверхностей. Почему линии кривизны всегда образуют на поверхностях ортогональную сеть?

Задачи и упражнения



1. Найдите матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке следующих гиперповерхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;

б) $f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin w)$;

в) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

г) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, u^2)$;

д) $f(u, v) = {}^t(R \cos v, R \sin v, u)$;

е) $f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$,
где $a > b$;

ж) $z = \varphi(x, y)$;

з) $f(u, v) = {}^t\left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u\right)$;

и) $f(u, v) = {}^t\left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + \cos u\right)\right)$;

к) $f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u, w)$;

лмн) $f(u, v, w) = {}^t(u, v, w, uvw)$.

2. Найдите главные нормальные кривизны и главные направления прямого геликоида

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$$

в произвольной точке. Убедитесь, что главные направления делят пополам углы между координатными линиями этого геликоида.

3. Найдите главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности

$$z = xy$$

в точке $A(1, 1, 1)$.

4. Найдите главные нормальные кривизны и главные направления в вершинах эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5. Найдите главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности

$$f(u, v, w) = {}^t(u, v, w, uvw)$$

в точке $p(0, 0, 0)$.

6. Найдите линии кривизны следующих гиперповерхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

б) $f(u, v) = {}^t(u^2 + v^2, u^2 - v^2, v)$;

в) $f(u, v) = {}^t\left(\frac{a}{2}(u - v), \frac{b}{2}(u + v), \frac{uv}{2}\right)$;

г) $f(u, v) = {}^t\left(u\left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3}\right), v\left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}\right), 2uv\right)$.

7. Докажите, что координатные линии поверхности

$$f(u, v) = {}^t(3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3u^2 - 3v^2)$$

являются линиями кривизны. Найдите полную и среднюю кривизны этой поверхности в произвольной точке.

8. Докажите, что одна из главных нормальных кривизн поверхности вращения $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ равна величине, обратной к длине отрезка нормали, заключенному между поверхностью и осью вращения.

9. Докажите, что две двумерные гиперповерхности пересекаются под постоянным углом тогда и только тогда, когда линия их пересечения является линией кривизны как на первой, так и на второй поверхностях.

10. Может быть, кто-нибудь из читателей сумеет найти линии кривизны на трехмерном цилиндре

$$f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u, w)?$$

38. Локальное строение гиперповерхности

В этом пункте мы выясним, как устроена гиперповерхность в достаточно малой окрестности каждой своей точки (т.е. выясним «локальное строение гиперповерхности»). Помогут нам в этом вторая фундаментальная форма и главные нормальные кривизны гиперповерхности. Кроме всего прочего, следующая теорема в какой-то степени проливает свет на геометрический смысл главных нормальных кривизн.

Теорема 38.1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, k_1, k_2, \dots, k_n — ее главные нормальные кривизны в точке $p \in U$. Тогда существует окрестность U_0 точки p и декартова прямоугольная система координат такие, что $p \in U_0 \subseteq U$ и $f(U_0)$ является графиком функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(k_1(x^1)^2 + k_2(x^2)^2 + \dots + k_n(x^n)^2) + o(|x^1|^2 + |x^2|^2 + \dots + |x^n|^2),$$

где $x = {}^t(x^1, x^2, \dots, x^n) \in U_0$.

Доказательство. Оператор L_p — самосопряженный, следовательно, в касательном пространстве $T_p f$ есть ортонормированный базис X_1, X_2, \dots, X_n из главных направлений оператора L_p , т. е. $L_p(X_i) = k_i X_i$. Следовательно, $(X_1, X_2, \dots, X_n, \vec{N})$ — ортонормированный базис всего окружающего пространства $T_{f(p)} \mathbf{R}^{n+1}$ (см. рис. 38.1).

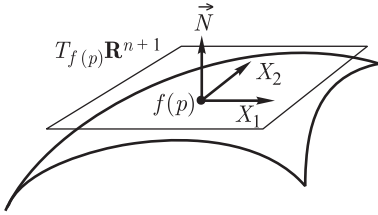


Рис. 38.1

Переобозначим векторы базиса $T_{f(p)} \mathbf{R}^{n+1}$:

$$X_1 = \vec{e}_1, \quad X_2 = \vec{e}_2, \dots, \quad X_n = \vec{e}_n, \quad \vec{N} = \vec{e}_{n+1},$$

а в качестве начала координат возьмем точку $f(p)$. Согласитесь, это очень естественная идея — перенести начало координат в точку $f(p)$ на поверхности, оси координат направить по главным (взаимно ортогональным) направлениям оператора L_p и посмотреть, что будет представлять собой гиперповерхность в новой системе координат!

Пусть $u \in U$. Имеем $f(u) = {}^t(f^1(u), \dots, f^n(u), f^{n+1}(u))$. Дифференцируем $f(u)$ в точке $p \in U$:

$$f_{u^i}(p) = {}^t(f_{u^i}^1(p), \dots, f_{u^i}^n(p), f_{u^i}^{n+1}(p)).$$

Нет сомнения, что $f_{u^i}(p) \in T_p f$, т. е. $f_{u^i}(p) \perp \vec{N}(p) = \vec{e}_{n+1} = {}^t(0, 0, \dots, 0, 1)$. Следовательно, $f_{u^i}^{n+1}(p) = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Значит, вся нижняя строка в матрице Якоби $f'(p)$ нулевая! Поскольку гиперповерхность $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ удовлетворяет условию максимальности ранга, то $\text{rang}(f'(p)) = n$. Следовательно, как раз минор из первых n строк в матрице Якоби $f'(p)$ не нулевой.

Далее возьмем точку $u \in U$ и устроим такое отображение:

$$u \xrightarrow{\Psi} (f^1(u), f^2(u), \dots, f^n(u)) = (x^1, x^2, \dots, x^n) = x.$$

По теореме об обратном отображении Ψ является диффеоморфизмом некоторой окрестности U_0 (причем $p \in U_0$) на окрестность V_0 (причем $0 \in V_0 \subseteq \mathbf{R}^n$).

Диффеоморфизм, обратный к Ψ , обозначим через Φ . Имеем

$$\Phi : V_0 \rightarrow U_0; \quad \text{кроме того, } u = \Phi(x) \text{ и } \Phi(0) = p.$$

Тогда отображение $\tilde{f} = (f \circ \Phi) : V_0 \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ есть просто замена параметров:

$$\tilde{f}(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n, f^{n+1}(\Phi(x))).$$

Образ отображения \tilde{f} — это график функции $\varphi(x) = f^{n+1}(\Phi(x))$, т. е.

$$x^{n+1} = \varphi(x).$$

Покажем, что $\varphi(x)$ — искомая функция. Вычисляем:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f^{n+1}(\Phi(x)) = f^{n+1}(p) = 0, \\ \varphi_{x^i}(0) &= \sum_j f_{u^j}^{n+1}(p) \cdot \frac{\partial u^j}{\partial x^i} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, формула Тейлора для $\varphi(x)$ выглядит следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j} \varphi_{x^i x^j}(0) \cdot x^i x^j}_{\text{квадратичная форма } H} + o(|x|^2),$$

т. е. в формуле Тейлора для $\varphi(x)$ отсутствуют члены нулевой и первой степени. Это приятно.

Ясно, что вид поверхности, т. е. форма графика функции $\varphi(x)$, определяется в окрестности нового начала координат (точки ${}^t(0, 0, \dots, 0)$) матрицей квадратичной формы H или, если угодно, самой квадратичной формой H , с точностью до бесконечно малых порядка не ниже второго.

Матрица квадратичной формы H выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{x^1 x^1} & \varphi_{x^1 x^2} & \cdots & \varphi_{x^1 x^n} \\ \varphi_{x^2 x^1} & \varphi_{x^2 x^2} & \cdots & \varphi_{x^2 x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{x^n x^1} & \varphi_{x^n x^2} & \cdots & \varphi_{x^n x^n} \end{bmatrix} = \text{Hess}(\varphi(0)),$$

и называется *гессианом*¹⁾ функции $\varphi(x)$ в точке 0.

¹⁾ Отто Гессе (1811–1874) — немецкий математик, ученик Кели и Сильвестра, был профессором в Кёнигсберге, затем в Гейдельберге и в Мюнхене.

Покажем, что в новой системе координат гессиан диагонален, т. е. квадратичная форма H имеет канонический вид.

Имеем $\tilde{f}_{x^i}(0) = \vec{e}_i$, следовательно, $\tilde{f}_{x^i}(0)$ — главные направления. А главные направления, будучи собственными векторами самосопряженного оператора L_p , образуют ортонормированный базис (матрица Грама которого единичная).

Поскольку векторы $\tilde{f}_{x^1}(0) = \vec{e}_1, \tilde{f}_{x^2}(0) = \vec{e}_2, \dots, \tilde{f}_{x^n}(0) = \vec{e}_n$ — ортогональны и являются главными направлениями, то (см. следствие из п. 37) вторая фундаментальная форма $[\mathbf{II}_p]$ — диагональна. При этом

$$k_i = \frac{h_{ii}}{g_{ii}}.$$

Но в нашем случае $g_{ii} = 1$, следовательно, $k_i = h_{ii}$. Вот и вся хитрость. Очевидно, что

$$\tilde{f}_{x^i x^j}(0) = {}^t(0, 0, \dots, 0, \varphi_{x^i x^j}(0)) = \varphi_{x^i x^j}(0) \cdot \vec{e}_{n+1}.$$

Тогда

$$h_{ij} = \langle \vec{N}, \tilde{f}_{x^i x^j} \rangle = \langle \vec{e}_{n+1}, \varphi_{x^i x^j} \cdot \vec{e}_{n+1} \rangle = \varphi_{x^i x^j}(0) = \begin{cases} k_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

— гессиан-то, как мы уже показали, диагонален!

Итак,

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i \cdot (x^i)^2}_{\varphi_0(x)} + o(|x|^2).$$

Что, собственно, и требовалось. ◆

Комментарий. График функции $\varphi_0(x)$, которая возникла в конце доказательства теоремы, аппроксимирует поверхность f в окрестности точки x с точностью до бесконечно малых второго порядка. По крайней мере, локально это позволяет усмотреть характер поведения гиперповерхности и, подключив изрядное пространственное воображение, сказать, на что она похожа?

Дань традиции. Основываясь на общей теории, рассмотрим локальное строение близких нашему сердцу двумерных гиперповерхностей $f: U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

В этом двумерном случае образ поверхности f в окрестности начала координат приблизительно совпадает с графиком функции

$$\varphi_0 = z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Для традиционного изложения вопроса мы принимаем привычные обозначения осей координат x , y и z .

В двумерном случае значения главных нормальных кривизн k_1 и k_2 полностью определяются величинами K и H — полной гауссовой кривизной и средней кривизной гиперповерхности. Это — непреложный факт, вытекающий из системы

$$\begin{cases} K = k_1 k_2, \\ 2H = k_1 + k_2. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 38.1. Пусть $K > 0$. Это значит, что график функции φ_0 — эллиптический параболоид в окрестности точки $p \in U$. Точка $f(p)$ называется, в этом случае, *эллиптической* (см. рис. 38.2). В направлении главных базисных векторов поверхность «загибается» в одну и ту же сторону.

Случай 38.2. Пусть $K < 0$, следовательно, $k_1 k_2 < 0$, т. е. k_1 и k_2 разных знаков. Пусть, например, $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. График функции φ_0 в окрестности точки $p \in U$ — гиперболический параболоид (седло). Точка $f(p)$ называется, в этом случае, *гиперболической* (или *седловой*) (см. рис. 38.3). В направлении главных базисных векторов поверхность «загибается» в противоположные стороны ($k_1 > 0$, $k_2 < 0$).

Случай 38.3. Пусть $K = 0$, но $H \neq 0$. Пусть, например, $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$. График функции φ_0 в окрестности точки $p \in U$ представляет собой параболический цилиндр. Точка $f(p)$ называется, в этом случае, *параболической* (см. рис. 38.4). В направлении первого базисного вектора поверхность может быть вовсе не искривлена ($k_1 = 0$), но зато она искривлена в направлении второго главного базисного вектора ($k_2 \neq 0$).

Случай 38.4. Этот случай самый забавный. Пусть $K = H = 0$. При таких значениях кривизн точка $f(p)$ называется *точкой уплощения*. В этом случае обе главные нормальные

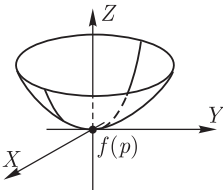


Рис. 38.2

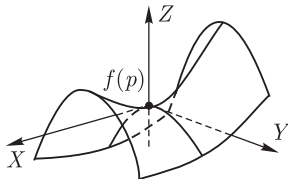


Рис. 38.3

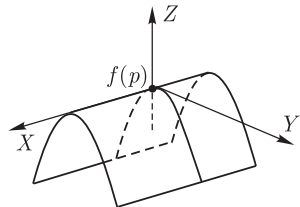


Рис. 38.4

кривизны равны нулю: $k_1 = k_2 = 0$, а функция φ_0 имеет вид $\varphi_0(x) = o(x^2 + y^2)$. И хотя интуитивно кажется, что в окрестности точки уплощения $f(p)$ поверхность сильно напоминает плоскость («ничего никуда не загибается»), на самом деле про форму поверхности вообще ничего утверждать нельзя — эта поверхность вовсе не обязана быть плоскостью или ее частью!

Пример 38.1. Рассмотрим знаменитую поверхность:

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2.$$

Проверьте самостоятельно, что $(0,0)$ — точка уплощения, но поверхность ведет себя в окрестности этой точки довольно причудливым образом (см. рис. 38.5). Плоскость XOZ пересекает эту поверхность по кубической параболе, а плоскость YOZ — по оси OY , целиком лежащей на этой поверхности.

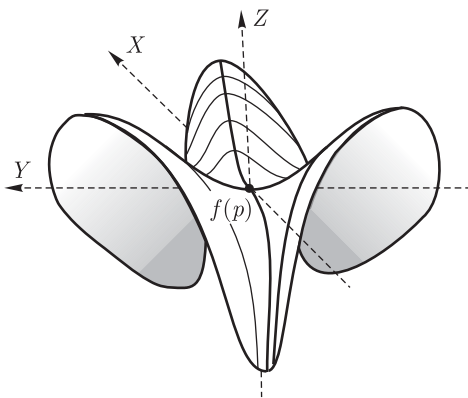


Рис. 38.5. «Обезьянье седло»

Поверхность $z = x^3 - 3xy^2$ называется «обезьянье седло». Столь художественное название вызвано представлением, будто бы обезьяна может сесть копчиком на точку уплощения, свесить в сторону оси OX обе ноги, а в сторону читателя — хвост. Надеюсь, что обезьяна принимает такую позу, не предполагая выразить какое-либо отношение к личности читателя.

Любопытный вопрос. Какого же типа должны быть точки на гиперповерхности, чтобы она являлась-таки плоскостью или, на худой конец, сферой?

Определение 38.1. Точка $f(p)$ гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ называется *омбилической*, если в точке $p \in U$ выполняются одно из следующих эквивалентных условий.

1. $k_1 = k_2 = \dots = k_n$ — все главные нормальные кривизны равны.

2. Оператор L_p — скалярный, т. е. $L_p = k(p) \cdot Id_{T_p f}$ (или, что то же самое, $[L_p] = k(p) \cdot \mathbf{1}_n$).

3. В центроаффинном касательном пространстве $T_p f$ все ненулевые векторы являются главными направлениями.

Замечание 38.1. Нетрудно подметить, что в случае двумерной гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ точка $p \in U$ будет омбилической, если в этой точке $K = H^2$.

Теорема 38.2 (Дарбу). Если $n \geq 2$, область $U \subseteq \mathbf{R}^n$ односвязная и у гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ все точки омбилические, то образ $f(U)$ есть либо плоскость или ее часть ($k_i = 0$), либо сфера или ее часть ($k_i \neq 0$).

Доказательство этой замечательной теоремы находится несколько в стороне от генеральной линии нашей книжки, поэтому я предлагаю читателям провести его самостоятельно в качестве хорошего упражнения.

Таким образом, в этом пункте мы выделили четыре типа точек на двумерной гиперповерхности — эллиптические, гиперболические, параболические и точки уплощения. А тип точки худо-бедно характеризует форму гиперповерхности в окрестности этой точки. Это весьма удовлетворительный результат, перекликающийся с выводами п. 17 «Локальное строение плоских кривых». Сим удовлетворимся и пойдем в следующий пункт.

Задачи и упражнения



1. Найдите эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе

$$f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u),$$

где $a > b$.

2. Определите тип точек на поверхности, полученной вращением синусоиды $y = \sin x$

а) вокруг оси OX ,

б) вокруг оси OY .

3. Проявив смекалку и способность к обобщению понятий, определите тип точек на цилиндре

$$f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u, w).$$

4. Классифицируйте точки на следующих двумерных гиперповерхностях (второго порядка):

а) эллипсоид;

б) однополостный гиперboloид;

- в) двуполостный гиперболоид;
- г) эллиптический параболоид;
- д) гиперболический параболоид (седло);
- е) эллиптический цилиндр;
- ж) гиперболический цилиндр;
- з) круговой конус.

5. Докажите, что точка на гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ является омбилической тогда и только тогда, когда в этой точке

$$\frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{h_{12}}{g_{12}} = \frac{h_{22}}{g_{22}}.$$

6. Докажите неравенство $H^2 \geq K$ для произвольной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ и убедитесь, что это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда точка поверхности омбилическая.

39. Нормальная кривизна. Теорема Менье. Теорема Эйлера. Асимптотические линии

Давайте начнем этот пункт с очень полезной леммы.

Лемма 39.1. Пусть α — кривая вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ и $\alpha(t_0) = f(p)$. Тогда

$$\mathbf{II}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = \langle \ddot{\alpha}(t_0), \vec{N}(p) \rangle.$$

Доказательство. Имеем $\alpha(t) = f(u(t))$, где $u(t)$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Далее, $\dot{\alpha}(t_0) = df_p(\dot{u}(t_0)) \in T_p f$. Значит,

$$\langle \dot{\alpha}(t), \vec{N}(u(t)) \rangle \equiv 0.$$

Видишь тождество — дифференцируй! Результат пишем сразу в точке $t = t_0$:

$$\langle \ddot{\alpha}(t_0), \vec{N}(p) \rangle + \langle \dot{\alpha}(t_0), d\vec{N}_p(\dot{u}(t_0)) \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\alpha}(t_0), \vec{N}(p) \rangle &= -\langle \dot{\alpha}(t_0), d\vec{N}_p(\dot{u}(t_0)) \rangle = \\ &= \langle -d\vec{N}_p(\dot{u}(t_0)), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = \langle -d\vec{N}_p((df_p)^{-1}(\dot{\alpha}(t_0))), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = \\ &= \langle L_p(\dot{\alpha}), \dot{\alpha} \rangle = \mathbf{II}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}). \end{aligned}$$



Вот тут-то нам и пригодилось знание «внутреннего» устройства основного оператора гиперповерхности, над пониманием которого мы бились в п. 36! ♦

Поговорим теперь немного о привычном наглядном случае. Рассмотрим кривую $\alpha(t)$ вдоль двумерной гиперповерхности $f : U \rightarrow R^3$ (см. рис. 39.1). Напомню традиционные обозначения векторов репера Френе для кривой $\alpha : I \rightarrow R^3$: $\vec{\tau}$ — касательный вектор, $\vec{\nu}$ — нормаль, $\vec{\beta}$ — бинормаль. Очевидно, что $\dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| \cdot \vec{\tau} \in T_p f$. Соприкасающаяся плоскость $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ кривой α , вообще говоря, не обязана совпадать с $T_p f$, ибо вектор $\vec{\nu}$ не обязан лежать в касательном пространстве (касательной плоскости) $T_p f$. Например, на рис. 39.1 нормаль $\vec{\nu}$ образует с нормальным вектором $\vec{N}(p)$ угол θ , причем $0 < \theta < \pi/2$.

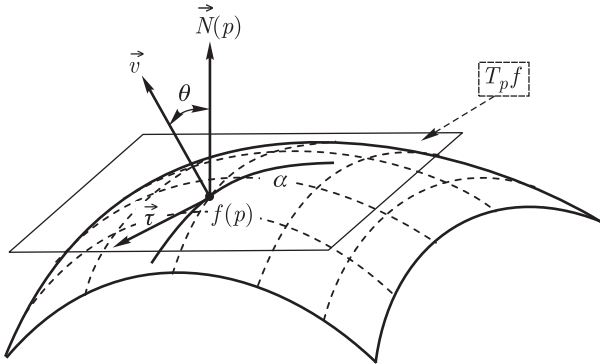


Рис. 39.1

Теорема 39.1 (Менье)¹⁾ Пусть $\alpha(t)$ — кривая вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow R^3$, $\alpha(t_0) = f(p)$ и θ — угол между векторами $\vec{N}(p)$ и $\vec{\nu}(t_0)$. Тогда

$$k \cdot \cos \theta = \frac{\mathbf{II}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})},$$

где k — кривизна кривой $\alpha(t)$ в момент $t = t_0$.

¹⁾ Жан Менье (1754–1793) — генерал, один из героев революционной Франции, погиб при обороне Майнца. История математики знает не так уж много теорем, доказанных действующими военными генералами. Теорема Менье — редкое и удивительное исключение.

Доказательство. Мы знаем (смотри п. 22) разложение ускорения кривой $\alpha(t)$ на нормальную и тангенциальную составляющие:


$$\ddot{\alpha} = |\dot{\alpha}| \bullet \cdot \vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 k(t) \cdot \vec{\nu},$$

где $k(t)$ — кривизна кривой $\alpha(t)$. В духе генерала Менье вычисляем строго по-военному, используя полезную лемму из начала этого пункта:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= \langle \ddot{\alpha}, \vec{N} \rangle = \langle |\dot{\alpha}| \bullet \cdot \vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 k \vec{\nu}, \vec{N} \rangle = \\ &= |\dot{\alpha}|^2 k \langle \vec{\nu}, \vec{N} \rangle = \mathbf{I}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) \cdot k \cdot \cos \theta, \end{aligned}$$

так как $\vec{\nu}$ и \vec{N} — единичные векторные поля. А это, собственно, и требовалось. \blacklozenge

Продолжим наше рассмотрение двумерных гиперповерхностей и кривых вдоль них. Пусть теперь чудесным образом $\cos \theta = \pm 1$. Это случается когда, например, $\alpha(t)$ — кривая, являющаяся сечением поверхности $f(U)$ плоскостью, натянутой на вектор \vec{N} и некоторый вектор $X \in T_p f$, т. е. одной из многочисленных возможных *нормальных плоскостей к гиперповерхности* (см. рис. 39.2).

 **Определение 39.1.** Кривая $\alpha(t)$, являющаяся пересечением $f(U)$ и некоторой нормальной плоскости гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$, называется *нормальным сечением*.

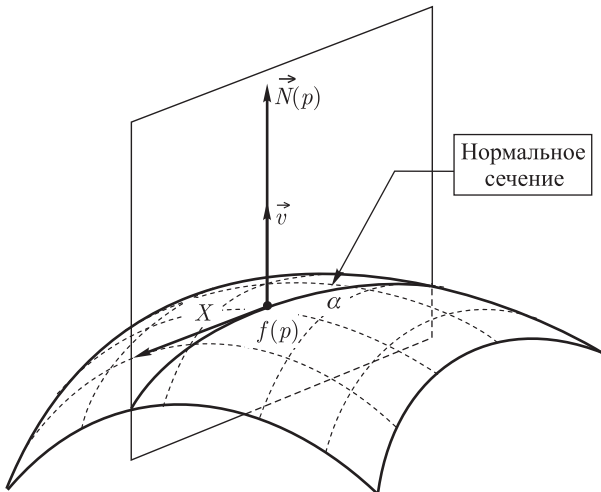


Рис. 39.2

Упражнение 39.1. Докажите, что всякое нормальное сечение гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ есть образ регулярной кривой.

Наблюдение 39.1. Для любого нормального сечения $\alpha(t)$

$$\vec{\nu} = \pm \vec{N}.$$

Это легко доказать, ведь кривая $\alpha(t)$ является плоской!

Ну, тогда для нормального сечения $\alpha(t)$ теорема Менье дает

$$k = \frac{\mathbf{II}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}$$

— это кривизна нормального сечения в чистом виде! При этом поверхность $f(U)$ пересекается плоскостью, натянутой на векторы \vec{N} и $\dot{\alpha}$. (Обратите внимание — вот здесь, в написанном отношении второй формы к первой, обе билинейные формы можно называть и квадратичными.)



Определение 39.2. Если $X \in T_p f$ — ненулевой касательный вектор гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, то число

$$k_N(X) = \frac{\mathbf{II}_p(X, X)}{\mathbf{I}_p(X, X)}$$

называется *нормальной кривизной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ в точке $p \in U$ в направлении вектора $X \in T_p f$.*

Свойства нормальной кривизны.

1. Если $\lambda \neq 0$, то $k_N(\lambda X) = k_N(X)$.
2. Если $X_i \in T_p f$ — главное направление, отвечающее главной нормальной кривизне k_i (собственному значению оператора L_p), то

$$k_N(X_i) = k_i.$$



Замечание 39.1. Именно ради справедливости второго свойства нормальной кривизны в определении оператора L_p (в п. 36) был поставлен знак минус. Именно это второе свойство является объяснением термина «*главные нормальные кривизны*» для собственных значений основного оператора L_p .

Доказательство свойств. Первое свойство очевидно. Докажем второе. Вычисляем

$$k_N(X_i) = \frac{\Pi_p(X_i, X_i)}{\mathbf{I}_p(X_i, X_i)} = \frac{\langle L_p(X_i), X_i \rangle}{\langle X_i, X_i \rangle} = \frac{\langle k_i X_i, X_i \rangle}{\langle X_i, X_i \rangle} = k_i. \quad \blacklozenge$$

Познакомимся теперь с одним из самых замечательных фактов внешней геометрии гиперповерхностей.

Теорема 39.2 (Эйлер). Пусть $X_1, \dots, X_n \in T_p f$ — ортонормированный базис из главных направлений основного оператора L_p гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ и k_1, \dots, k_n — ее главные нормальные кривизны. Пусть $X \in T_p f$ — произвольный ненулевой вектор, образующий углы $\theta_1, \dots, \theta_n$ с векторами X_1, \dots, X_n соответственно. Тогда

$$k_N(X) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i.$$

Доказательство. Без ограничения общности (смотри первое свойство нормальной кривизны), считаем вектор $X \in T_p f$ единичным. Тогда

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \cos \theta_i$$

— это известный факт из курса аналитической геометрии, коэффициенты $\cos \theta_i$ называются *направляющими косинусами*.

Тогда, поскольку $|X| \equiv 1$, имеем

$$\begin{aligned} k_N(X) &= \frac{\Pi_p(X, X)}{\mathbf{I}_p(X, X)} = \Pi_p(X, X) = \\ &= \Pi_p\left(\sum_{i=1}^n X_i \cos \theta_i, \sum_{j=1}^n X_j \cos \theta_j\right) = \\ &= \sum_{i,j} \cos \theta_i \cdot \cos \theta_j \cdot \Pi_p(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i. \end{aligned}$$

Последнее равенство в этой цепочке верно, поскольку $L_p(X_i) = k_i X_i$ и

$$\Pi_p(X_i, X_j) = \langle L_p(X_i), X_j \rangle = k_i \langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} k_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Конечно, Эйлер доказал свою теорему не в столь общей формулировке. Разумеется, в те далекие годы он рассматривал только случай двумерной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ и обнаружил буквально следующее утверждение, которое мы сформулируем так.

Следствие (формула Эйлера). Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ — двумерная гиперповерхность, X_1, X_2 — ортонормированный базис из ее главных направлений и k_1, k_2 — ее главные нормальные кривизны. Пусть $\theta_1 = \theta$ — угол между первым базисным вектором X_1 и произвольным касательным вектором $X \in T_p f$ (см. рис. 39.3). Тогда

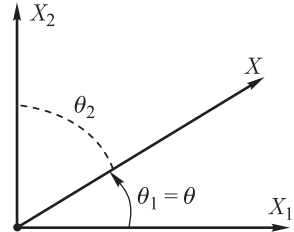


Рис. 39.3



$$k_N(X) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Доказательство. В случае $n = \dim T_p f = 2$ школьная программа дает $\cos \theta_2 = \pm \sin \theta_1$ и только что доказанная общая формула $k_N(X) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i$ превращается в «классическую» формулу Эйлера. ♦

Эта удивительная формула была обнаружена Эйлером задолго до того, как были изобретены основной оператор гиперповерхности и нормальное отображение Гаусса! Эйлер — гений.

Наблюдение 39.1. Формула Эйлера еще раз доказывает уже отмеченное нами свойство 1) нормальной кривизны $k_N(X)$ — она не зависит от длины вектора $X \in T_p f$, а является только функцией направления нормального сечения (угла θ), т. е. $k_N(X) = k_N(\theta)$.

Наблюдение 39.2. «Потанцуем» вокруг теоремы Пифагора и преобразуем формулу Эйлера, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством:

$$k_N(X) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta.$$



Из такой записи формулы Эйлера сразу видно, что k_1 и k_2 — экстремальные значения нормальной кривизны. Если мысленно вращать секущую нормальную плоскость вокруг нормального вектора \vec{N} (см. снова рис. 39.2), то максимум и

минимум кривизны нормальных сечений достигается на двух взаимно перпендикулярных направлениях X_1 и X_2 , которые, собственно, Эйлер и называл «главными»! Он же, в те далекие времена, еще не мог знать понятия собственного вектора линейного оператора! И, тем не менее, он сумел открыть поразительный факт — у любой (даже самой хитро-кривой) поверхности направления наибольшей и наименьшей «изогнутости» всегда перпендикулярны! Для нас же это простое следствие самосопряженности оператора L_p .

Следующее утверждение я первоначально хотел привести в виде несложного упражнения, но решил-таки, в силу красоты отмечаемого свойства и моего трепетного отношения к истории возникновения рассматриваемых здесь понятий, сформулировать это свойство в явном виде и обратить на него ваше внимание.



Утверждение 39.1. *Средняя кривизна H двумерной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ является не только средним арифметическим главных нормальных кривизн k_1 и k_2 , но и средним интегральным всевозможных значений нормальной кривизны $k_N(X)$.*

Доказательство. Сначала напомним читателям теорему Лагранжа «о среднем»: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое число $M \in \mathbf{R}$, что

$$\int_a^b f(x) dx = M \cdot (b - a).$$

Так вот это самое число M и называется *средним интегральным* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Интегральное среднее, если угодно, — это способ найти «среднее арифметическое» бесконечного числа слагаемых — надо «сложить» бесконечно много значений функции $f(x)$ (проинтегрировать $f(x)$) и затем найти их среднее значение (разделить на длину промежутка)¹⁾:

$$M = \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx.$$

¹⁾ Задумайтесь, например, над вопросом, как найти среднюю температуру на улице в течение дня?

Теперь, пользуясь формулой Эйлера $k_N(\theta) = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta$, найдем среднее интегральное значение нормальной кривизны, т. е. функции $k_N(\theta)$ по всевозможным углам $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_N(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta) d\theta = \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{считаем этот интеграл самостоятельно, пользуясь школьной} \\ \text{формулой понижения степени для } \sin^2 \theta \end{array} \right) = \\ &= \frac{k_1 + k_2}{2} = H. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Познакомимся теперь с еще одним важным и популярным геометрическим понятием, непосредственно связанным с только что пройденным материалом — понятием асимптотических линий вдоль поверхности.

Определение 39.2. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — произвольная гиперповерхность. Ненулевой вектор $X \in T_p f$ называется *асимптотическим*, если в его направлении нормальная кривизна равна нулю:

$$k_N(X) = 0.$$



Поскольку $k_N(X) = \frac{\mathbf{I}_p(X, X)}{\mathbf{I}_p(X, X)}$, то очевидно, что вектор $X \in T_p f$ является асимптотическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{I}_p(X, X) = 0$.

Определение 39.3. Кривая $\alpha(t) : I \rightarrow f(U)$ вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ называется *асимптотической*, если в любой момент $t \in I$ ее касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$ — асимптотический.

Очевидно, что уравнение, задающее асимптотические линии на гиперповерхности, есть $\mathbf{I}_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = 0$. Если (u^1, u^2, \dots, u^n) — поверхностные координаты, то уравнение асимптотических линий в этих координатах имеет вид

$$h_{ij} du^i du^j = 0.$$

Действительно, $\dot{\alpha} = (f(u(t)))^\bullet = {}^t(\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dots, \dot{u}^n)$. Поскольку значение нормальной кривизны не зависит от длины вектора, а зависит лишь от его направления, можно смело умножить вектор $\dot{\alpha} = {}^t(\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dots, \dot{u}^n)$ на произвольное число $dt \neq 0$ и получить век-

тор ${}^1) d\alpha = {}^t(du^1, du^2, \dots, du^n)$. После этого остается «подставить» этот вектор во вторую фундаментальную форму и приравнять ее к нулю.

Для наглядного случая двумерной гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ уравнение асимптотических линий в поверхностных координатах (u, v) выглядит так:



$$h_{11}(du)^2 + 2h_{12} du dv + h_{22}(dv)^2 = 0.$$

Обведите в своих конспектах это уравнение в рамочку — в задачниках по дифференциальной геометрии полным-полно задач на отыскание асимптотических линий разных двумерных поверхностей.

Упражнение 39.1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ — двумерная гиперповерхность. Докажите, что:

- 1) в эллиптических точках поверхности f асимптотических направлений нет,
- 2) в параболических точках поверхности f асимптотическое направление одно,
- 3) в гиперболических точках поверхности f асимптотических направлений два.

Упражнение 39.2. Докажите, что всякая прямая, лежащая на образе $f(U)$ гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, является асимптотической линией. Придумайте пример, показывающий, что обратное, конечно же, неверно.

Мне хочется закончить этот пункт, и вместе с ним весь параграф о внешней геометрии поверхностей, небольшим рассказом популярного характера. Впрочем, этот популярный рассказ, при условии аккуратного выполнения рекомендуемых в нем упражнений, может превратиться в настоящее научное повествование и принести вам немалую пользу.

Асимптотические линии давно находят свое применение в геометрии, теоретической физике и много где еще. Особо стоит отметить появление и употребление асимптотических линий при решении проблемы Гильберта (поставленной в 1900 г.) о существовании в пространстве \mathbf{R}^3 поверхности, внутренняя геометрия которой в целом совпадает с геометрией плоскости Лобачевского. Гильберт сам решил свою проблему отрицатель-

¹⁾ Мы уже обсуждали в п. 31, что это, на самом деле, не вектор, а одномерное подпространство.

но, но его доказательство породило целый вал геометрических исследований и до сих пор привлекает внимание геометров. Оказалось, что понятия асимптотических линий (и связанных с ними чебышевских сетей вдоль поверхностей) играют немалую роль в квантовой механике и в теории сверхпроводимости. Условия на потенциал в эффекте Джозефсона из теории сверхпроводимости выражаются уравнением, впервые возникшем в доказательстве Гильберта — физики теперь называют его уравнением «синус-Гордона». Позже выяснилось, что уравнение «синус-Гордона» встречается не только в квантовой механике и теории сверхпроводимости, а еще во многих других разделах естествознания. Изолированные решения этого уравнения (одиночные волны) физики называют красивым словом *солитоны*. Например, нервный импульс, идущий по волокнам нервной ткани человека, является солитоном, т. е. описывается некоторым специальным решением уравнения типа уравнения «синус-Гордона»! Солитонами также являются, например, разрушительные океанские цунами.

Пусть во всех точках двумерной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ полная гауссова кривизна отрицательна (все точки поверхности — гиперболические). Тогда через каждую точку этой поверхности проходят две асимптотические линии и на этой поверхности имеются два семейства асимптотических линий, образующих так называемую *асимптотическую сеть поверхности* f .

Вообще, *сетью на поверхности* $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ называют пару однопараметрических семейств кривых вдоль f таких, что через каждую точку поверхности проходит ровно по одной кривой из каждого семейства и кривые из разных семейств пересекаются, не касаясь друг друга.

Определение 39.4. Сеть на поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ называется *чебышевской*, если в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны имеют равные длины (см.

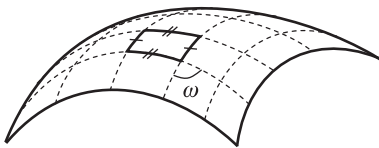


Рис. 39.4

рис. 39.4). Угол ω , показанный на рис. 39.4, называется *сетевым углом*.

Наглядный пример чебышевской сети дают продольные и поперечные нити обычной ткани — сами нити нерастяжимы, не вытягиваются из тканого полотна и изначально перпендикулярны друг другу (сетевые четырехугольники являются прямоуголь-

никами). Поэтому если кусок ткани как-нибудь изогнуть, то в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны (соответствующие отрезки нитей) останутся линиями равной длины.

Рассказывают анекдот, будто бы Чебышев ¹⁾ делал в Парижской академии доклад «О наилучших методах раскроя ткани», на который слетелись все парижские модельеры того времени. Рассматривался вопрос — выкройки какой формы нужно вырезать из ткани, чтобы они облегали заданную поверхность без складок. Чебышев ввел понятие сети, носящей теперь его имя, после чего произнес: «Предположим для простоты, что тело человека имеет форму шара...». Добрая половина аудитории снялась со своих мест и удалилась с негодованием. Чебышев, нимало не смущаясь, продолжил доклад и доказал, что шар лучше всего обтягивать двумя одинаковыми кусками ткани в форме гантели. Теперь таким образом изготавливают мячи для большого тенниса.

Упражнение 39.3. Докажите, что сеть координатных линий на двумерной поверхности является чебышевской тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \equiv 0.$$

Обратим теперь свое внимание на двумерные гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, имеющие *постоянную* отрицательную гауссову кривизну. Они замечательны уже тем, что их внутренняя геометрия локально совпадает с геометрией на плоскости Лобачевского. Это значит, что для фигур, лежащих на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, выполняются в точности те же соотношения, которые имеют место в планиметрии Лобачевского. Например, тригонометрические формулы для треугольников на поверхностях постоянной отрицательной гауссовой кривизны и соответствующие формулы в неевклидовой геометрии Лобачевского просто совпадают. Тем самым, на двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны получается локальная модель геометрии Лобачевского.

Упражнение 39.4. Пусть двумерная гиперповерхность $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ имеет постоянную отрицательную гауссову

¹⁾ Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) — выдающийся русский математик. Сам он неоднократно подчеркивал, что его фамилия правильно произносится как Чебышёв (с ударением на последний слог), но по странной традиции весь математический мир называет его Чѣбышевым.

кривизну $K = \text{const} < 0$. Докажите, что тогда асимптотическая сеть этой поверхности является чебышевской.

Наблюдение 39.3. В случае двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны ее асимптотическую чебышевскую сеть можно взять в качестве новой координатной сети этой поверхности. Пусть (\tilde{u}, \tilde{v}) — новые поверхностные координаты. Тогда семейства линий $\tilde{u} = \text{const}$ и $\tilde{v} = \text{const}$ — асимптотическая чебышевская сеть, а сетевой угол ω будет, конечно, являться функцией новых поверхностных координат:

$$\omega = \omega(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Упражнение 39.5. Докажите, что если координатная сеть поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ является чебышевской, то матрица первой фундаментальной формы этой поверхности имеет вид

$$[\mathbf{I}_p] = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{bmatrix},$$

где $\omega = \omega(\tilde{u}, \tilde{v})$ — сетевой угол в точке $p(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U$.

Наконец, чтобы мой популярный рассказ окончательно превратился в научный и перестал быть просто развлекательным повествованием про удивительные факты современной науки, попробуйте осилить следующее

Упражнение 39.6. Пусть двумерная гиперповерхность $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну $K = -1$ и координатная сеть этой поверхности состоит из асимптотических линий. Тогда выполнено

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}} = \sin \omega \quad (\text{уравнение «синус-Гордона»}).$$

В 1901 г. Давид Гильберт показал, что это уравнение не может иметь решения, регулярного на всей координатной плоскости и подчиненного условию $0 < \omega < \pi$.

Из этого результата следует, что никакая полная (как метрическое пространство) двумерная поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны не может быть изометрично вложена в евклидово пространство \mathbf{R}^3 . Реализовать целиком плоскость Лобачевского в евклидовом пространстве, увы, невозможно.

В качестве утешения должен напомнить вам (см. упражнение из п. 37), что в \mathbf{R}^3 все-таки существует (правда, не всюду регулярная, т. е. имеющая точки, в которых нарушается условие

максимальности ранга) поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны — *псевдосфера*.¹⁾

Именно на псевдосфере локально выполняется геометрия Лобачевского. Этот факт впервые обнаружил в 1868 г. итальянец Э. Бельтрами, чем, наконец, рассеял убеждение многих математиков того времени, что неевклидова геометрия рождена большой фантазией русского математика Лобачевского и венгерского математика Больяи, является «игрой чистого разума» и нигде в природе встречаться не может.

Задачи и упражнения



1. Вычислите нормальную кривизну гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbf{R}^4$

$$f(u, v, w) = {}^t(u + v, u - v, v + w, uvw)$$

в направлении вектора скорости кривой $\alpha(t) = f(\beta(t))$ в точке $t_0 = 1$, где $\beta(t) = {}^t(2t, -3t, t^2)$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^3$.

2. Найдите кривизну нормального сечения цилиндра $y = x^2/2$ (расположенного в \mathbf{R}^3) в точке $A(2, 2, 4)$ в направлении касательной к линии $y = x^2/2, z = x^2$.

3. Для гиперповерхности $f(u, v) = {}^t(u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ отыщите в точке $p(1, 1)$: а) главные нормальные кривизны; б) нормальную кривизну в направлении касательной к линии $v = u^2$; в) углы между вектором скорости кривой $v = u^2$ и главными направлениями (попытайтесь главные направления не отыскивать).

4. Найдите нормальную кривизну поверхности $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ в начале координат в произвольном касательном направлении X . Если в касательной плоскости к поверхности в каждом касательном направлении X отложить от точки касания отрезок длины $\frac{1}{\sqrt{|k_N(X)|}}$ (корень квадратный из радиуса кривизны нормального сечения), то в касательной плоскости получится кривая, называемая *индикатрисой Дю-*

¹⁾ Кроме псевдосферы, в трехмерном пространстве существуют еще два вида периодических поверхностей постоянной отрицательной кривизны (их обнаружил еще в 1839 г. русский математик немецкого происхождения Ф. Миндинг). Разумеется, у этих поверхностей, также как и у псевдосферы, в некоторых точках нарушается условие максимальной ранга. Других поверхностей постоянной отрицательной кривизны в трехмерном пространстве нет, точнее — остальные поверхности постоянной отрицательной кривизны получаются изгибанием некоторых кусков псевдосферы или поверхностей Миндинга.

лена. Напишите уравнение индикатрисы Дюпена поверхности $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ в начале координат.

5. Пусть $X, Y \in T_p f$ — пара произвольных ортогональных касательных векторов гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$. Докажите, что

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{II}_p(X, X) + \mathbf{II}_p(Y, Y)).$$

Попробуйте обобщить это наблюдение на случай гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$.

6. Пусть две поверхности в \mathbf{R}^3 пересекаются по кривой $\alpha(t)$, (первая) кривизна которой есть $k(t)$. Пусть $k_1(\dot{\alpha}(t))$ и $k_2(\dot{\alpha}(t))$ — нормальные кривизны этих поверхностей в точках кривой $\alpha(t)$ в направлении ее вектора скорости, $\theta(\alpha(t))$ — угол между нормальными к поверхностям в точках кривой $\alpha(t)$. Докажите, что в любой момент $t \in I$ выполнено

$$k^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta.$$

7. Найдите асимптотические линии псевдосферы. Проверьте, что они образуют чебышевскую сеть.

8. Найдите асимптотические линии следующих поверхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;

б) $f(u, v) = {}^t(\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u)$;

в) $f(u, v) = {}^t((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$,

где $a > b$;

г) $z = a \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$; д) $z = xy^2$.

9. Докажите, что координатные линии на гиперповерхности $f : U \rightarrow R^3$ являются асимптотическими тогда и только тогда, когда $h_{11} \equiv h_{22} \equiv 0$.

10. Докажите, что если $H = 0$ в некоторой точке гиперповерхности $f : U \rightarrow R^3$, то асимптотические направления в этой точке перпендикулярны.

11. Докажите, что на гиперповерхности $f : U \rightarrow R^3$ любая линия является асимптотической тогда и только тогда, когда $f(U)$ — плоскость или ее часть.

12. Докажите, что в области гиперболических точек поверхности $f : U \rightarrow R^3$ линии кривизны в каждой точке делят пополам углы между асимптотическими линиями.

13. Докажите, что в любой точке асимптотической кривой на гиперповерхности $f : U \rightarrow R^3$ выполнено $\varkappa^2 = -K$, где \varkappa — кручение кривой, K — полная гауссова кривизна поверхности.

§ 8. ДВИЖЕНИЕ РЕПЕРА ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

Семь параграфов игры в дифференциальную геометрию закончились. Перед вами параграф посложней — это основа некоторых современных разделов геометрии, возникших в начале XX в. Основная идея этого параграфа для нас не нова — она уже появлялась в образе подвижного репера Френе вдоль кривой. Мы приклеим к каждой точке поверхности специальный репер и будем изучать саму поверхность, изучая эти реперы средствами линейной алгебры и математического анализа.

Как и в случае кривых, нас будут интересовать такие специальные реперы вдоль поверхностей, которые имеют со своими поверхностями тесную связь и ухватывают закономерности их поведения. Изучение «хитрых» подвижных реперов вдоль поверхностей позволяет развить весьма содержательную теорию. Математики разных стран приложили руку к открытию и накоплению фактов для такой теории. Однако осознание этого направления как единого нового раздела геометрии окончательно сложилось только в работах итальянцев Джорджи Риччи-Курбастро (1853–1925), Луиджи Бианки (1856–1928) и Туллио Леви-Чивита (1873–1941), норвежского математика Софуса Ли (1842–1899) и француза Эли Картана (1869–1951).



Определение. *Стандартным подвижным репером вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ будем называть совокупность реперов окружающего пространства \mathbf{R}^m :*

$$\left\{ f(p); f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p); \vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p) \right\}$$

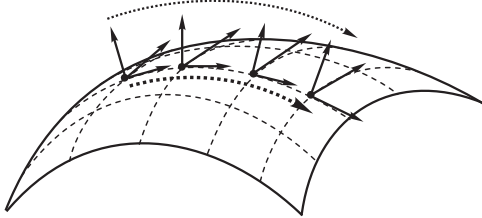
по всевозможным точкам $p \in U$. При этом $f(p)$ — начальная точка репера, касательные векторные поля $f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p)$ образуют стандартный базис $T_p f$, нормальные векторные поля $\vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p)$ образуют некоторый базис ортогонального дополнения $(T_p f)^\perp$, причем ориентация всего базиса $f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p); \vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p)$ пространства $T_{f(p)} \mathbf{R}^m$ в каждой точке $p \in U$ положительна.



Особо стоит оговорить случай подвижного репера вдоль гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. В этом случае *стандартный подвижный репер* — это совокупность реперов

$$\left\{ f(p); f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p); \vec{N}(p) \right\},$$

где \vec{N} — нормальное гауссово поле вдоль f . Ясно, что вдоль гиперповерхности стандартный подвижный репер определен однозначно:



Для физиков также чрезвычайно интересен случай поверхности вида $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, т. е. диффеоморфизма (замены координат). В этом случае стандартный подвижный репер вдоль отображения f есть просто совокупность реперов

$$\{f(p); f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p)\},$$

т. е. набор стандартных базисов касательных пространств $T_p f$, каждый из которых отложен от соответствующей точки $f(p)$.

Для понимания дальнейшего текста книжки вполне достаточно представлять себе обычный в таких случаях художественный кинематический образ подвижного репера — колючая раскоряка, которая (при изменении точки $p \in U$) двигается своим основанием по поверхности, плавно повторяя ее изгибы (см. рисунок). Двигаться репер на поверхности может по разным направлениям. (Прежде всего, нас будут интересовать его передвижения вдоль координатных линий.) Поэтому теория подвижных реперов вдоль поверхности получается несколько сложнее, чем для репера Френе, который может двигаться только вдоль одной своей кривой.

Читатели, более склонные к теоретизированию и обобщению, углядят в понятие подвижного репера вдоль поверхности дорожку к понятию *расслоенного пространства*:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{p \in U} \{f(p); T_{f(p)} \mathbf{R}^m\}$$

с расслаивающей проекцией $\pi : \mathfrak{R} \rightarrow f(U)$, сопоставляющей каждому касательному пространству $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ ту точку, от которой оно отложено. При этом в каждом касательном пространстве $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ зафиксирован базис специального вида, а именно

$$f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p); \vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p).$$

Наглядный образ этого расслоенного пространства таков — к каждой точке образа поверхности приклеен свой экземпляр центроаффинного касательного пространства $T_{f(p)}\mathbf{R}^m = T_p f \oplus (T_p f)^\perp \cong \mathbf{R}^m$ и в каждом таком экземпляре пространства $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ зафиксирован свой базис из касательных векторов $f_{u^1}(p), f_{u^2}(p), \dots, f_{u^n}(p)$ и некоторых нормальных векторов $\vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p)$.

Например, в случае диффеоморфизма $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ расслоенное пространство $\mathfrak{R} = \bigcup_{p \in U} \{f(p); T_{f(p)}\mathbf{R}^n\}$ есть просто касательное расслоение области $f(U)$ и в каждом центроаффинном касательном пространстве $T_{f(p)}\mathbf{R}^n = df_p(T_p U)$ зафиксирован обычный стандартный базис из частных производных отображения f .

Уже в самом начале пути рассмотрения расслоенных пространств возникает масса вопросов — например, как *связаны* между собой стандартные реперы в разных пространствах $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ и $T_{f(q)}\mathbf{R}^m$, если точки $p, q \in U$ соединены некоторой гладкой кривой? Как будут устроены матрицы перехода от одного такого репера к другому? И т. д., и т. п. ¹⁾

Мы не будем в этой книжке углубляться очень далеко в эти дебри высоких разделов современной дифференциальной геометрии и лишь начнем знакомиться с первоначальными результатами в этих направлениях.

40. Производные базисных векторов. Коэффициенты связности

Как и в случае репера Френе поинтересуемся, прежде всего, производными базисных векторов подвижного репера вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ и попробуем получить нечто

¹⁾ Даже обидно — от этих вопросов до фундаментального понятия *аффинной связности* в расслоениях остался один маленький шаг... Но не может же наша книжка быть всеобъемлющей!

аналогичное уравнениям Френе. Только вот беда — теперь у нас будут частные производные! Переменных-то, по которым можно дифференцировать целых n штук! Нас, тем самым, будут интересовать скорости изменения базисных векторов при движении репера вдоль каждой из n штук координатных линий поверхности.

Кое-что на этом пути, на самом деле, мы уже знаем. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, \vec{N}$ — стандартный базис $T_{f(p)}\mathbf{R}^{n+1}$ в точке $p \in U$. Так вот, из предыдущего параграфа нам уже известно, что

$$N_{u^i} = -L_p(f_{u^i}) \in T_p f.$$

Кроме того, мы уже знаем матрицу основного оператора L_p : $[L_p] = (a_j^k) = (g^{kl}h_{lj})$. Следовательно, разложение вектора N_{u^i} по стандартному базису $T_p f$ выглядит так:

$$N_{u^i} = -L_p(f_{u^i}) = -((a_j^k)f_{u^j}^k)f_{u^i} = -(g^{kl}h_{lj}f_{u^i}^j)f_{u^k},$$

где $f_{u^i}^j$ — j -я координата (компонента) вектора f_{u^i} , матрица (h_{lj}) — это матрица второй фундаментальной формы, а (g^{kl}) — матрица, обратная к матрице первой фундаментальной формы, т. е. $(g^{kl}) = (g_{lk})^{-1}$.

Не напрягайтесь сильно, глядя на эту запись — здесь просто аккуратно записано, что матрица $[L_p] = (g^{kl}h_{lj})$ умножается на столбец $[f_{u^i}] = (f_{u^i}^j)$ и в результате получается столбец $(g^{kl}h_{lj}f_{u^i}^j)$ координат вектора $L_p(f_{u^i})$ в базисе $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$.

А как выглядят разложения производных остальных базисных векторов по векторам стандартного базиса? Вот ответ.



Теорема 40.1. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — произвольная поверхность класса гладкости не ниже C^3 . Тогда в любой точке $p \in U$

$$1) f_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k f_{u^k} + \vec{N}_{ij}, \text{ где } \vec{N}_{ij} \in (T_p f)^\perp, \text{ а}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right);$$

$$2) \text{ если } m = n + 1 \text{ (т. е. } f \text{ — гиперповерхность), то } \vec{N}_{ij} = h_{ij} \vec{N}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что производная $f_{u^i u^j}$ базисного вектора f_{u^i} вовсе не обязана лежать в касательном

пространстве $T_p f$ («скорость» f_{u^i} является касательным вектором, а «ускорение» $f_{u^i u^j}$ вовсе не обязано лежать в касательном пространстве!). Поэтому разложение производной $f_{u^i u^j}$ по базису пространства

$$T_{f(p)} \mathbf{R}^m = T_p f \oplus (T_p f)^\perp$$

может содержать как касательную, так и нормальную составляющие:

$$f_{u^i u^j} = X_{ij} + \vec{N}_{ij},$$

где $X_{ij} \in T_p f$ — касательный вектор, а $\vec{N}_{ij} \in (T_p f)^\perp$ — некоторый нормальный вектор к поверхности f (см. рис. 40.1).

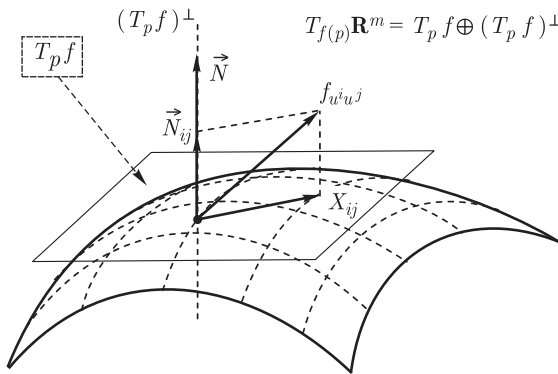


Рис. 40.1



Наблюдение 40.1. Нетрудно видеть, что вектор X_{ij} является ортогональной проекцией вектора $f_{u^i u^j}$ на пространство $T_p f$.

Докажем сначала второе утверждение теоремы. В случае гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ (коразмерность один) имеем

$$\dim(T_p f)^\perp = 1,$$

следовательно, $\vec{N}_{ij} = \sigma_{ij} \vec{N}$. Вспоминаем, что $h_{ij} = \langle \vec{N}, f_{u^i u^j} \rangle$. Поскольку $X_{ij} \perp \vec{N}$, получаем

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \langle \vec{N}, f_{u^i u^j} \rangle = \langle \vec{N}, X_{ij} + \vec{N}_{ij} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{N}_{ij} \rangle = \\ &= \langle \vec{N}, \sigma_{ij} \vec{N} \rangle = \sigma_{ij} \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Обратим теперь свой ясный взор на первое утверждение теоремы.

Нет абсолютно ничего удивительного в том, что касательный вектор $X_{ij} \in T_p f$ раскладывается по базису $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$. Вот только для обозначения коэффициентов Γ_{ij}^l этого разложения требуются уже три индекса — два внизу (соответствуют производной $f_{u^i u^j}$) и один сверху (номер самого коэффициента):



$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^l f_{u^l}.$$

Наблюдение 40.2. $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$ — коэффициенты *симметричны по нижней паре индексов*. Это очевидно, поскольку $f_{u^i u^j} = f_{u^j u^i}$ (в силу достаточно высокого класса гладкости поверхности).

Благодаря наблюдению 40.2, различных коэффициентов Γ_{ij}^l не более $\frac{n^2(n+1)}{2}$ штук.



Наблюдение 40.3. При каждом фиксированном j матрица $[\Gamma_{ij}^l]$ является матрицей перехода от базиса $(f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n})$ к совокупности векторов $(f_{u^1 u^j}, f_{u^2 u^j}, \dots, f_{u^n u^j})$, т. е.

$$(f_{u^1 u^j}, f_{u^2 u^j}, \dots, f_{u^n u^j}) = (f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n})[\Gamma_{ij}^l], \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(Слева все вторые производные взяты по переменной u^j , и они не обязательно линейно независимы!)

Определение 40.2. Коэффициенты Γ_{ij}^l в разложении $X_{ij} = \Gamma_{ij}^l f_{u^l}$ ортогональной проекции X_{ij} вектора $f_{u^i u^j}$ на $T_p f$ по стандартному базису $(f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n})$ касательного пространства $T_p f$ называются *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля второго рода*.




Замечание 40.1. Когда хотят подчеркнуть, что речь идет именно об *ортогональной проекции* вектора $f_{u^i u^j}$ на $T_p f$ (можно ведь рассматривать и какую-нибудь другую проекцию, или вообще «укладывать» вектор $f_{u^i u^j}$ в $T_p f$ с помощью какого-нибудь подходящего линейного оператора!), то коэффициенты Γ_{ij}^l называют *коэффициентами связности Леви-Чивита*.

Определение 40.3. Скалярные функции

$$\Gamma_{ijk} = \langle f_{u^i u^j}, f_{u^k} \rangle$$

называются *символами Кристоффеля первого рода*.

Наблюдение 40.4. $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ — символы Кристоффеля первого рода симметричны по первым двум индексам.

 Ясно, что зная параметризацию поверхности f , символы Кристоффеля Γ_{ijk} очень легко вычислить. Благодаря наблюдению 3, различных символов Γ_{ijk} будет не более $\frac{n^2(n+1)}{2}$ штук. Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \langle f_{u^i u^j}, f_{u^k} \rangle = \langle X_{ij} + \vec{N}_{ij}, f_{u^k} \rangle = \\ &= \langle X_{ij}, f_{u^k} \rangle = \langle \Gamma_{ij}^l f_{u^l}, f_{u^k} \rangle = \Gamma_{ij}^l \cdot g_{lk}. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов связности Γ_{ij}^l получаем систему линейных уравнений (точнее — для каждой пары индексов i, j получается своя система из n штук уравнений с n неизвестными Γ_{ij}^l):

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^l \cdot g_{lk}.$$

Очевидно, что любая такая система — крамеровская, так как $\det(g_{lk}) \neq 0$.

Решим эти системы «одним ударом», умножив каждую из них на обратную матрицу (g^{km}):

$$\Gamma_{ijk} g^{km} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = \Gamma_{ij}^l \cdot \delta_l^m = \Gamma_{ij}^m.$$

Итак,



$$\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ijk} g^{km}$$

— простое выражение коэффициентов связности Γ_{ij}^m через легко вычисляемые символы Кристоффеля первого рода Γ_{ijk} и метрические коэффициенты g_{km} .

Рассмотрим тождество $g_{il} \equiv \langle f_{u^i}, f_{u^l} \rangle$. Дифференцируем его по переменной u^j :



$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \langle f_{u^i u^j}, f_{u^l} \rangle + \langle f_{u^i}, f_{u^l u^j} \rangle = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lji}$$

— правило дифференцирования метрических коэффициентов. Мне приходилось встречать даже такую, до предела формальную, но легко запоминаемую и наглядную запись этого правила:

$$\langle i, l \rangle_j = ij l + lji.$$

Такая запись показывает, что при дифференцировании по u^j , индекс j «встает в середину» между индексами i, l и l, i .

Проявим усердие и поупражняемся — получим три равенства:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \underbrace{\Gamma_{ijl}} + \underline{\underline{\Gamma_{lji}}},$$

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} = \underline{\underline{\Gamma_{lji}}} + \underbrace{\Gamma_{ijl}},$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \underline{\underline{\Gamma_{lji}}} + \underline{\underline{\Gamma_{lji}}}.$$

В этих равенствах одинаково подчеркнуты одинаковые слагаемые (см. наблюдение 3).

Сложим первые два этих равенства и вычтем третье:

$$2\Gamma_{ijl} = \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Что и требовалось. ◆

Под занавес этого пункта отметим следующее важнейшее для всего дальнейшего изложения наблюдение.



Наблюдение 40.5 (важнейшее). Коэффициенты Γ_{ij}^k и $\Gamma_{ijl} = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$ являются свойствами внутренней геометрии поверхности f , так как для их вычисления нужно знать только матрицу первой фундаментальной формы (g_{ij}) поверхности f и уметь дифференцировать.

Упражнение 40.1. Пусть $\Phi : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbf{R}^n$ — диффеоморфизм (замена координат $u^i \xrightarrow{\Phi} \tilde{u}^i$ на поверхности). Докажите, что символы Γ_{lk}^r и Γ_{lkr} при замене координат изменяются следующим (довольно прихотливым!) образом:

$$\tilde{\Gamma}_{lk}^r = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^l} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^k} \cdot \frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^s} \cdot \Gamma_{ij}^s + \frac{\partial^2 u^s}{\partial \tilde{u}^l \partial \tilde{u}^k} \cdot \frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^s};$$

$$\tilde{\Gamma}_{lkr} = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^l} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^k} \cdot \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^r} \cdot \Gamma_{ijs} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial \tilde{u}^l \partial \tilde{u}^k} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^r} \cdot g_{ij}.$$

Пункт 40 закончен.

Задачи и упражнения



1. Найдите коэффициенты связности Γ_{ijl}^m и Γ_{ij}^k следующих поверхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(R \cos u, R \sin u, v)$;

б) $f(u, v) = {}^t(u, u^2, v)$;

в) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;

г) $f(u, v, w) = {}^t(w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u)$;

д) $f(u, v, w) = {}^t(R \cos u \cos v \cos w, R \cos u \sin v \cos w, R \sin u \cos w, R \sin u \sin w)$;

е) $f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$.

41. Уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди

В этом пункте мы получим «залихватские» уравнения (точнее — тождества), которые увязывают между собой коэффициенты связности Γ_{ij}^m и коэффициенты g_{ij} и h_{ij} первой и второй фундаментальных форм произвольной гиперповерхности.

История разыскания этих уравнений растянулась надолго. Первые уравнения были найдены еще Гауссом в 1828 г. (об этом у нас еще пойдет речь в книжке), а остальные уравнения обычно связывают с именем итальянского математика Дельфино Кодацци (1824–1873), который нашел их в 1868 г. Однако они, фактически, были найдены еще раньше другим итальянцем — Анджело Майнарди (1800–1879), записавшим их в несколько другом виде в 1856 г. Но еще раньше, в 1853 г., их нашел К. М. Петерсон в своей магистерской диссертации, правда диссертация Петерсона оставалась неопубликованной аж до 1952 г. и стала известна математическому миру только тогда, когда ее обнаружил в архивах и опубликовал известный историк математики и популяризатор науки И. Я. Депман. В математической литературе эти уравнения именуют по-разному, выбирая то так, то сяк разные фамилии из этой четверки математиков, но с учетом исторических обстоятельств и полной независимости работ последних трех авторов, уравнения правильно именовать именно так — уравнения *Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди*.

Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — произвольная гиперповерхность класса гладкости не ниже C^3 . В предыдущем пункте мы выяснили, что

$$f_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^l f_{u^l} + h_{ij} \vec{N}.$$

Найдем теперь третью производную, причем вот такую: $f_{u^j u^k u^i}$. Прошу прощения, я в дальнейшей записи кое-где отступ-

лю от обозначений Эйнштейна и буду иногда писать знак суммы, чтобы подчеркнуть, по какому индексу идет суммирование. Это поможет понять моменты изменения порядка суммирования и переименования индексов. Еще раз предупреждаю — не пугайтесь, мы не станем делать ничего запредельного. Мы просто будем дифференцировать, подставлять и приводить подобные. Ну, с Богом! Считаю:

$$\begin{aligned}
 f_{u^j u^k u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\Gamma_{jk}^l f_{u^l} + h_{jk} \vec{N} \right) = \\
 &= \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} f_{u^l} + \Gamma_{jk}^l f_{u^l u^i} \right) + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} \vec{N} + h_{jk} N_{u^i} = \\
 &= \sum_m \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} f_{u^m} + \sum_l \Gamma_{jk}^l f_{u^l u^i} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} \vec{N} + (-h_{jk} L_p(f_{u^i})) = \text{человек} \\
 &= \sum_m \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} f_{u^m} + \sum_l \Gamma_{jk}^l \left(\sum_m \Gamma_{li}^m f_{u^m} + h_{li} \vec{N} \right) + \\
 &\quad + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} \vec{N} + \left(-h_{jk} \sum_m (L_p(f_{u^i}))^m f_{u^m} \right) = \\
 &= \sum_m \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} + \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m \right\} f_{u^m} + \\
 &\quad + \left\{ \sum_l \Gamma_{jk}^l h_{li} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} \right\} \vec{N}. \text{человек}
 \end{aligned}$$

Уф-ф! Мы получили разложение производной $f_{u^j u^k u^i}$ по стандартному базису пространства $T_{f(p)} \mathbf{R}^{n+1}$.

В силу достаточно высокого класса гладкости поверхности f смешанные частные производные $f_{u^j u^k u^i}$ и $f_{u^i u^k u^j}$ равны:

$$f_{u^j u^k u^i} = f_{u^i u^k u^j}$$

(какой, оказывается, это часто употребляемый и фундаментальный факт из математического анализа!). Нам предстоит приравнять друг к другу разложения по стандартному базису производных $f_{u^j u^k u^i}$ и $f_{u^i u^k u^j}$.

Чтобы не терять время, механически заменим в найденном выражении для $f_{u^j u^k u^i}$ каждый индекс i на j , а каждый индекс

j — на i , и сразу получим разложение производной $f_{u^i u^k u^j}$ по стандартному базису пространства $T_{f(p)} \mathbf{R}^{n+1}$:

$$f_{u^i u^k u^j} = \sum_m \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m - h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m \right\} f_{u^m} + \left\{ \sum_l \Gamma_{ik}^l h_{lj} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} \right\} \vec{N}.$$

Поскольку $f_{u^j u^k u^i} = f_{u^i u^k u^j}$, то разложения этих производных совпадают:

$$\begin{aligned} \sum_m \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} + \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m \right\} f_{u^m} + \left\{ \sum_l \Gamma_{jk}^l h_{li} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} \right\} \vec{N} = \\ = \sum_m \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m - h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m \right\} f_{u^m} + \left\{ \sum_l \Gamma_{ik}^l h_{lj} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} \right\} \vec{N}. \end{aligned}$$



С формальной точки зрения уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди — это тождественное равенство нулю координат вектора, стоящего в левой части очевидного тождества $f_{u^j u^k u^i} - f_{u^i u^k u^j} \equiv \vec{0}$.

Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем подобные:

$$\begin{aligned} \sum_m \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} + \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} - \right. \\ \left. - \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m + h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m \right\} f_{u^m} + \\ + \left\{ \sum_l \Gamma_{jk}^l h_{li} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \sum_l \Gamma_{ik}^l h_{lj} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} \right\} \vec{N} \equiv \vec{0}. \end{aligned}$$

У нулевого вектора все координаты (в любом базисе) равны нулю, следовательно,

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} + \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} -$$

$$- \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m + h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m = 0$$

— уравнения Гаусса, и

$$\sum_l \Gamma_{jk}^l h_{li} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \sum_l \Gamma_{ik}^l h_{lj} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} = 0$$

— уравнения Петерсона–Кодацци–Майнарди.

Почему сам Гаусс не нашел последней группы уравнений — для меня остается загадкой. Рискну предположить, что он знал все выписанные уравнения для двумерной гиперповерхности, но опубликовал только то, что требовалось ему для доказательства знаменитой «теоремы egregium», о которой у нас пойдет речь чуть позже. Для творчества Гаусса это обычное явление — например, уже после смерти Гаусса из его дневников стало ясно, что он знал о существовании неевклидовых геометрий до появления работ Лобачевского и Больяи, но считал преждевременным сообщать математическому миру об этих открытиях.

Разумно переписать полученные уравнения так, чтобы разнести по разные стороны от знака равенства свойства внутренней и свойства внешней геометрий поверхности. Соберем в левой части уравнений свойства внутренней геометрии и получим традиционную запись этих уравнений (снова на полную катушку используем обозначения Эйнштейна).



Уравнения Гаусса:

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) = h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m - h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m,$$

где $i, j, k, m = 1, 2, \dots, n$ (т. е., формально, n^4 штук уравнений).



Уравнения Петерсона–Кодацци–Майнарди:

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + (\Gamma_{jk}^l h_{li} - \Gamma_{ik}^l h_{lj}) = 0,$$

где $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ (т. е., формально, n^3 штук уравнений).

Упражнение 41.1. В силу симметричности первой и второй фундаментальных форм гиперповерхности и симметричности ко-

эффициентов связности Γ_{ij}^m по нижним индексам, реальное число различных уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди значительно меньше, чем $n^4 + n^3$. Посчитайте, сколько их.



Наблюдение 41.1. Уравнения Гаусса можно несколько модернизировать, если вспомнить, что $(L_p(f_{u^i}))^m = -(g^{ml} h_{lj} f_{u^i}^j)$. Тогда правые части уравнений Гаусса не будут содержать символа основного оператора:

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) = -h_{jk} (g^{ml} h_{lr} f_{u^i}^r) + h_{ik} (g^{ml} h_{lr} f_{u^j}^r).$$

При такой записи сразу видно, что уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди связывают между собой коэффициенты связности и коэффициенты первой и второй фундаментальных форм гиперповерхности. Из предыдущего пункта известно, что коэффициенты Γ_{ij}^m связности Леви-Чивита, в свою очередь, выражаются через метрические коэффициенты g_{ij} и их производные. Таким образом, уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди показывают, что коэффициенты первой и второй фундаментальных форм гиперповерхности *не являются независимыми* друг от друга.¹⁾



Наблюдение 41.2. Уравнения Петерсона–Кодацци–Майнарди дают необходимые условия для того, чтобы матрица (h_{ij}) могла быть матрицей второй фундаментальной формы гиперповерхности с заданной первой фундаментальной формой (g_{ij}) (коэффициенты связности Γ_{ij}^m вычисляются через коэффициенты g_{ij}). Можно доказать, что эти условия являются и достаточными.

Что еще сказать про эти уравнения? Оказывается, что всякая гиперповерхность однозначно (с точностью до изометрии объемлющего пространства) определяется своими первой и второй фундаментальными формами — это так называемая теорема Бонне.

Мы не рассматриваем в этой книжке доказательство теоремы Бонне, но кратко можно сказать, что (как и в случае основной теоремы локальной теории кривых) отыскание поверхности по заданным фундаментальным формам сводится к решению некоторой системы дифференциальных уравнений. Так вот, уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди как раз представля-

¹⁾ Сопоставьте этот факт с независимостью кривизн кривой общего вида и поразмышляйте о причинах такого различия.


ют собой необходимые и достаточные условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений, к которой сводится задача о восстановлении гиперповерхности по ее заданным фундаментальным формам. По этой причине некоторые авторы называют уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди *основными уравнениями локальной теории гиперповерхностей*.

В этой книжке уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди понадобятся нам не для доказательства теоремы Бонне или анализа связей между первой и второй фундаментальными формами, а для некоторых других целей, которые станут ясны чуть ниже.

Обозначим левые части уравнений Гаусса через R_{ijk}^m :

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m).$$

Определение 41.1. Величины R_{ijk}^m называются *компонентами тензора кривизны Леви-Чивита*.

 **Важное наблюдение 41.3.** Величины R_{ijk}^m являются свойствами внутренней геометрии гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$.

Вот мы и подошли к тому моменту, когда стало ясно, что без понятия тензора дальше никуда не двинешься. Мы уперлись в необходимость узнать, что такое тензоры, кое-что про тензоры, и зачем эти тензоры нужны в геометрии. Скорей в следующий пункт!

42. Тензоры

Естественное место этого пункта — в самом первом параграфе «Предварительные сведения и договоренности». Однако рассказ про тензоры, будучи помещенным в первый параграф, просто «повис» бы, непонятно для чего предназначенный, и, кроме того, лишился бы нескольких важных примеров тензоров, созревших к настоящему моменту.

Но теперь, когда назрела насущная необходимость и без тензоров дальше просто никуда не пойдешь, я предлагаю вашему вниманию этот пункт. Теперь, по крайней мере, будет понятно, откуда в дифференциальной геометрии берутся тензоры, как они в ней работают и приносят пользу, вносят ясность и понимание в закономерности окружающей природы.

Понятие тензора первоначально возникло в теории упругости при изучении напряжений внутри упругого тела — там иссле-

дуются так называемые «тензоры напряжений». Между прочим, словосочетание «тензор напряжений» является тавтологией, поскольку само слово *tension* по-французски (да и по-английски) как раз и означает «напряжение».

Приступим к делу. Должен предупредить вас, что в этом пункте мы постоянно будем ставить стрелочки над векторами, чтобы отличать их от объектов иной природы. При накоплении опыта надобность в такой практике постепенно отпадет сама собой (природа обозначаемых объектов будет ясна из контекста), но при первоначальном знакомстве с тензорами эти стрелочки сильно облегчают восприятие.

Пусть \vec{U} и \vec{V} — произвольные векторные пространства над полем \mathbf{R} , $\dim \vec{U} = n$, $\dim \vec{V} = m$. Зафиксируем в пространстве \vec{U} некоторый базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$, а в пространстве \vec{V} — базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m)$.

Рассмотрим декартово произведение векторных пространств \vec{U} и \vec{V} (как множество упорядоченных пар):

$$\vec{U} \times \vec{V} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in \vec{U}, \vec{y} \in \vec{V}\}.$$

Глядя на это декартово произведение, построим по нему некоторое новое «специфическое» векторное пространство, которое будем обозначать через $\vec{U} \otimes \vec{V}$ и называть *тензорным произведением векторных пространств \vec{U} и \vec{V}* .



Поэтапное определение 42.1.

1) Базис $\vec{U} \otimes \vec{V}$. Базисом векторного пространства $\vec{U} \otimes \vec{V}$ является множество всевозможных упорядоченных пар (\vec{a}_i, \vec{b}_j) , которые будем записывать в виде $\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j = \vec{f}_{ij}$. Таким образом, размерность $\dim \vec{U} \otimes \vec{V}$ конструируемого пространства по определению равна $n \times m$.

2) Элементы $\vec{U} \otimes \vec{V}$. Если $(\vec{x}, \vec{y}) \in \vec{U} \times \vec{V}$ и разложения векторов \vec{x} и \vec{y} по базисам соответствующих пространств таковы:

$$\vec{x} = x^i \vec{a}_i, \quad \vec{y} = y^j \vec{b}_j,$$

то в пространстве $\vec{U} \otimes \vec{V}$ паре (\vec{x}, \vec{y}) , по определению, соответствует элемент

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = x^i y^j (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j) = x^i y^j \vec{f}_{ij},$$

называемый *тензорным произведением векторов \vec{x} и \vec{y}* .

3) Операции в $\vec{U} \otimes \vec{V}$. Если $\vec{p}, \vec{q} \in \vec{U} \otimes \vec{V}$ и $\vec{p} = p^{ij} \vec{f}_{ij}$, $\vec{q} = q^{ij} \vec{f}_{ij}$ — их разложения по базису пространства $\vec{U} \otimes \vec{V}$, то по определению положим

$$\vec{p} + \vec{q} = (p^{ij} + q^{ij}) \vec{f}_{ij},$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \lambda \vec{p} = (\lambda p^{ij}) \vec{f}_{ij}.$$



Прямо из определения вытекают следующие свойства тензорного произведения векторов — для любых $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \vec{U}$; $\vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \vec{V}$ и любого $\lambda \in \mathbf{R}$ справедливо

- 1) $\vec{x} \otimes (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \otimes \vec{y}_1 + \vec{x} \otimes \vec{y}_2$,
- 2) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \otimes \vec{y} = \vec{x}_1 \otimes \vec{y} + \vec{x}_2 \otimes \vec{y}$,
- 3) $(\lambda \vec{x}) \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \otimes \vec{y})$.

Указанные свойства означают, что операция тензорного произведения векторов является *билинейной*. Докажите, пожалуйста, эти свойства самостоятельно.



Замена базиса в тензорном произведении $\vec{U} \otimes \vec{V}$. В построенном векторном пространстве $\vec{U} \otimes \vec{V}$ условимся считать допустимой не всякую замену базиса, а только ту, которая индуцирована заменами базисов в исходных векторных пространствах \vec{U} и \vec{V} . Именно, пусть

$$\begin{aligned} \vec{a}_{i'} &= a_{i'}^i \vec{a}_i, \\ \vec{b}_{j'} &= b_{j'}^j \vec{b}_j \end{aligned}$$

— разложения новых базисных векторов в старых базисах, $(a_{i'}^i)$ и $(b_{j'}^j)$ — матрицы перехода. Тогда элементы

$$\vec{a}_{i'} \otimes \vec{b}_{j'} = a_{i'}^i b_{j'}^j (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j) = a_{i'}^i b_{j'}^j \vec{f}_{ij} = \vec{f}_{i'j'}$$

будем считать новым базисом в $\vec{U} \otimes \vec{V}$. Замены базиса в $\vec{U} \otimes \vec{V}$, построенные по каким-либо другим правилам, будем считать недопустимыми.

Снова (см. п. 1) обращаю ваше внимание на удобную традицию ставить штрихи не у новых базисных векторов, а у их

индексов. Эта традиция убивает сразу двух зайцев — наличие штриха означает принадлежность к новому базису и, одновременно, позволяет экономить буквы для индексов, ведь i и i' — это *разные* индексы!

Лемма. *Определение тензорного произведения корректно, т. е. элемент $\vec{x} \otimes \vec{y}$ не зависит от выбора базисов в пространствах \vec{U} и \vec{V} .*

Доказательство. Пусть $\vec{x} = x^i \vec{a}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{b}_j$, $\vec{x} \otimes \vec{y} = x^i y^j \vec{f}_{ij}$. Заменим базисы в \vec{U} и \vec{V} : $\vec{a}_{i'} = a_{i'}^i \vec{a}_i$, $\vec{b}_{j'} = b_{j'}^j \vec{b}_j$ — строка старых базисных векторов умножается *справа* на матрицу перехода. Тогда координаты векторов преобразуются *контравариантно* (см. п. 1):

$$x^{i'} = a_{i'}^i x^i, \quad y^{j'} = b_{j'}^j y^j$$

— столбец координат вектора умножается *слева* на матрицу, *обратную* к матрице перехода. Значит, $x^{i'} a_{i'}^i = x^i$, $y^{j'} b_{j'}^j = y^j$.

Разложения векторов в новых базисах таковы:

$$\vec{x} = x^{i'} \vec{a}_{i'} \quad \text{и} \quad \vec{y} = y^{j'} \vec{b}_{j'}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{x} \otimes \vec{y})' &= x^{i'} y^{j'} \vec{f}_{i'j'} = x^{i'} y^{j'} a_{i'}^i b_{j'}^j \vec{f}_{ij} = \\ &= (x^{i'} a_{i'}^i) (y^{j'} b_{j'}^j) \vec{f}_{ij} = x^i y^j \vec{f}_{ij} = \vec{x} \otimes \vec{y}. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Специально для читателей, сильно умудренных в алгебре, приведу еще одно (более краткое, формальное и менее конструктивное) определение тензорного произведения векторных пространств, которое, разумеется, эквивалентно только что данному «поэтапному» определению.

Определение 42.1. Пусть $F(\vec{U}, \vec{V})$ — свободный абелев модуль над полем R с множеством свободных порождающих $\vec{U} \times \vec{V} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in \vec{U}, \vec{y} \in \vec{V}\}$ (т. е. $F(\vec{U}, \vec{V})$ состоит из всевозможных формальных конечных сумм вида $\sum \lambda^{ij} (\vec{x}_i, \vec{y}_j)$). Рассмотрим конгруэнцию ρ на $F(\vec{U}, \vec{V})$, заданную определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= (\vec{x}, \vec{y}_1) + (\vec{x}, \vec{y}_2), \\ (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) &= (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}), \\ (\lambda \vec{x}, \vec{y}) &= (\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

Тензорным произведением $\vec{U} \otimes \vec{V}$ векторных пространств \vec{U} и \vec{V} называется фактор-модуль

$$\frac{F(\vec{U}, \vec{V})}{\rho} = \vec{U} \otimes \vec{V}.$$

Упражнение 42.1. Поройтесь в учебниках, отыщите необходимые вам определения и поймите равносильность двух данных определений тензорного произведения.



Подведем итог. Любой элемент $T = p^{ij} \vec{f}_{ij} \in \vec{U} \otimes \vec{V}$ тензорного произведения векторных пространств \vec{U} и \vec{V} называется *тензором*. Коэффициенты p^{ij} называются *компонентами* (или *координатами*) тензора T в базисе \vec{f}_{ij} . После допустимой замены базиса в $\vec{U} \otimes \vec{V}$ тензор T , разумеется, меняет координаты:

$$T = p^{i'j'} \vec{f}_{i'j'} = p^{i'j'} a_i^{i'} b_{j'}^j \vec{f}_{ij} = p^{ij} \vec{f}_{ij}.$$

Следовательно, компоненты p^{ij} тензора T меняются по правилу $p^{i'j'} = a_i^{i'} b_{j'}^j p^{ij}$ (или, в обратную сторону, $p^{ij} = a_i^{i'} b_{j'}^j p^{i'j'}$), где $(a_i^{i'})$ и $(b_{j'}^j)$ — матрицы перехода в пространствах \vec{U} и \vec{V} , и $(a_i^{i'})^{-1} = (a_i^{i'}$), $(b_{j'}^j)^{-1} = (b_{j'}^j)$.

Позвольте теперь напомнить вам еще несколько фундаментальных фактов из курса линейной алгебры.

Определение 42.2. Пусть \vec{V} — линейное пространство. Отображение $\varphi : \vec{V} \rightarrow \mathbf{R}$ называется *линейным функционалом* (или *линейной формой*) на \vec{V} , если

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \vec{V} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

$$\varphi(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_1 \varphi(\vec{x}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{x}_2).$$

Пусть φ — линейный функционал на \vec{V} и $\vec{x} = x^i \vec{a}_i$ — разложение вектора $\vec{x} \in \vec{V}$ по некоторому базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ пространства \vec{V} . Тогда

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x^i \vec{a}_i) = x^i \varphi(\vec{a}_i).$$

Ясно, что для того, чтобы вычислить $\varphi(\vec{x})$, нам кто-то должен сообщить значения $\varphi(\vec{a}_i)$ этого функционала на базисных

векторах, т. е. всякий линейный функционал полностью определяется набором значений $\varphi(\vec{a}_i)$. Пусть эти значения ¹⁾ суть

$$\varphi(\vec{a}_i) = \xi_i \in \mathbf{R}.$$

Мгновенно получаем

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x^i \vec{a}_i) = x^i \varphi(\vec{a}_i) = x^i \xi_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

В силу основополагающей договоренности умножать матрицы «строка на столбец» из такой записи видно, что линейный функционал, в отличие от вектора-столбца, разумно считать *строкой*! При этом индексы у элементов строки необходимо ставить внизу в память об индексе того базисного вектора, который «пострадал» от действия на него линейного функционала. Таким образом, действие функционала-строки $\varphi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ на вектор-столбец $\vec{x} = {}^t(x^1, x^2, \dots, x^n)$ определяется правилом умножения матриц и особенно просто записывается в обозначениях Эйнштейна:

$$\varphi(\vec{x}) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^i \xi_i.$$

Операции сложения линейных функционалов и умножения линейного функционала на число определяются аналогично операциям сложения функций и умножения функции на число. Известно, что множество всех линейных функционалов на векторном пространстве \vec{V} также является векторным пространством, которое обозначается через \vec{V}^* и называется пространством, *сопряженным* (или *дуальным*) к \vec{V} . Известно, что

$$\dim \vec{V}^* = \dim \vec{V}.$$



Таким образом, на совершенно законных основаниях мы будем отождествлять пространство $(\vec{\mathbf{R}}^n)^*$, сопряженное к арифметическому векторному пространству столбцов $\vec{\mathbf{R}}^n$, с арифметическим векторным пространством строк:

$$(\vec{\mathbf{R}}^n)^* = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) | \xi_i \in R\}.$$

¹⁾ Определяющие, собственно, этот линейный функционал.



Важное соглашение. Если рассматривается упорядоченная пара (\vec{V}, \vec{V}^*) векторных пространств, то элементы сопряженного пространства \vec{V}^* (т.е. линейные функционалы) принято называть *ковекторами* (*ковариантными векторами*), а элементы пространства \vec{V} принято называть *контравариантными векторами*. В буквенной записи векторов и ковекторов (а также их координат), нижние индексы называют *ковариантными*, а верхние индексы — *контравариантными*.

Происхождение такой терминологии было объяснено в последнем абзаце первого пункта, где отмечалось, что при замене базиса строки преобразуются умножением справа на матрицу перехода (т.е. *ковариантно*, согласованно с изменением), а столбцы — умножением слева на матрицу, обратную к матрице перехода (т.е. *контравариантно*, против изменения, ибо обратная матрица есть матрица обратного перехода).

Чтобы окончательно подчеркнуть двойственность обсуждаемых здесь понятий столбец — строка, вектор — ковектор, пространство — сопряженное пространство, договоримся при обозначении ковектора (в противовес векторам $\vec{a}, \vec{b}, \dots \in \vec{V}$) ставить стрелочку под буквой, да еще и направлять в противоположную сторону:

$$\underline{\leftarrow} a, \underline{\leftarrow} b, \dots \in \vec{V}^*$$

при этом индекс у векторов ставится внизу, а у его координат — вверху. У ковекторов — наоборот, индекс ставится вверху, а координаты ковектора снабжаются нижними индексами.



Определение 42.3. Рассмотрим пару пространств (\vec{V}, \vec{V}^*) . Базис пространства \vec{V}^* , состоящий из ковекторов (линейных функционалов)

$$t(\underline{\leftarrow} a^1, \underline{\leftarrow} a^2, \dots, \underline{\leftarrow} a^n),$$

называется *дуальным* к базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ пространства \vec{V} , если

$$\vec{a}^i(\vec{a}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$



Наблюдение 42.1. Если \vec{V} — евклидово пространство и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — какой-нибудь его ортонормированный базис, то дуальный базис пространства \vec{V}^* получается простым транспонированием вектор-столбцов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в строки $\underline{\leftarrow} e_1, \underline{\leftarrow} e_2, \dots, \underline{\leftarrow} e_n$. Действительно, в силу ортонормированности бази-

са $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, скалярное произведение векторов в пространстве \vec{V} вычисляется по тому же правилу, что и произведение строки на столбец (как матриц), а именно — сумма произведений координат с одинаковыми номерами. Следовательно:

$$\underline{e}_1(\vec{e}_j) = \langle \underline{e}_1, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \delta_j^i.$$

Это и означает дуальность базисов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n$.

Вернемся теперь к понятию тензорного произведения. Аналогично тензорному произведению $\vec{U} \otimes \vec{V}$ двух векторных пространств определяется тензорное произведение любого конечного числа векторных пространств. Для геометрии важен случай, когда каждое из пространств-сомножителей совпадает с данным векторным пространством \vec{V} или с дуальным к нему пространством \vec{V}^* . При этом в каждом экземпляре пространства \vec{V} зафиксирован один и тот же базис (\vec{e}_i) , а в каждом сопряженном пространстве \vec{V}^* зафиксирован дуальный к (\vec{e}_i) базис (\underline{e}^j) .



Во многих вопросах (но не во всех) не представляет интереса различие порядка сомножителей в подобных тензорных произведениях — важным оказывается лишь количество контравариантных и ковариантных сомножителей. Поэтому мы (в нашей книжке уж точно!) не будем различать, например, тензорные произведения $\vec{V} \otimes \vec{V} \otimes \vec{V}^*$ и $\vec{V} \otimes \vec{V}^* \otimes \vec{V}$, хотя с формальной точки зрения это, безусловно, разные (хотя и изоморфные) векторные пространства.

Пусть \vec{V} — n -мерное векторное пространство, в котором зафиксирован базис (\vec{e}_i) . Следовательно, в сопряженном пространстве \vec{V}^* автоматически фиксируется дуальный базис (\underline{e}^j) . Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathbf{T} = (\otimes^p \vec{V}) \otimes (\otimes^q \vec{V}^*),$$

содержащее p экземпляров пространства \vec{V} и q экземпляров дуального пространства \vec{V}^* (как мы уже оговорились, порядок сомножителей не играет существенной роли для дальнейшего изложения).

Базис векторного пространства \mathbf{T} составляют всевозможные тензоры вида $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \underline{e}^{j_1} \otimes \underline{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \underline{e}^{j_q})$, следо-

вательно, $\dim \mathbf{T} = n^{p+q}$, а любой элемент $T \in \mathbf{T}$ раскладывается по базису:

$$T = T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j_1} \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j_q}).$$



Определение 42.4. Всякий элемент $T \in \mathbf{T} = (\otimes^p \vec{V}) \otimes \otimes^q \vec{V}^*$ называется *тензором типа* (p, q) (или p раз контравариантным и q раз ковариантным тензором). Числа $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ называются *компонентами* (или *координатами*) тензора $T \in \mathbf{T}$.

Наблюдение 42.2. Тензор типа $(1, 0)$ — это обычный вектор из \vec{V} , тензор типа $(0, 1)$ — это обычный ковектор (линейная форма) из \vec{V}^* . Договоримся скаляры из R считать *тензорами типа* $(0, 0)$.

При замене базиса $\vec{e}_{i'} = a_{i'}^i \vec{e}_i$ в исходном пространстве \vec{V} базис тензорного произведения \mathbf{T} меняется по правилу:

$$\begin{aligned} (\vec{e}_{i'_1} \otimes \vec{e}_{i'_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i'_p} \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j'_1} \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j'_2} \otimes \dots \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j'_q}) = \\ = a_{i'_1}^{i_1} a_{i'_2}^{i_2} \dots a_{i'_p}^{i_p} a_{j'_1}^{j_1} a_{j'_2}^{j_2} \dots a_{j'_q}^{j_q} \times \\ \times (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j_1} \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \underset{\leftarrow}{e}^{j_q}), \end{aligned}$$

а компоненты тензора $T \in \mathbf{T}$ преобразуются по правилу:

$$T_{j'_1 j'_2 \dots j'_q}^{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = a_{i_1}^{i'_1} a_{i_2}^{i'_2} \dots a_{i_p}^{i'_p} a_{j_1}^{j'_1} a_{j_2}^{j'_2} \dots a_{j_q}^{j'_q} \cdot T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

где $(a_{i'}^i)$ — матрица перехода, $(a_i^{i'}) = (a_{i'}^i)^{-1}$.

Хочу сразу успокоить вас, чтобы вы не напрягались запоминать эти законы преобразования тензоров и их компонент — они пишутся механически. Достаточно только понимать, что при суммировании одинаковые индексы на разных высотах «пропадают» (*немые индексы*), а в итоговом выражении остаются те индексы, которые «не нашли себе пары» на другой высоте (*свободные индексы*). Кроме того, должен честно признаться, что в своей математической практике мне ни разу не приходилось пользоваться этими законами преобразования в столь общей формулировке — всякий раз, имея дело с тензором конкретного типа, можно «прямо на месте» сообразить, какое число матриц перехода и обратных к ним нужно написать перед компонентами тензора, чтобы выполнить замену базиса.

Идем далее. В математическом мире бытует традиция отождествлять при $q > 0$ тензоры $T \in \mathbf{T}$ типа (p, q) с полилинейными отображениями вида

$$T : \underbrace{(\vec{V} \times \vec{V} \times \dots \times \vec{V})}_{q \text{ раз}} \rightarrow \left(\overset{p}{\otimes} \vec{V} \right).$$

Образно говоря, идея такого отождествления состоит в следующем. В тензоре T типа (p, q) сидят q штук линейных функционалов и p штук векторов. Этим линейным функционалам из тензора T можно «отдать на съедение» q разных векторов — просто закинуть векторы в тензор T как дрова в печь. Функционалы «съедят» эти векторы, сами сгорят — превратятся в числа, и останется тензор типа $(p, 0)$.

Мы сейчас не будем приводить строгих определений по поводу того, каким таким загадочным образом всякому тензору T типа (p, q) ставится в соответствие некоторое полилинейное отображение. Суть дела будет ясна из следующих примеров тензоров и соответствующих им отображений.

В двух следующих примерах \vec{V} — n -мерное векторное пространство, в котором зафиксирован базис (\vec{e}_i) , которому в сопряженном пространстве \vec{V}^* сопоставлен дуальный базис (\underline{e}^j) .

Пример 42.1. Рассмотрим тензор $A \in \vec{V} \otimes \vec{V}^*$ типа $(1, 1)$. Базис пространства $\vec{V} \otimes \vec{V}^*$ состоит из всевозможных пар $(\vec{e}_i \otimes \underline{e}^j)$, следовательно,

$$A = a_j^i (\vec{e}_i \otimes \underline{e}^j).$$

В тензоре A «сидит» один ковектор, значит, этому тензору (точнее, его ковектору) можно «отдать на съедение» один вектор. Возьмем произвольный вектор $\vec{x} = x^k \vec{e}_k \in \vec{V}$ и положим по определению

$$A(\vec{x}) = a_j^i (\vec{e}_i \cdot \underline{e}^j(\vec{x})).$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} A(\vec{x}) &= a_j^i (\vec{e}_i \cdot \underline{e}^j(\vec{x})) = a_j^i (\vec{e}_i \cdot \underline{e}^j(x^k \vec{e}_k)) = \\ &= a_j^i (\vec{e}_i \cdot x^k \underline{e}^j(\vec{e}_k)) = a_j^i (\vec{e}_i \cdot x^k \delta_k^j) = \\ &= a_j^i \vec{e}_i x^j = a_j^i x^j \cdot \vec{e}_i = [a_j^i]_e \cdot [\vec{x}]. \end{aligned}$$

Видно, что полученное отображение A переводит векторы из \vec{V} в векторы из \vec{V} и, очевидно, является линейным. Таким образом, тензор A типа $(1, 1)$ отождествляется с линейным оператором $A : \vec{V} \rightarrow \vec{V}$, который в выбранном базисе (\vec{e}_i) имеет матрицу $[a_j^i]_e$. Элементы этой матрицы есть не что иное, как компоненты тензора A .

Пример 42.2. Рассмотрим тензор $B \in \vec{V}^* \otimes \vec{V}^*$ типа $(0, 2)$. Базис пространства $\vec{V}^* \otimes \vec{V}^*$ состоит из всевозможных пар $(\underline{e^i} \otimes \underline{e^j})$, следовательно,

$$B = b_{ij}(\underline{e_1} \otimes \underline{e^j}).$$

В тензоре B «сидят» уже два ковектора, которые могут одновременно «проглотить» целую пару векторов.

Возьмем два вектора $\vec{x} = x^k \vec{e}_k$, $\vec{y} = y^l \vec{e}_l$ из пространства \vec{V} и положим по определению

$$\begin{aligned} B(\vec{x}, \vec{y}) &= b_{ij}(\underline{e_1}(\vec{x}) \cdot \underline{e^j}(\vec{y})) = b_{ij}(\underline{e^i}(x^k \vec{e}_k) \cdot \underline{e^j}(y^l \vec{e}_l)) = \\ &= b_{ij}x^k y^l \cdot \underline{e_1}(\vec{e}_k) \cdot \underline{e^j}(\vec{e}_l) = b_{ij}x^k y^l \delta_k^i \delta_l^j = b_{ij}x^i y^j. \end{aligned}$$

Таким образом, тензор B типа $(0, 2)$ есть не что иное, как билинейная форма $B : \vec{V} \times \vec{V} \rightarrow \mathbf{R}$, ее матрица (b_{ij}) в базисе (\vec{e}_i) состоит из компонент дважды ковариантного тензора B .



Замечание 42.1. Только что рассмотренный пример объясняет широко употребляемое в физической литературе название «метрический тензор g_{ij} » для скалярного произведения, ведь скалярное произведение является билинейной формой.

Более общо, рассмотрим тензор $P \in (\otimes^q \vec{V}^*)$ типа $(0, q)$. В этом «динозавре» сидят уже q штук прожорливых ковекторов, поэтому он может проглотить сразу q штук векторов! Пусть $P = p_{j_1 j_2 \dots j_q}(\underline{e^{j_1}} \otimes \underline{e^{j_2}} \otimes \dots \otimes \underline{e^{j_q}})$. Возьмем векторы $\vec{x}_1 = x_1^{k_1} \vec{e}_{k_1}$, $\vec{x}_2 = x_2^{k_2} \vec{e}_{k_2}$, ..., $\vec{x}_q = x_q^{k_q} \vec{e}_{k_q}$ и положим по определению

$$\begin{aligned} P(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q) &= p_{j_1 j_2 \dots j_q}(\underline{e^{j_1}}(\vec{x}_1) \cdot \underline{e^{j_2}}(\vec{x}_2) \cdot \dots \cdot \underline{e^{j_q}}(\vec{x}_q)) = \\ &= p_{j_1 j_2 \dots j_q} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdot \dots \cdot x_q^{j_q}. \end{aligned}$$

Получившееся отображение $P : (\underbrace{\vec{V} \times \vec{V} \times \dots \times \vec{V}}_{q \text{ раз}}) \rightarrow \mathbf{R}$ называется *полилинейной* (точнее, *q-линейной*) *формой* на векторном пространстве \vec{V} . Полилинейные формы отождествляют с тензорами типа $(0, q)$.



Пример 42.3 (конкретный). Вернемся к геометрии поверхностей. Зафиксируем в касательном пространстве $T_p f$ стандартный базис и рассмотрим следующий тензор:

$$R \in (T_p f) \otimes (T_p f)^* \otimes (T_p f)^* \otimes (T_p f)^*$$

типа $(1, 3)$. Разложение этого тензора по базису тензорного произведения таково:

$$R = R_{ijk}^m (\overleftarrow{f_{um}} \otimes \overleftarrow{f^{u^i}} \otimes \overleftarrow{f^{u^j}} \otimes \overleftarrow{f^{u^k}}),$$

а компоненты R_{ijk}^m задаются формулами

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m)$$

(в предыдущем пункте это были левые части уравнений Гаусса).

Согласно общей схеме предыдущих примеров, определим *трилинейное отображение*

$$R : (T_p f)^3 \rightarrow T_p f,$$

действующее по правилу

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z) &= R_{ijk}^m (\overleftarrow{f_{um}} \cdot \overleftarrow{f^{u^i}}(X) \cdot \overleftarrow{f^{u^j}}(Y) \cdot \overleftarrow{f^{u^k}}(Z)) = \\ &= R_{ijk}^m (\overleftarrow{f_{um}} \cdot \overleftarrow{f^{u^i}}(x^l f_{ul}) \cdot \overleftarrow{f^{u^j}}(y^s f_{us}) \cdot \overleftarrow{f^{u^k}}(z^r f_{ur})) = R_{ijk}^m x^i y^j z^k f_{um} \end{aligned}$$

для любых $X, Y, Z \in T_p f$. (Будьте внимательны! Я постепенно прекращаю ставить стрелочки над касательными векторами, ведь обычно их вообще не ставят!) Видно, что

$$R(X, Y, Z) = R_{ijk}^m x^i y^j z^k f_{um} \in T_p f,$$

т. е. произвольной тройке касательных векторов $X, Y, Z \in T_p f$ тензор R сопоставляет касательный вектор $R_{ijk}^m x^i y^j z^k f_{um} \in T_p f$.

Определение 42.5. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^s$ — произвольная поверхность и $T_p f$ — ее касательное пространство. Тензор (трilinearное отображение)

$$R(X, Y, Z) : (T_p f)^3 \rightarrow T_p f,$$

компоненты которого определены формулами

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} + (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m),$$

называется *тензором кривизны Леви-Чивита*.



Наблюдение 42.3. Тензор кривизны Леви-Чивита является свойством внутренней геометрии поверхности. Это очевидно, так как в зафиксированном базисе тензор однозначно определяется набором своих компонент, которые, как было отмечено в предыдущем пункте, являются свойствами внутренней геометрии поверхности.

В следующем пункте нам предстоит узнать массу других полезных свойств тензора кривизны Леви-Чивита и тесно связанного с ним тензора Римана. Эти свойства приведут нас к удивительному открытию! Идем в следующий пункт.

Задачи и упражнения



1. Убедитесь, что градиент скалярной функции $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является *ковектором*, т. е. при замене координат (диффеоморфизме) в \mathbf{R}^n его компоненты изменяются как компоненты тензора типа $(0, 1)$.

2. Вычислите компоненты g_{ij} метрического тензора на двумерной сфере \mathbf{S}_R^2 в декартовых координатах стереографической проекции.

3. Объясните себе, почему коэффициенты связности Γ_{ij}^k не являются компонентами тензора.

4. Найдите размерность пространства n -линейных форм на \mathbf{R}^m , кососимметрических по любой паре аргументов.

5. Найдите размерность пространства n -линейных форм на \mathbf{R}^m , симметрических по любой паре аргументов.

6. Вычислите компоненты тензора кривизны Леви-Чивита для поверхностей:

а) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;

б) $f(u, v) = {}^t(u, v, 2u + 3v)$; в) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v)$;

г) $f(u, v, w) = {}^t(w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u)$.

43. Тензоры кривизны Леви-Чивита и Римана. Теорема «egregium» Гаусса

В этом пункте прежде всего мы познакомимся с некоторыми свойствами тензора кривизны Леви-Чивита и тесно связанного с ним знаменитого тензора кривизны Римана.

Давайте сначала определим этот тензор Римана. Пусть $R(X, Y, Z) : (T_p f)^3 \rightarrow T_p f$ — тензор кривизны Леви-Чивита.

Рассмотрим тензор $R \in \otimes^4 (T_p f)^*$ типа $(0, 4)$, т. е. *тетралинейную форму* (или «4-линейную форму»):

$$R(X, Y, Z, W) : (T_p f)^4 \rightarrow \mathbf{R},$$

определенную на касательном пространстве $T_p f$ следующим образом:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W \rangle.$$

Полученный тензор $R(X, Y, Z, W)$ типа $(0, 4)$ и называется *тензором кривизны Римана* (или просто — *тензором Римана*)

Пусть вас не смущает, что тензор Леви-Чивита и тензор Римана обозначены одной и той же буквой R — эти тензоры связаны столь тесно, что обозначать их одной буквой вошло в традицию. Сейчас мы увидим эту связь. Пусть $X = x^i f_{u^i}$, $Y = y^j f_{u^j}$, $Z = z^k f_{u^k}$, $W = w^l f_{u^l}$ — четыре произвольных вектора из касательного пространства $T_p f$. Вычислим значение тензора Римана на этой четверке векторов:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \langle R(X, Y, Z), W \rangle = \left\langle R_{ijk}^m x^i y^j z^k f_{u^m}, w^l f_{u^l} \right\rangle = \\ &= R_{ijk}^m x^i y^j z^k w^l \langle f_{u^m}, f_{u^l} \rangle = R_{ijk}^m x^i y^j z^k w^l g_{ml} \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Коэффициенты тетралинейной формы $R(X, Y, Z, W)$ являются значениями этой формы на базисных векторах:

$$R(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}, f_{u^l}) = R_{ijk}^m g_{ml} = R_{ijkl}.$$



Определение 43.1. Величины $R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{ml}$ называются *компонентами тензора кривизны Римана*.

Говорят, что тензор Римана R_{ijkl} получается из тензора Леви-Чивита R_{ijk}^m *опусканием верхнего индекса с помощью метрического тензора g_{ml}* . Другое выражение: тензор Римана R_{ijkl} является *сверткой тензора Леви-Чивита R_{ijk}^m с метрическим*

тензором g_{ml} . Но как бы не называли основополагающую формулу

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{ml},$$

мы понимаем, что числа R_{ijkl} есть просто всевозможные скалярные произведения касательных векторов вида $R(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k})$ и f_{u^l} , а слова «опускание индекса с помощью метрического тензора» или «свертка с метрическим тензором» являются синонимами словосочетания «скалярное произведение».



Наблюдение 43.1. Тензор Римана является свойством внутренней геометрии поверхности. Это совершенно очевидно, ведь компоненты $R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{ml}$ выражаются через коэффициенты первой фундаментальной формы и компоненты тензора Леви-Чивита, который является свойством внутренней геометрии (см. предпоследний абзац предыдущего пункта).

Наблюдение 43.2. Очевидно, что компоненты тензора Леви-Чивита выражаются через компоненты тензора Римана следующим образом:

$$R_{ijk}^m = g^{ml} R_{ijkl}, \quad \text{где } (g^{ml}) = (g_{lm})^{-1}.$$

На первом курсе математико-механического факультета, всего после двух месяцев изучения аналитической геометрии, на вопрос: «Придумайте отображение, линейное по каждому аргументу, которое берет *два* вектора и делает из них новый вектор», — первокурсники мгновенно отвечают: векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$. На вопрос: «А придумайте отображение, линейное по каждому аргументу, которое берет *три* вектора и делает из них новый вектор», — после небольшой задержки, первокурсники отвечают: «Двойное векторное произведение $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ». Зато на вопрос: «Какую формулу для двойного векторного произведения вы знаете?», почти все со смехом говорят: «Бац минус цаб!», т. е.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

или, что то же самое,

$$(\vec{c} \times \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Сейчас вы уже знаете гораздо больше первокурсников. Не без гордости за себя, в качестве примера трилинейного отображения,

которое берет три вектора и делает из них новый вектор, вы можете назвать тензор Леви-Чивита $R(X, Y, Z)$. Думаю, вам будет исключительно приятно снова встретиться с формулой «бац минус цаб» и понять, что тензор Леви-Чивита есть, по сути, «двойное векторное произведение».



Теорема 43.1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность класса гладкости не ниже C^3 , $p \in U$ — произвольная точка, $X, Y, Z, W \in T_p f$ — произвольные касательные векторы. Тогда

1) для тензора Леви-Чивита выполнено

$$R(X, Y, Z) = \langle L_p(Y), Z \rangle \cdot L_p(X) - \langle L_p(X), Z \rangle \cdot L_p(Y),$$

2) для тензора Римана выполнено

$$R(X, Y, Z, W) = \begin{vmatrix} \mathbf{II}_p(X, W) & \mathbf{II}_p(Y, W) \\ \mathbf{II}_p(X, Z) & \mathbf{II}_p(Y, Z) \end{vmatrix}.$$

Замечание 43.1. Чтобы увидеть формулу «бац минус цаб», просто перепишите первое утверждение теоремы нужными буквами:

$$R(C, B, A) = \langle L_p(B), A \rangle \cdot L_p(C) - \langle L_p(C), A \rangle \cdot L_p(B),$$

и, если угодно, запомните его в такой формулировке.

Доказательство.

Докажем первое утверждение. Вспомним уравнения Гаусса (см. п. 41):

$$R_{ijk}^m = h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m - h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m,$$

и проверим справедливость требуемого равенства для базисных векторов пространства $T_p f$:

$$\begin{aligned} R(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}) &= R_{ijk}^m f_{u^m} = (h_{jk} (L_p(f_{u^i}))^m - h_{ik} (L_p(f_{u^j}))^m) f_{u^m} = \\ &= h_{jk} \cdot (L_p(f_{u^i}))^m f_{u^m} - h_{ik} \cdot (L_p(f_{u^j}))^m f_{u^m} = \\ &= h_{jk} \cdot (L_p(f_{u^i})) - h_{ik} \cdot (L_p(f_{u^j})) = \\ &= \langle L_p(f_{u^j}), f_{u^k} \rangle \cdot L_p(f_{u^i}) - \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^k} \rangle \cdot L_p(f_{u^j}). \end{aligned}$$

Таким образом, доказываемое равенство выполняется для базисных векторов пространства $T_p f$. Поскольку отображение

$$R(X, Y, Z) : (T_p f)^3 \rightarrow T_p f$$

трилинейно, отсюда немедленно следует справедливость равенства

$$R(X, Y, Z) = \langle L_p(Y), Z \rangle \cdot L_p(X) - \langle L_p(X), Z \rangle \cdot L_p(Y)$$

для любых векторов $X, Y, Z \in T_p f$.

Второе утверждение теоремы очевидно, так как, по определению,

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W \rangle,$$

и второе равенство получается умножением первого равенства скалярно на вектор $W \in T_p f$:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y, Z), W \rangle &= \\ &= \langle L_p(Y), Z \rangle \cdot \langle L_p(X), W \rangle - \langle L_p(X), Z \rangle \cdot \langle L_p(Y), W \rangle = \\ &= \mathbf{II}_p(X, W) \cdot \mathbf{II}_p(Y, Z) - \mathbf{II}_p(X, Z) \cdot \mathbf{II}_p(Y, W) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{II}_p(X, W) & \mathbf{II}_p(Y, W) \\ \mathbf{II}_p(X, Z) & \mathbf{II}_p(Y, Z) \end{vmatrix}. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Благодаря доказанной теореме становятся почти очевидными следующие свойства тензоров кривизны Леви-Чивита и Римана:



Свойства тензоров кривизны

1. Пусть $X = x^i f_{u^i}$, $Y = y^j f_{u^j}$, $Z = z^k f_{u^k}$, $W = w^l f_{u^l}$ — четыре произвольных вектора из касательного пространства $T_p f$. Тогда

$$R(X, Y, Z, W) = \begin{vmatrix} \mathbf{II}_p(X, W) & \mathbf{II}_p(Y, W) \\ \mathbf{II}_p(X, Z) & \mathbf{II}_p(Y, Z) \end{vmatrix} = x^i y^j z^k w^l \begin{vmatrix} h_{il} & h_{jl} \\ h_{ik} & h_{jk} \end{vmatrix}$$

— выражение тензора Римана через коэффициенты второй фундаментальной формы гиперповерхности.

2. $R_{ijk}^m = -R_{jik}^m$ — тензор Леви-Чивита кососимметричен по первой паре ковариантных индексов.


3. $R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$ — первая и вторая пара индексов тензора Римана перестановочны друг с другом и тензор Римана кососимметричен отдельно по первой и по второй паре индексов.

4.

$$\left. \begin{aligned} R_{ijk}^m + R_{jki}^m + R_{kij}^m &= 0 \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

— тождества Риччи (хотя, на мой взгляд, можно было бы называть эти соотношения и «тождествами Якоби», по аналогии с коммутаторным тождеством $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ для элементов произвольной алгебры Ли).

Доказательство всех этих свойств заключается в простой проверке выписанных соотношений. Большая просьба — проделайте эту проверку самостоятельно. ♦

 **Наблюдение 43.2.** Благодаря наличию указанных симметрий у тензоров кривизны R_{ijk}^m и R_{ijkl} , где $i, j, k, l, m = 1, \dots, n$, число их различных компонент, которые могут быть отличны от нуля (*существенных компонент*) значительно меньше, чем n^4 . В частности, из соотношений $R_{ijk}^m = -R_{jik}^m$ и $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ вытекает, что

$$R_{iik}^m \equiv 0 \text{ и } R_{iikl} \equiv 0,$$

поскольку если два одинаковых индекса меняются местами, компонента должна изменить знак и при этом остаться неизменной.


Так, например, при $n = 2$ среди $2^4 = 16$ компонент у тензора Римана R_{ijkl} имеется всего одна *существенная* компонента R_{1221} . Три компоненты получаются из нее согласно свойству

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121},$$

а остальные двенадцать компонент (с одинаковыми индексами в первой или/и во второй паре) тождественно равны нулю:

$$R_{1111} = R_{1112} = R_{1121} = R_{1122} = \dots = R_{2222} = 0.$$

А теперь барабанная дробь и фанфары! Мы подошли к одному из самых значимых и замечательных фактов дифференциальной геометрии!

 **Теорема 43.2** (Леви-Чивита, 1906 г.). Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ — гиперповерхность четной размерности, т. е. $n = 2s$, $s \in \mathbf{N}$. Тогда ее полная кривизна K является свойством внутренней геометрии. В частности (Гаусс, 1828 г.), при $n = 2$ выполнено

$$K = \frac{R_{1221}}{g}.$$

(Обратите внимание! При $n = 2$ величина R_{1221} — единственная существенная компонента тензора кривизны Римана.)

Доказательство. Имеем

$$R_{ijkl} = R(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}, f_{u^l}) = \begin{vmatrix} h_{il} & h_{jl} \\ h_{ik} & h_{jk} \end{vmatrix}$$

— минор второго порядка.

Полная кривизна гиперповерхности определяется формулой

$$K = \frac{h}{g} = \frac{\det[\mathbf{II}_p]}{\det[\mathbf{I}_p]}.$$

Разложим (пользуясь теоремой Лапласа о разложении определителя по минорам) определитель четного порядка $\det[\mathbf{II}_p]$ по минорам второго порядка вида $\begin{vmatrix} h_{il} & h_{jl} \\ h_{ik} & h_{jk} \end{vmatrix} = R_{ijkl}$. Получим многочлен от миноров четного порядка $n - 2$, в котором коэффициентами являются величины R_{ijkl} . Миноры порядка $n - 2$, в свою очередь, можно снова разложить по минорам второго порядка и, продолжая этот процесс, окончательно получить выражение определителя $\det[\mathbf{II}_p]$ через определители второго порядка вида R_{ijkl} . Это означает, что определитель четного порядка $\det[\mathbf{II}_p]$ является свойством внутренней геометрии, поскольку таковыми являются компоненты тензора Римана. Следовательно, кривизна $K = \frac{h}{g} = \frac{\det[\mathbf{II}_p]}{\det[\mathbf{I}_p]}$ является свойством внутренней геометрии.

Для случая $n = 2$ имеем

$$\det[\mathbf{II}_p] = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = R_{1221}. \quad \blacklozenge$$

Когда Гаусс обнаружил эту теорему для двумерных гиперповерхностей в трехмерном пространстве, она настолько восхитила его, что он назвал ее «*theorema egregium*» — по-латыни «блистательная теорема». Оказывается, полная кривизна, которая определялась нами как «явное» свойство внешней геометрии (определитель матрицы основного оператора гиперповерхности), для поверхностей четной размерности является свойством внутренней геометрии, т. е. выражается *только* через метрические коэффициенты g_{ij} !

Между прочим, это означает, что у изометричных четномерных поверхностей полная гауссова кривизна в соответствующих точках совпадает. В частности, при изгибании поверхности, ее

полная кривизна не меняется! В это трудно поверить, но это так — сколько вы не изгибайте лист бумаги (не разрывая и не сминая его), полная кривизна листа в любой точке останется нулевой!

Из теоремы egregium, в частности, следует, что никакую даже самую малую часть сферы нельзя изометрично наложить на плоскость, ведь кривизна плоскости равна нулю, а у сферы — постоянна и положительна! Никакая карта земной поверхности не может дать абсолютно точного ее изображения — факт, хорошо известный всем картографам со времен великого открытия Гаусса.

Но философско-мировоззренческое значение этой замечательной теоремы вовсе не ограничивается забавными следствиями про изгибания листа бумаги. Во времена ньютоновской классической механики физики представляли себе окружающий мир как неподвижный трехмерный «аквариум», в котором происходят все события. В конце девятнадцатого — начале двадцатого веков, во времена Лоренца, Пуанкаре, Минковского и Эйнштейна, взгляды ученых на окружающий мир резко изменились. Моделью окружающего мира стало четырехмерное «пространство-время» и на смену классической механике Ньютона пришла теория относительности Эйнштейна.

Ошеломляющий прорыв! Добавление в модель мира «оси» времени сделало пространство *четномерным* и, как следствие, полную кривизну пространства-времени *стали рассматривать* как свойство внутренней геометрии! Оказывается мы, жители четырехмерного пространства-времени, можем экспериментально определить — в пространстве какой полной кривизны мы живем! (Вспомните тараканов, которые изучают свою поверхность, не выходя из нее в окружающее пространство.) Какая геометрия реально выполняется в нашем мире — геометрия Евклида, Лобачевского или сферическая (эллиптическая)? Постановкой этих волнующих космогонических вопросов, имеющих огромное значение для развития научных взглядов человеческой цивилизации и познания окружающего мира, мы обязаны не чему иному, как теореме egregium Гаусса–Леви-Чивита.

Упражнение 43.1 (для очень усидчивых). Вот явное выражение полной кривизны двумерной гиперповерхности через коэффициенты связности и метрические коэффициенты:

$$K = \frac{R_{1221}}{g} = \frac{R_{122}^1 g_{11} + R_{122}^2 g_{21}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^2} + (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1) \right) g_{11} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^2} + (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2) \right) g_{21} \right).$$

Напишите аналогичное развернутое выражение для полной кривизны четырехмерной гиперповерхности, столь необходимое физикам — непосредственно это выражение они считают определением понятия полной кривизны четырехмерного «пространства-времени», поскольку оно является *внутренним*, т. е. позволяет вычислить кривизну, оставаясь внутри исследуемого пространства.

Задачи и упражнения



1. Вычислите компоненты R_{ijkl} тензора Римана для следующих поверхностей:

- а) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;
- б) $f(u, v) = {}^t(u, v, 2u - 3v)$;
- в) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v)$;
- г) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$.

2. Напишите развернутое выражение для полной кривизны гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^7$ через компоненты R_{ijkl} тензора Римана.

44. Ковариантное ускорение. Геодезические

«Какая песня без баяна», какой курс дифференциальной геометрии без понятия геодезических кривых вдоль поверхности! Благодаря научно-популярной литературе, понятие геодезической линии у всех на слуху и с ним связано очень распространенное заблуждение, будто бы «геодезическая — это кратчайшая линия между двумя точками». Поскольку это далеко не всегда так, давайте разберемся самостоятельно, что же такое геодезические линии на самом деле и какими свойствами они обладают.

Для определения геодезической кривой нам потребуется очень естественное понятие ковариантного ускорения. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — произвольная поверхность класса гладкости не ниже C^3 , $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ — кривая вдоль f , т. е. $\alpha(t) = f(u(t))$, где $u(t) = {}^t(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t))$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$.

Мы уже знаем (см. п. 40), что, в отличие от вектора скорости $\dot{\alpha}(t)$, ускорение $\ddot{\alpha}(t)$ кривой $\alpha(t)$ вовсе не обязано лежать в ка-

сательном пространстве $T_{u(t)}f$. В общем случае, ускорение $\ddot{\alpha}(t)$ имеет как касательную, так и нормальную составляющие:

$$\ddot{\alpha}(t) = X + \vec{N},$$

где $X \in T_{u(t)}f$, а $\vec{N} \in (T_{u(t)}f)^\perp$ (см. рис. 44.1).

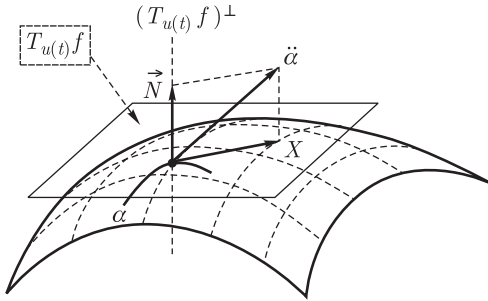



Рис. 44.1

 **Определение 44.1.** Ковариантным ускорением кривой $\alpha(t) = f(u(t))$ называется ортогональная проекция $X \in T_{u(t)}f$ ускорения $\ddot{\alpha}(t)$ на касательное пространство $T_{u(t)}f$. Ковариантное ускорение $X \in T_{u(t)}f$ обозначается через $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}$.

Замечание 44.1. Если при определении ковариантного ускорения хотят подчеркнуть, что речь идет именно об ортогональной проекции вектора $\ddot{\alpha}(t)$ на касательное пространство, то употребляют термин *ковариантное ускорение в связности Леви-Чивита* (см. аналогичное замечание в п. 40).

Давайте вычислим ковариантное ускорение. Сначала продифференцируем тождество $\alpha(t) = f(u(t))$ и получим разложение скорости кривой $\alpha(t) = f(u(t))$ по стандартному базису касательного пространства $T_{u(t)}f$:

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{u}^i(t) \cdot f_{u^i}(u(t)).$$

Теперь посчитаем вторую производную (заглядывая при необходимости в п. 40, где получены разложения производных $f_{u^i u^j}$):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) &= \ddot{u}^i(t) \cdot f_{u^i}(u(t)) + \dot{u}^i(t) \cdot (\dot{u}^j(t) \cdot f_{u^i u^j}(u(t))) = \\ &= \ddot{u}^k f_{u^k} + \dot{u}^i \dot{u}^j (\Gamma_{ij}^k f_{u^k} + \vec{N}_{ij}) = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) f_{u^k} + \dot{u}^i \dot{u}^j \vec{N}_{ij}. \end{aligned}$$

Поскольку ковариантное ускорение есть ортогональная проекция $\ddot{\alpha}(t)$ на касательное пространство, то окончательно получаем

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) f_{u^k}.$$



Видно, что ковариантное ускорение любой кривой вдоль поверхности является свойством внутренней геометрии этой поверхности.

Свойства ковариантного ускорения.

1. $\frac{\nabla \dot{\alpha}(t)}{dt} \in T_{u(t)}f$ — очевидно.
2. Если $X \in T_{u(t)}f$, то $\langle \ddot{\alpha}(t), X \rangle = \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} + \vec{N}, X \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, X \right\rangle$, так как векторы \vec{N} и X ортогональны.
3. Если $|\dot{\alpha}| \equiv \text{const}$, то $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \perp \dot{\alpha}$. Действительно,

$$0 \equiv \frac{d}{dt} \text{const} \equiv \frac{d}{dt} (|\dot{\alpha}|^2) = \frac{d}{dt} \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 2 \langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 2 \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, \dot{\alpha} \right\rangle,$$

поскольку $\dot{\alpha} \in T_{u(t)}f$. ◆

А теперь включите, пожалуйста, свое воображение и представьте себе материальную точку, например, железный шарик, который свободно движется в пространстве \mathbf{R}^3 . По какой траектории будет двигаться шарик, если на него не действуют никакие силы? Правильно, — по прямой! Это не что иное, как первый закон Ньютона: всякое тело, если на него не действуют никакие силы, движется равномерно и прямолинейно (или находится в состоянии покоя). Обратите внимание — поскольку на шарик не действуют силы, его ускорение *равно нулю!*

А теперь представьте, что этот же самый шарик катится по поверхности тонкой железной сферы и никуда от этой сферы оторваться не может (например, он просто наэлектризован или катается по внутренней стороне). Между шариком и сферой существует неразрывная связь, которую механики называют удачным термином *удерживающая*. На шарик, по-прежнему, не действуют никакие силы (разумеется, кроме удерживающей связи). По какой траектории теперь будет двигаться шарик? Правильно, — по большой окружности сферы! Шарик не станет выписывать на поверхности сферы никаких кренделей и синусоид, поскольку для этого на него должна воздействовать сила, направленная *по касательной к сфере*, которая отклоняла бы его от большой окружности!

Обратите внимание, в такой ситуации, при свободном движении шарика по сфере, его ускорение *не равно нулю!* У шарика всегда имеется *центростремительное* ускорение (направленное в центр сферы), поскольку он равномерно движется по окружности. Что же равно нулю в этом случае? Отчего шарик не «виляет» по поверхности сферы? Правильно, нулю равна *касательная составляющая* ускорения шарика, т. е. *ковариантное ускорение!* Ковариантное ускорение — это проекция центростремительного ускорения шарика на касательную плоскость к сфере.



Определение 44.2. Кривая $\alpha(t) = f(u(t)) : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *геодезической*, если ее ковариантное ускорение тождественно равно нулю:

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \equiv 0,$$

или, что то же самое, $\ddot{\alpha}(t) \perp T_{u(t)}f$ в любой точке $t \in I$.

Таким образом, геодезическая — это та кривая, по которой движется материальная точка на поверхности, если на нее не действуют никакие силы, кроме удерживающей связи — точка «свободно» движется по поверхности.

Очевидно, что геодезическими кривыми на сфере являются большие окружности, и только они. Уже этот факт позволяет увидеть некоторую несостоятельность научно-популярного «определения» геодезической, как кратчайшей линии на поверхности, соединяющей две заданные точки. Действительно, возьмите две достаточно близкие точки A и B на сфере (главное, чтобы они не были диаметрально противоположными) — через них проходит одна большая окружность. Маленькая дуга этой окружности между точками A и B действительно является кратчайшей линией, соединяющей эти точки, но вот большая дуга, идущая вокруг сферы... А если между точками A и B на сфере прорезана дырка...

Наблюдение 44.1. Если кривая $\alpha(t)$ — геодезическая, то $|\dot{\alpha}| \equiv \text{const}$ (т. е. движение точки по поверхности является равномерным и с первым законом Ньютона все в порядке!). Действительно, $d/dt (|\dot{\alpha}|^2) = 2 \langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0$, ведь $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$.

Глядя на определение геодезической кривой, легко написать ее уравнения. Ковариантное ускорение равно нулю:

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = \left(\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \right) f_{u^k} \equiv \vec{0},$$

следовательно, каждая его координата равна нулю:



$$\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Это и есть система дифференциальных уравнений для отыскания геодезических кривых на поверхности.



Наблюдение 44.2. Хочу обратить ваше внимание, что геодезические кривые — это свойство внутренней геометрии поверхности, ибо для их разыскания нужно знать только коэффициенты связности Γ_{ij}^k (являющиеся свойствами внутренней геометрии) и уметь решать системы дифференциальных уравнений.

В силу отмеченного наблюдения иногда говорят, что система дифференциальных уравнений $\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \equiv 0$ определяет геодезические кривые на поверхности *внутренним образом*, ибо она позволяет найти уравнения геодезических кривых в поверхностных координатах и содержит в своей записи только свойства внутренней геометрии.

Всегда ли существуют геодезические кривые и сколько их может быть на данной поверхности? Оказывается, что через каждую точку поверхности в заданном направлении *всегда проходит только одна* геодезическая. Сформулируем это утверждение в виде важного факта.



Важный факт 44.1. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — произвольная поверхность. Тогда для любой точки $p \in U$ и любого касательного вектора $X \in T_p f$ существует единственная геодезическая $\alpha(t) = f(u(t))$ такая, что $\alpha(0) = f(p)$ и $\dot{\alpha}(0) = X$.

Доказательство. Условия $\alpha(0) = f(p)$ и $\dot{\alpha}(0) = X$ являются начальными условиями для системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

поэтому для доказательства этого важного факта нужно лишь сослаться на соответствующую теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. ♦

Пример 44.1. Давайте отыщем геодезические кривые на прямом круговом цилиндре $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ радиуса a :

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v),$$

где область U — полоса, заданная неравенствами $-\pi < u < \pi$, $-\infty < v < \infty$. Матрица первой фундаментальной формы такого цилиндра легко вычисляется:

$$[\mathbf{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Все метрические коэффициенты цилиндра постоянны, следовательно их производные равны нулю. Поскольку (см. п. 40)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right),$$

то все коэффициенты связности цилиндра тождественно равны нулю:

$$\Gamma_{ij}^k \equiv 0.$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений, внутренним образом задающая геодезические кривые $(u(t), v(t))$ в поверхностных координатах цилиндра (u, v) , имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = 0, \\ \ddot{v}(t) = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что решениями этой распавшейся системы дифференциальных уравнений являются кривые $(C_1 t + C_2, D_1 t + D_2)$, которые при разных значениях произвольных постоянных C_1, C_2, D_1, D_2 являются на цилиндре винтовыми линиями, прямолинейными образующими или большими окружностями. Это отлично согласуется с нашими повседневными интуитивными представлениями о траектории наэлектризованного шарика, свободно катающегося по стенкам трубы, висящей в космическом пространстве.

В приведенном примере с цилиндром нам сильно повезло — система дифференциальных уравнений $\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \equiv 0$, задающая геодезические кривые, оказалась очень простой, и ее удалось решить в явном виде. Надо понимать, что в случае произвольной поверхности эту систему практически никогда не удастся решить явно. Даже для случая двумерной сферы решение такой системы представляет собой нетривиальное упражнение.

Упражнение 44.1. Найдите геодезические кривые на сфере

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u),$$

честно решив систему дифференциальных уравнений, задающую геодезические кривые внутренним образом.

Для отыскания геодезических кривых на двумерной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ часто используют следующий прием. Этот прием порой срывается в тех случаях, когда система $\dot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \equiv 0$ «не решается».



Определение 44.3. Кривая β вдоль поверхности f называется *предгеодезической*, если она эквивалентна некоторой геодезической кривой α вдоль f .

Поскольку образы эквивалентных (связанных заменой параметра) кривых совпадают, то образ предгеодезической кривой представляет собой геодезическую линию на поверхности. Предгеодезическая кривая $\beta(\theta)$, таким образом, отличается от геодезической кривой $\alpha(t)$ тем, что точка $\beta(\theta)$ при движении по геодезической траектории не обязательно движется равномерно.



Упражнение 44.2. Пусть $\beta(\theta) \equiv f(u(\theta))$ — кривая вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\vec{N}(p)$ — произвольное нормальное поле вдоль f . Докажите, что $\beta(\theta)$ является предгеодезической кривой тогда и только тогда, когда смешанное произведение $(\vec{N}(u(\theta)), \dot{\beta}(\theta), \ddot{\beta}(\theta))$ равно нулю (т. е. $\det[\vec{N}, \dot{\beta}, \ddot{\beta}] \equiv 0$).

Наблюдение 44.3. Тожество $(\vec{N}, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) \equiv \langle \vec{N}, \dot{\beta} \times \ddot{\beta} \rangle \equiv 0$ в точности означает, что бинормаль предгеодезической кривой всегда лежит в касательной плоскости поверхности f .

Видно, что дифференциальное уравнение $(\vec{N}, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) \equiv 0$ задает предгеодезические кривые «внешним образом», поскольку в нем используется понятие нормального вектора \vec{N} поверхности f , который, разумеется, не является свойством внутренней геометрии.

Так вот, обещанный прием разыскания геодезических состоит в следующем. Часто оказывается гораздо проще решить одно уравнение $(\vec{N}, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) \equiv 0$, чем систему $\dot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \equiv 0$. Решив уравнение $(\vec{N}, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) \equiv 0$, найдем предгеодезическую кривую $\beta(\theta)$ вдоль f . Если интересует только вид геодезической траектории, то на этом можно остановиться. Если же, во что бы то ни стало, хочется найти именно геодезическую кривую, то найденную предгеодезическую $\beta(\theta)$ надо перепараметризовать так, чтобы сделать модуль ее скорости постоянным (например, найти натуральную параметризацию кривой $\beta(\theta)$). Геодезическая кривая готова. Запомните, пожалуйста, этот прием отыскания геодезических кривых на двумерных поверхностях в \mathbf{R}^3 — авось, пригодится.

Задачи и упражнения



1. Найдите ковариантное ускорение кривой $v = 2u + 1$ вдоль поверхности $f(u, v) = {}^t(u, u^2, v)$ в точке $p(1, 3)$.
2. Найдите ковариантное ускорение кривой $\beta(t) = {}^t(3t, -t^2)$ вдоль седла $f(u, v) = {}^t(u, v, uv)$ в точке $t_0 = 1$.
3. Найдите геодезические вдоль следующих поверхностей:
 - а) $f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$;
 - б) $f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$;
 - в) $f(u, v) = {}^t\left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + \cos u\right)\right)$;
 - г) $f(u, v) = {}^t\left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u\right)$;
 - д) $f(u, v, w) = {}^t(R \cos u, R \sin u, v, w)$;
 - е) $f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$.

4. Докажите, что всякая прямая, лежащая на образе поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, является геодезической линией.

5. Докажите, что геодезическая кривая вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ является линией кривизны тогда и только тогда, когда она плоская.

6. Докажите, что геодезическая кривая вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ является асимптотической линией тогда и только тогда, когда она прямая.

7. Найдите геодезические кривые на поверхности $f(u, v) : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^m$, матрица первой фундаментальной формы которой имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}.$$

45. Вариации кривых на поверхности. Экстремальные свойства геодезических

В этом пункте кратко поговорим об экстремальных свойствах геодезических линий вдоль поверхностей — геодезические обязаны своей популярностью именно этим свойствам. Результаты этого пункта традиционно излагаются на основе методов вариационного исчисления, но в университетской программе курс дифференциальной геометрии стоит раньше курса вариационного исчисления! В результате мне придется в своем рассказе обойтись без прямых ссылок на теоремы и методы, с которыми студенты знакомятся позже. Но вот уж точно без чего не обойтись, так это без понятия вариации кривой вдоль поверхности.

Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — инъективная поверхность, $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow f(U)$ — кривая вдоль f , определенная на отрезке

$[a, b]$, и $\alpha(t) = f(u(t))$, где $u(t)$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Рассмотрим семейство кривых $\gamma_s(t) = \gamma(t, s)$ вдоль поверхности f (при каждом значении параметра $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbf{R}$ — своя кривая).



Определение 45.1. Гладкое отображение

$$\gamma(t, s) : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow f(U)$$

называется *вариацией кривой* $\alpha(t)$ на поверхности f , если $\gamma(t, 0) = \gamma_0(t) \equiv \alpha(t)$.

Определение 45.2. Вариация $\gamma_s(t)$ называется *собственной*, если она фиксируется в концах отрезка $[a, b]$, т. е. $\gamma(a, s) \equiv \alpha(a)$ и $\gamma(b, s) \equiv \alpha(b)$ (см. рис. 45.1).

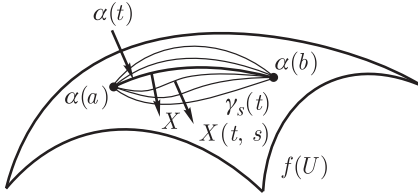


Рис. 45.1

Рассмотрим частную производную $\frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} = X(t, s)$. Она является касательным вектором к поверхности f , показывающим, куда движется точка $\gamma(t, s)$ с ростом s при фиксированном t (см. рис. 1). Производная $\frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} = X(t, s)$, вычисленная в точке $s = 0$, является векторным полем $\left. \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = X(t)$ вдоль кривой $\alpha(t)$, которое называется *векторным полем вариации* $\gamma_s(t)$.

Определение 45.3. Вариация $\gamma_s(t)$ называется *нормальной*, если в любой момент $t \in [a, b]$ вектор $X(t)$ ортогонален $\dot{\alpha}(t)$.

Пусть $\gamma_s(t)$ — вариация кривой $\alpha(t)$ на поверхности f . Рассмотрим длину кривых $\gamma_s(t)$:

$$\ell[\gamma_s(t)] = \int_a^b \left| \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} \right| dt = \ell_\gamma(s)$$

— разумеется, эта длина является функцией от s , ведь при разных s — разные кривые!

Теорема 45.1. Если $\gamma_s(t)$ — собственная или нормальная вариация кривой единичной скорости $\alpha(t)$, то

$$\dot{l}_\gamma(0) = - \int_a^b \langle \ddot{\alpha}, X \rangle dt = - \int_a^b \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, X(t) \right\rangle dt.$$

Доказательство. Дифференцируем под знаком интеграла:

$$\dot{l}_\gamma(s) = \int_a^b \frac{\left\langle \frac{\partial \gamma(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma(t,s)}{\partial t \partial s} \right\rangle}{\left| \frac{\partial \gamma(t,s)}{\partial t} \right|} dt,$$

так как

$$\left| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|^\bullet = \left(\sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle} \right)^\bullet = \frac{2 \cdot \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \right\rangle}{2 \cdot \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle}}.$$

Далее,

$$\frac{\partial \gamma(t,0)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \alpha(t),$$

следовательно, при $s = 0$ имеем $\left| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right| = 1$, ведь $\alpha(t)$ — кривая единичной скорости. Кроме того,

$$X(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{s=0}, \quad \frac{\partial^2 \gamma(t,0)}{\partial t \partial s} = \dot{X}(t).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \dot{l}_\gamma(0) &= \int_a^b \left\langle \dot{\alpha}(t), \dot{X}(t) \right\rangle dt = \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \langle \dot{\alpha}, X \rangle - \langle \ddot{\alpha}, X \rangle \right] dt = \\ &= \langle \dot{\alpha}, X \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \ddot{\alpha}, X \rangle dt = \langle \dot{\alpha}, X \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, X(t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\gamma_s(t)$ — собственная вариация, то


$$X(a) = \left. \frac{\partial \gamma(a, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{\partial \alpha(a)}{\partial s} = 0,$$

$$X(b) = \left. \frac{\partial \gamma(b, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{\partial \alpha(b)}{\partial s} = 0,$$

следовательно, $\langle \dot{\alpha}, X \rangle|_a^b = 0$.

Если же $\gamma_s(t)$ — нормальная вариация, то вектор $X(t) = \left. \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0}$ ортогонален $\dot{\alpha}(t)$, следовательно $\langle \dot{\alpha}, X \rangle \equiv 0$. \blacklozenge

Наконец, мы подошли к формулировке самого популярного свойства геодезических кривых вдоль поверхности — длина геодезической кривой экстремальна, т. е. производная функции с названием «длина кривой из вариации геодезической» обращается в нуль именно на самой геодезической.

 **Теорема 45.2.** Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — инъективная поверхность, $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow f(U)$ — кривая единичной скорости вдоль f , определенная на отрезке $[a, b]$, и $\alpha(t) = f(u(t))$, где $u(t)$ — кривая в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\alpha(t)$ — геодезическая;
- 2) $\dot{\ell}_\gamma(0) = 0$ для любой собственной вариации $\gamma_s(t)$ кривой $\alpha(t)$;
- 3) $\dot{\ell}_\gamma(0) = 0$ для любой нормальной вариации $\gamma_s(t)$ кривой $\alpha(t)$.

Доказательство. Имеем

$$\dot{\ell}_\gamma(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, X(t) \right\rangle dt, \quad \text{где } X(t) = \left. \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0}.$$

Тогда, очевидно, из условия 1) следуют условия 2) и 3), так как у всякой геодезической кривой $\alpha(t)$ ковариантное ускорение равно нулю: $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \equiv 0$.

Обратно, покажем, что из условия 2) следует условие 1) и, одновременно, из условия 3) следует условие 1).

От противного. Пусть кривая $\alpha(t)$ не является геодезической. Тогда укажем собственную и, одновременно, нормальную вариацию $\gamma_s(t)$ такую, что $\dot{\ell}_\gamma(0) < 0$.

Так как кривая $\alpha(t)$ — не геодезическая, то $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \neq 0$. Поскольку $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}$ — непрерывная вектор-функция, то существует целый отрезок $[a_0, b_0] \subset [a, b]$ такой, что $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \neq 0$ всюду на этом отрезке $[a_0, b_0]$.

Определим вектор $\vec{x}(t)$ как прообраз ковариантного ускорения кривой $\alpha(t)$:

$$\vec{x}(t) = (df_{u(t)})^{-1} \left(\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \right) \neq \vec{0}.$$

Пусть $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольная гладкая функция с носителем (a_0, b_0) , т. е. $\varphi(t) > 0$ на интервале (a_0, b_0) , и $\varphi(t) \equiv 0$ вне интервала (a_0, b_0) (такие функции принято называть *финитными*). Например, в качестве $\varphi(t)$ подойдет функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{(t-a_0)^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{-1}{(t-b_0)^2}\right), & \text{если } t \in (a_0, b_0), \\ 0, & \text{если } t \notin (a_0, b_0). \end{cases}$$

Упражнение 45.1. Проверьте-ка самостоятельно, что так определенная функция $\varphi(t)$ является всюду гладкой на \mathbf{R} (обратите внимание на концы интервала (a_0, b_0)).

Рассмотрим вариацию $\gamma(t, s) = f(u(t) + s \cdot \varphi(t) \cdot \vec{x}(t))$, где $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, а число ε таково, чтобы аргумент $u(t) + s \cdot \varphi(t) \cdot \vec{x}(t)$ поверхности $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ оставался в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Видно, что $\gamma(t, s)$ — вариация кривой $\alpha(t)$.

Считаем:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(a, s) &= f(u(a) + \vec{0}) = \alpha(a) \\ \gamma(b, s) &= f(u(b) + \vec{0}) = \alpha(b) \end{aligned} \right\}, \text{ следовательно, вариация } \gamma(t, s) \text{ — собственная.}$$

Далее,

$$\begin{aligned} X(t) &= \left. \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial s}(u(t) + s \cdot \varphi(t) \cdot \vec{x}(t)) \right|_{s=0} = \\ &= df \left[\left. \frac{\partial}{\partial s}(u(t) + s \cdot \varphi(t) \cdot \vec{x}(t)) \right|_{s=0} \right] = \\ &= df \left[\varphi(t) \cdot \vec{x}(t) \right] = \varphi(t) \cdot \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}. \end{aligned}$$

Так как $|\dot{\alpha}| \equiv 1$, то $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \perp \dot{\alpha}$. Значит, $X = \varphi(t) \cdot \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \perp \dot{\alpha}$, т. е. $\gamma(t, s)$ — нормальная вариация.

Наконец, вычислим производную ее длины:

$$\begin{aligned} \dot{l}_\gamma(0) &= - \int_a^b \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, X \right\rangle dt = - \int_{a_0}^{b_0} \varphi(t) \cdot \left\langle \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}, \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \right\rangle dt = \\ &= - \int_{a_0}^{b_0} \varphi(t) \cdot \left| \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} \right|^2 dt < 0, \end{aligned}$$

так как подынтегральная функция строго положительна на интервале (a_0, b_0) . \blacklozenge



Таким образом, длина геодезической экстремальна среди всех кривых $\gamma(t, s)$, соединяющих точки $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ на поверхности f . Всякая кратчайшая является геодезической кривой. Всякая геодезическая в достаточно маленькой области поверхности $f(U)$ является кратчайшей. Глобально последнее утверждение неверно — это показывает пример из предыдущего пункта про две достаточно близкие точки сферы, соединенные большой и маленькой дугами одной большой окружности.

Вот и все.

46. Ковариантное дифференцирование

Пусть $\varphi(u) : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольная гладкая скалярная функция (*скалярное поле*) вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Как и в случае с векторными полями, векторы которых мы договорились откладывать от точек на поверхности, нам будет удобно считать, что функция $\varphi(u)$ ставит в соответствие каждой точке $f(u) \in f(U)$ некоторое действительное число $\varphi(u)$, которое, если угодно, «приклеено» к точке $f(u)$. Хорошим физическим примером скалярного поля служит температура поверхности Земли в некоторый фиксированный момент времени.



Определение 46.1. Пусть $X(u) = x^i f_{u^i} \in T_u f$ — произвольный касательный вектор поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ в точке $u \in U$, а $\varphi(u) : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкое скалярное поле вдоль f . Число

$$\nabla_X \varphi(u) = x^i \cdot \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u^i}$$

называется *производной скалярного поля* $\varphi(u)$ *по направлению вектора* $X(u)$.

Понятие производной по направлению хорошо известно из курса математического анализа, поэтому я отмечу сейчас только четыре очевидных свойства производной по направлению:

- 1) $\nabla_{f u^i} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$;
- 2) для любых касательных полей X, Y и любых скалярных полей λ, μ, φ вдоль поверхности f

$$\nabla_{(\lambda X + \mu Y)} \varphi = \lambda \nabla_X \varphi + \mu \nabla_Y \varphi$$

— операция взятия производной по направлению линейна по нижнему аргументу (направлению дифференцирования);

- 3) для любого касательного поля $X(u)$, любых скалярных полей φ_1, φ_2 вдоль f и любых констант $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\nabla_X (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) = C_1 \nabla_X \varphi_1 + C_2 \nabla_X \varphi_2$$

— операция взятия производной по направлению линейна по верхнему аргументу (скалярному полю).

- 4) для любого касательного поля $X(u)$ и любых скалярных полей φ, ψ вдоль f

$$\nabla_X (\varphi \cdot \psi) = (\nabla_X \varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\nabla_X \psi)$$

— основополагающее правило дифференцирования произведения.

Скажу вам по секрету, что правило дифференцирования произведения снабжено эпитетом «основополагающее» не случайно, и вот почему. Пусть на линейном пространстве \vec{V} (каковым, в частности, является множество всех гладких скалярных полей вдоль f) определена некоторая билинейная операция $a \circ b$ «произведения» элементов этого линейного пространства. Тогда всякий линейный оператор $A : \vec{V} \rightarrow \vec{V}$, заданный на линейном пространстве \vec{V} с операцией «произведения» $\circ : \vec{V} \times \vec{V} \rightarrow \vec{V}$, как раз и называется *оператором дифференцирования* (или просто *дифференцированием*), если для любых элементов $a, b \in \vec{V}$ выполнено

$$A(a \circ b) = A(a) \circ b + a \circ A(b).$$

Понятие производной по направлению чрезвычайно широко используется в физике для изучения различных скалярных полей, так как по смыслу своему производная $\nabla_X \varphi$ есть не что иное, как «скорость» изменения скалярного поля $\varphi(u)$ при пере-

мещении со скоростью $X(u)$. Поскольку в различных областях научного знания приходится иметь дело не только со скалярными, но и с векторными полями, ученые (в особенности — физики) хотят иметь на вооружении аналогичную характеристику «скорости» изменения векторного поля. Давайте поможем ученым-физикам и разработаем такую характеристику.

Проблема определения производной векторного поля заключается в следующем. Пусть $X(u)$ — касательное векторное поле вдоль поверхности f . Если мы, бездумно следуя «школьному» стереотипу, составим «отношение приращения функции к приращению аргумента»:

$$\frac{X(u_0 + \Delta u) - X(u_0)}{\Delta u},$$

то получим совершеннейшую чушь! В аффинном пространстве \mathbf{R}^n приращение аргумента Δu является вектором, откладываемым от точки $u_0 \in U$, а делить что-то на вектор просто недостоинно для грамотного человека.

Можно попробовать выйти из положения, подобрав в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ некоторую кривую $\alpha(t)$, удовлетворяющую условиям $\alpha(t_0) = u_0 \in U$ и $\dot{\alpha}(t_0) = \Delta u \in T_{u_0}U$. Тогда получится нечто более вразумительное:

$$\frac{X(\alpha(t_0 + \Delta t)) - X(\alpha(t_0))}{\Delta t},$$



но, к сожалению, тоже лишенное всякого смысла. Дело в том, что касательные векторы $X(\alpha(t_0 + \Delta t))$ и $X(\alpha(t_0))$ лежат в *разных* касательных пространствах $T_{\alpha(t_0 + \Delta t)}f$ и $T_{\alpha(t_0)}f$! Их нельзя вычитать друг из друга! Это векторы из *разных* пространств, их координаты вычислены в *разных* базисах, их длины находятся с помощью *разных* матриц Грама и т. д., и т. п.

Автор по своему опыту знает, сколь трудно бывает растолковать студенту-физику, начинающему изучать курс «Теория поля», почему выражение $X(\alpha(t + \Delta t)) - X(\alpha(t))$ является бессмысленным. Человеку, не знакомому с понятиями касательного пространства и касательного расслоения, очень трудно уяснить, почему «векторы, отложенные от разных точек, нельзя складывать и вычитать» (цитата из классической книги Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля»). Дело осложняется тем, что физики, как правило, имеют дело с поверхностями вида $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ («замена координат»). Углядеть каким-то шестым чувством существование разных *непересекающихся*

(!) касательных пространств, изоморфных \mathbf{R}^n и приклеенных к каждой точке изучаемого пространства \mathbf{R}^n , является, на мой взгляд, запредельным умственным подвигом. Те немногие, которым удастся совершить этот подвиг, имеют хорошие шансы стать настоящими физиками-теоретиками.

Итак, мы хотим определить некоторым «разумным» образом операцию

$$\nabla_X Y : T_u f \times T_u f \rightarrow T_u f$$

дифференцирования векторного поля $Y(u)$ в направлении $X(u)$, обладающую свойствами, схожими со свойствами 1)–4) производной скалярного поля по направлению. Давайте сразу назовем результат $\nabla_X Y \in T_u f$ этой будущей операции *ковариантной производной вектора $Y(u)$ в направлении вектора $X(u)$* .


Мы начнем наши рассуждения с наглядного и наиболее понятного случая. Двигаясь от частного к общему, мы будем постепенно, поэтапно, определять «разумное» понятие ковариантной производной.

Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $m > n$, — поверхность класса гладкости не ниже C^3 и f_{u^i} — один из базисных векторов касательного пространства $T_u f$. Разумеется, $f_{u^i}(u)$ есть касательное векторное поле вдоль f .¹⁾ Из п. 40 нам известно, что для вектора $f_{u^i u^j}(u)$ выполнено:


$$f_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k f_{u^k} + \vec{N}_{ij},$$

где $\vec{N}_{ij} \in (T_p f)^\perp$, а

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right).$$

 **Определение 46.2.** Ковариантной производной $\nabla_{f_{u^j}} f_{u^i}$ вектора²⁾ f_{u^i} по направлению вектора f_{u^j} (в связности Леви-Чивита) называется ортогональная проекция частной производной $f_{u^i u^j}(u)$ на касательное пространство $T_u f$, т. е.

$$\nabla_{f_{u^j}} f_{u^i} = \Gamma_{ij}^k f_{u^k}.$$

 **Наблюдение 46.1.** Ковариантная производная $\nabla_{f_{u^j}} f_{u^i}$ является свойством внутренней геометрии поверхности f .

¹⁾ Далее мы довольно часто, для краткости речи, будем вместо слов «векторное поле вдоль поверхности» говорить просто — «вектор».

²⁾ См. предыдущую сноску.



Наблюдение 46.2. Поскольку определение ковариантной производной $\nabla_{f_{u^j}} f_{u^i}$ является «внутренним», т. е. использует только свойства Γ_{ij}^k внутренней геометрии, оно вполне пригодно и для случая «замены координат», т. е. поверхности вида $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, особо интересной физикам.

Идем далее по пути определения ковариантной производной вектора. Глядя на свойство 2) производной скалярного поля по направлению вектора X , позаботимся о линейности ковариантной производной по нижнему аргументу (направлению дифференцирования).



Определение 46.3. Пусть $X(u) = x^j(u) f_{u^j}(u)$ — касательное векторное поле вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (случай $n = m$ не исключается!). Тогда для любого базисного вектора f_{u^i} касательного пространства $T_u f$ положим

$$\nabla_X f_{u^i} = \nabla_{(x^j f_{u^j})} f_{u^i} = x^j(u) \cdot \nabla_{f_{u^j}} f_{u^i}.$$

Таким образом, мы определили ковариантную производную базисных векторов по любому направлению $X \in T_u f$. Осталось сделать «любим» верхний аргумент Y операции ковариантного дифференцирования $\nabla_X Y$. Для этого взгляните на свойства 3) и 4) производной скалярного поля по направлению, после чего станет понятным следующее определение.



Определение 46.4. Пусть $Y(u) = y^i(u) f_{u^i}(u)$ — произвольное касательное поле вдоль поверхности f и f_{u^j} — произвольный базисный вектор пространства $T_u f$. Тогда положим

$$\begin{aligned} \nabla_{f_{u^j}} (y^i f_{u^i}) &= (\nabla_{f_{u^j}} y^i) \cdot f_{u^i} + y^i \cdot (\nabla_{f_{u^j}} f_{u^i}) = \\ &= \frac{\partial y^i(u)}{\partial u^j} \cdot f_{u^i} + y^i \cdot \Gamma_{ij}^k f_{u^k} = \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) \cdot f_{u^k}. \end{aligned}$$

Здорово, да? По-моему, — красиво получается! Соберем теперь все сказанное в одном определении.



Определение-итог 46.5. Пусть $X(u) = x^j(u) f_{u^j}(u)$ и $Y(u) = y^i(u) f_{u^i}(u)$ — произвольные касательные векторные поля вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Тогда ковариантной производной $\nabla_X Y$ вектора Y вдоль вектора X называется касательный вектор

$$\nabla_X Y = \nabla_{(x^j f_{u^j})} (y^i f_{u^i}) = x^j \nabla_{f_{u^j}} (y^i f_{u^i}) = x^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) \cdot f_{u^k}.$$



Наблюдение 46.3. Ковариантная производная $\nabla_X Y$ является не чем иным, как *ортогональной проекцией* вектора $Z = x^j \frac{\partial Y(u)}{\partial u^j}$ на касательное пространство $T_u f$. Действительно,

$$\begin{aligned} Z &= x^j \frac{\partial}{\partial u^j} (y^k f_{u^k}) = x^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} f_{u^k} + y^k (\Gamma_{kj}^l f_{u^l} + \vec{N}_{kj}) \right) = \\ &= x^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} f_{u^k} + y^i (\Gamma_{ij}^k f_{u^k} + \vec{N}_{ij}) \right) = \\ &= x^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) \cdot f_{u^k} + x^j y^i \vec{N}_{ij}, \end{aligned}$$

откуда, после отбрасывания нормальной составляющей $x^j y^i \vec{N}_{ij}$, получаем определение ковариантной производной $\nabla_X Y$.

Согласитесь, что это определяющее наглядное свойство ковариантной производной очень трудно заметить физикам, работающим с поверхностями вида $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. В случае, когда f — диффеоморфизм (замена координат), нормальной составляющей у вектора Z просто нет! Как разглядеть в ковариантной производной ортогональную проекцию? «Очень трудно найти черную кошку в темной комнате, особенно, если ее там нет...»¹⁾

Упражнение 46.1. Перечитайте, пожалуйста, п. 44 и сравните получившееся определение ковариантной производной $\nabla_X Y$ с определением ковариантного ускорения $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}$ кривой $\alpha(t)$ вдоль поверхности. Проверьте, что $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}$. Глядя на п. 44, задумайтесь еще раз о пользе ковариантного дифференцирования и причинах возникновения этого понятия.

Теперь, для полноты картины, перечислю четыре очевидных свойства ковариантной производной вектора. Сравните самостоятельно эти свойства со свойствами производной скалярного поля по направлению.

Свойства ковариантной производной:

- 1) $\nabla_{f_{u^j}} f_{u^i} = \Gamma_{ij}^k f_{u^k}$;
- 2) для любых касательных полей X_1, X_2, Y и любых скалярных полей λ_1, λ_2 вдоль поверхности f выполнено:

$$\nabla_{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)} Y = \lambda_1 \nabla_{X_1} Y + \lambda_2 \nabla_{X_2} Y$$

¹⁾ Конфуций, наверное, был бы неплохим физиком-теоретиком.

— операция взятия ковариантной производной линейна по нижнему аргументу (направлению дифференцирования);

- 3) для любых касательных полей X, Y_1, Y_2 и любых констант $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ выполнено:

$$\nabla_X(C_1 Y_1 + C_2 Y_2) = C_1 \nabla_X Y_1 + C_2 \nabla_X Y_2$$

— операция взятия ковариантной производной линейна по верхнему аргументу.

- 4) для любых касательных полей X, Y и любого скалярного поля φ вдоль поверхности f выполнено:

$$\nabla_X(\varphi Y) = (\nabla_X \varphi) \cdot Y + \varphi \cdot \nabla_X Y$$

— правило дифференцирования произведения.

Упражнение 46.2. Возьмите листочек бумаги и аккуратно напишите доказательства свойств 2), 3) и 4). Это позволит вам привыкнуть к понятию ковариантной производной.

С ковариантным дифференцированием векторных полей тесно связано одно из важнейших геометрических понятий — понятие *параллельного перенесения* вектора вдоль кривой на поверхности. С наглядно-интуитивной точки зрения, нести параллельно вектор вдоль кривой, значит, так передвигать вектор своим основанием по кривой, чтобы его длина и направление не менялись. Давайте формализуем это понятие.



Определение 46.6. Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность, $t \in [a, b]$ и $\alpha(t) = f(u(t))$ — кривая вдоль f . Касательное векторное поле $Y(u)$ называется *ковариантно постоянным* (или *параллельным*) вдоль кривой $\alpha(t)$, если ковариантная производная вектора $Y = y^i f_{u^i}$ в направлении вектора скорости $\dot{\alpha}(t) = \dot{u}^j f_{u^j}$ для всех $t \in [a, b]$ равна нулю:

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)} Y \equiv \vec{0}, \text{ т. е. } \dot{u}^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) \equiv 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, n.$$



Если векторное поле $Y(u)$ ковариантно постоянно вдоль $\alpha(t) = f(u(t))$, то говорят, что *вектор $Y(u(b))$ получен из вектора $Y(u(a))$ параллельным переносом вдоль кривой $\alpha(t)$.*

Для тараканов, изучающих внутреннюю геометрию своей поверхности, ковариантно постоянный вектор выглядит просто постоянным, ведь они не могут заметить его изменения в объемлющем пространстве! Тараканы видят только проекцию про-

изводной вектора на касательное пространство (ковариантную производную) — а она-то, как раз, нулевая! Если тараканы несут какой-то касательный вектор вдоль кривой и этот вектор ковариантно постоянен, то они будут в полной уверенности, что производят параллельный перенос!

Рассмотрим чуть более общий случай. Пусть $\alpha(t) = f(u(t))$ — произвольная кусочно-гладкая кривая вдоль поверхности f и $t \in [a, b] = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \dots \cup [a_k, a_{k+1}] \cup \dots$ — отрезки ее гладкости. Ясно, что совсем несложно распространить понятие параллельного переноса вектора $Y(u)$ на случай кусочно-гладких кривых. Нужно просто договориться считать, что на каждом следующем отрезке гладкости $[a_i, a_{i+1}]$ производится параллельный перенос вектора $Y(u(a_i))$ (т. е. результата параллельного переноса вектора Y на предыдущем отрезке гладкости).

Понятие параллельного переноса поможет нам, наконец-то уяснить геометрический смысл могущественного тензора кривизны Леви-Чивита, формально возникшего у нас в этой книжке при выводе уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци–Майнарди.

Пусть $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — поверхность и $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ — стандартный базис ее касательного пространства $T_p f$. Возьмем произвольную пару базисных векторов f_{u^i}, f_{u^j} и рассмотрим «параллелограмм» $P_{ij}(\varepsilon)$ на поверхности $f(U)$, являющийся образом квадрата $K_{ij}(\varepsilon)$ из области $U \subseteq \mathbf{R}^n$, построенного на векторах $\varepsilon e_i, \varepsilon e_j$ (см. рис. 46.1).

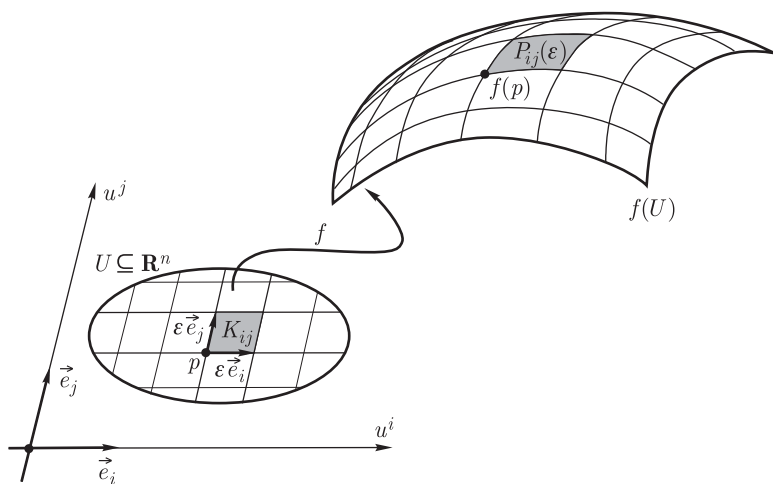


Рис. 46.1

Ясно, что $P_{ij}(\varepsilon)$ — кусочно-гладкий замкнутый контур на поверхности f . Возьмем теперь произвольный касательный вектор $Y \in T_p f$ и обнесем его параллельно вокруг контура $P_{ij}(\varepsilon)$. Получим некоторый новый вектор $\tilde{Y}(\varepsilon) \in T_p f$ — результат параллельного переноса вектора $Y \in T_p f$ вдоль кусочно-гладкой замкнутой кривой $P_{ij}(\varepsilon)$. Возникает линейный (докажите!) оператор

$$A_{ij}(\varepsilon) : T_p f \rightarrow T_p f,$$

который занимается тем, что параллельно обносит касательные векторы из $T_p f$ вокруг «базисного» контура $P_{ij}(\varepsilon)$, т. е. $A_{ij}(\varepsilon) \times (Y) = \tilde{Y}(\varepsilon)$.

Внимание, вопрос! Насколько оператор $A_{ij}(\varepsilon)$ отличается от тождественного оператора $Id_{T_p f}$? Интуитивно ясно, что если контур $P_{ij}(\varepsilon)$ плоский (поверхность в направлениях f_{u^i}, f_{u^j} не искривлена), то после параллельного перенесения вдоль $P_{ij}(\varepsilon)$, любой вектор займет исходное положение, т. е. $A_{ij}(\varepsilon) = Id_{T_p f}$. А если поверхность изогнута?

Рассмотрим разность $A_{ij}(\varepsilon) - Id_{T_p f}$. Пусть $Y = y^k f_{u^k} \in T_p f$ — произвольный касательный вектор, $\tilde{Y}(\varepsilon) = A_{ij}(\varepsilon)(Y)$ — результат параллельного переноса вектора Y вокруг контура $P_{ij}(\varepsilon)$.

Внимание! Перед вами упражнение, раскрывающее геометрический смысл тензора кривизны Леви-Чивита.



Упражнение 46.3. Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(A_{ij}(\varepsilon) - Id_{T_p f})(Y)}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{Y}(\varepsilon) - Y}{\varepsilon^2} = R_{ijk}^m y^k f_{u^m}.$$



Таким образом, тензору R_{ijk}^m можно приписать следующую геометрическую интерпретацию. Можно сказать (допуская некоторую вольность речи), что при фиксированных индексах i, j матрица (R_{ijk}^m) является матрицей линейного оператора $A_{ij} - Id_{T_p f}$, который показывает, насколько отличается от исходного вектора результат его параллельного переноса вокруг «бесконечно малого базисного параллелограмма» P_{ij} .

Упражнение 46.4. Дайте теперь геометрическое толкование уже известных нам свойств тензора кривизны Леви-Чивита:

$$R_{ijk}^m = -R_{jik}^m \quad \text{и} \quad R_{iik}^m \equiv 0.$$

Подходит к концу сорок шестой пункт этой книжки, а вместе с ним и весь наш рассказ о начальных главах дифференциальной геометрии. Под конец нашего повествования, я хочу научить вас правильно дифференцировать не только скалярные и векторные поля вдоль поверхности, но и произвольные тензоры (тензорные поля). Кто и где еще обучит вас этому?

Сначала научимся находить ковариантную производную ко-векторного поля (линейной формы, заданной в каждом касательном пространстве $T_p f$). Пусть в сопряженном пространстве $(T_p f)^*$ зафиксирован базис $f^{u^1}, f^{u^2}, \dots, f^{u^n}$, дуальный к стандартному базису $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$, и пусть $\xi(p) = \xi_i(p) f^{u^i}(p)$ — произвольное ковекторное поле вдоль f . Я обычно представляю себе эту ситуацию следующим образом: к каждой точке $f(p) \in f(U)$ поверхности f приклеено касательное пространство $T_p f$, на котором задан некоторый линейный функционал $\xi(p)$ (т.е. ковектор), гладко зависящий от аргумента $p \in U$.

Для определения производной ковектора опять-таки нельзя составить привычное выражение типа

$$\frac{\xi(\alpha(t + \Delta t)) - \xi(\alpha(t))}{\Delta t},$$

поскольку ковекторы $\xi(\alpha(t + \Delta t))$ и $\xi(\alpha(t))$ определены на разных касательных пространствах. У нас не определена операция вычитания линейных функционалов, взятых из разных пространств.

Пусть $X(u) = x^j(u) f_{uj}(u)$ — произвольный касательный вектор, который будет служить нам направлением дифференцирования. Попробуем сразу по аналогии с ковариантной производной $\nabla_X Y$ векторного поля написать определение ковариантной производной $\nabla_X \xi$ ковектора $\xi(u) = \xi_i(u) f^{u^i}(u)$:

$$\nabla_X \xi = \nabla_{(x^j f_{uj})} (\xi_i f^{u^i}) = x^j \nabla_{f_{uj}} (\xi_i f^{u^i}) = x^j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \xi_k \Lambda_{ij}^k \right) \cdot f^{u^i}.$$

В этой записи видно, что мы положили ковариантные производные ковектора ξ в направлении базисных векторов f_{uj} равными

$$\nabla_{f_{uj}} \xi = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \xi_k \Lambda_{ij}^k \right) \cdot f^{u^i},$$

где Λ_{ij}^k — некие неизвестные нам пока коэффициенты, наподобие символов Кристоффеля Γ_{ij}^k , т.е. мы фактически считаем, что

«ортогональные проекции» производных базисных ковекторов имеют разложения

$$\nabla_{f_{uj}} f^{uk} = \Lambda_{ij}^k f^{ui}.$$

Нет таких вершин, которые мы не смогли бы покорить! Тем более, что после всего прочитанного, отыскание коэффициентов Λ_{ij}^k для нас не вершина, а лишь небольшая кочка! Нам сказано, что базисы $f^{u^1}, f^{u^2}, \dots, f^{u^n}$ и $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ дуальные. Это означает, что произведения (строки на столбец) $f^{u^m} \cdot f_{u^k} \equiv \delta_k^m$ являются константами и, следовательно:

$$\frac{\partial(f^{u^m} f_{u^k})}{\partial u^j} = \frac{\partial \delta_k^m}{\partial u^j} \equiv 0.$$


Мы хотим, чтобы определяемая нами операция $\nabla_{f_{uj}}$ была операцией дифференцирования, т. е. для нее выполнялось бы основополагающее правило дифференцирования произведения. Ну, так «поколдуем» немного, используя наше желание:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial \delta_k^m}{\partial u^j} = \nabla_{f_{uj}} \delta_k^m = \nabla_{f_{uj}} (f^{u^m} \cdot f_{u^k}) = \\ &= \nabla_{f_{uj}} (f^{u^m}) \cdot f_{u^k} + f^{u^m} \cdot \nabla_{f_{uj}} (f_{u^k}) = \\ &= (\Lambda_{ij}^m f^{u^i}) \cdot f_{u^k} + f^{u^m} \cdot (\Gamma_{kj}^l f_{u^l}) = \\ &= \Lambda_{ij}^m (f^{u^i} \cdot f_{u^k}) + (f^{u^m} \cdot f_{u^l}) \Gamma_{kj}^l = \Lambda_{ij}^m \delta_k^i + \delta_l^m \Gamma_{kj}^l = \Lambda_{kj}^m + \Gamma_{kj}^m \equiv 0. \end{aligned}$$

Вот вам и результат:

$$\Lambda_{kj}^m = -\Gamma_{kj}^m !$$

Оказывается коэффициенты Λ_{ij}^k обязаны быть теми же самыми коэффициентами связности Γ_{ij}^k , только с обратными знаками!

 **Определение 46.7.** Ковариантной производной $\nabla_X \xi$ ковектора $\xi(u) = \xi_i(u) f^{u^i}(u)$ в направлении вектора $X(u) = x^j(u) f_{uj}(u)$ называется ковектор

$$\nabla_X \xi = \nabla_{(x^j f_{uj})} (\xi_i f^{u^i}) = x^j \nabla_{f_{uj}} (\xi_i f^{u^i}) = x^j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} - \xi_k \Gamma_{ij}^k \right) \cdot f^{u^i}.$$

Как видите, ничего страшного.

Теперь осталось привести самое общее определение ковариантной производной $\nabla_X T$ произвольного тензора $T(u)$ вдоль поверхности f в направлении касательного вектора $X(u)$.



Определение 46.8. Пусть $X(u) = x^j f_{u^j}$ — касательный вектор поверхности f . Тогда операция ковариантного дифференцирования в направлении вектора $X(u)$ определяется следующим образом:

- 1) ковариантная производная $\nabla_X \varphi$ скалярного поля $\varphi(u)$ вдоль поверхности f есть производная по направлению:

$$\nabla_X \varphi(u) = x^i \cdot \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u^i};$$

- 2) ковариантная производная $\nabla_X Y$ вектора $Y = y^i f_{u^i}$ вдоль поверхности f есть касательный вектор:

$$\nabla_X Y = x^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) \cdot f_{u^k};$$

- 3) ковариантная производная $\nabla_X \xi$ ковектора $\xi = \xi_i f^{u^i}$ вдоль поверхности f есть (касательный) ковектор:

$$\nabla_X \xi = x^j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} - \xi_k \Gamma_{ij}^k \right) \cdot f^{u^i};$$

- 4) ковариантная производная тензорного произведения $T \otimes R$ элементов $T \in \vec{V}$ и $R \in \vec{W}$ произвольных векторных пространств определяется по правилу дифференцирования произведения:

$$\nabla_X (T \otimes R) = (\nabla_X T) \otimes R + T \otimes (\nabla_X R)$$

и является тензором того же типа, что и тензор $T \otimes R$.

Пункт 4 приведенного определения позволяет, отпрываясь от ковариантных производных вектора и ковектора (тензоров типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно), получить ковариантную производную тензора любого типа.

Пример 46.1. Ковариантная производная $\nabla_{f_{u^k}} B$ билинейной формы $B : T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbf{R}$ вдоль поверхности f (т.е. тензора $B = b_{ij} (f^{u^i} \otimes f^{u^j})$ типа $(0, 2)$) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{f_{u^k}} (b_{ij} (f^{u^i} \otimes f^{u^j})) &= (\nabla_{f_{u^k}} b_{ij}) \cdot (f^{u^i} \otimes f^{u^j}) + \\ &+ b_{ij} \cdot (\nabla_{f_{u^k}} f^{u^i}) \otimes f^{u^j} + b_{ij} \cdot f^{u^i} \otimes (\nabla_{f_{u^k}} f^{u^j}) = \\ &= \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} \cdot (f^{u^i} \otimes f^{u^j}) - b_{ij} \cdot (\Gamma_{lk}^i f^{u^l}) \otimes f^{u^j} - b_{ij} \cdot f^{u^i} \otimes (\Gamma_{lk}^j f^{u^l}) = \\ &= \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - b_{lj} \Gamma_{ik}^l - b_{il} \Gamma_{jk}^l \right) (f^{u^i} \otimes f^{u^j}). \end{aligned}$$

Следовательно, компоненты тензора $\nabla_{f_{u^k}} B$ имеют вид

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - b_{lj} \Gamma_{ik}^l - b_{il} \Gamma_{jk}^l.$$



Наблюдение 46.4. Ковариантная производная любого тензора является свойством внутренней геометрии поверхности.

Упражнение 46.5. Докажите, что первая фундаментальная форма \mathbf{I}_u поверхности f *ковариантно постоянна* (метрический тензор $g_{ij}(u)$ *ковариантно постоянный*), т. е. для любого касательного вектора $X(u) \in T_u f$ выполнено:

$$\nabla_X \mathbf{I}_u \equiv 0.$$

К результату приведенного упражнения можно отнести довольно философски — перемещаясь внутри пространства невозможно заметить изменение метрики этого пространства. Физики делают из этого факта далеко идущие выводы.

Упражнение 46.6 (для усидчивых). Пусть R_{ijk}^m — тензор кривизны Леви-Чивита. Докажите, что

$$\nabla_{f_{u^l}} R_{ijk}^m + \nabla_{f_{u^j}} R_{ikl}^m + \nabla_{f_{u^k}} R_{ilj}^m \equiv 0.$$

Это так называемое *тождество Бианки* (Л. Бианки обнаружил его в 1902 г.).

Задачи и упражнения



1. Найдите ковариантную производную касательного векторного поля $X = {}^t(u + v, uv) = (u + v)f_u + (uv)f_v$ вдоль цилиндра

$$f(u, v) = {}^t(u, u^2, v)$$

в точке $p(1, 2)$ в направлении касательного вектора к кривой $2u - v = 0$.

2. Векторы стандартного базиса касательного пространства параллельно переносятся вдоль прямоугольного сферического треугольника, сторонами которого являются дуги больших окружностей сферы

$$f(u, v) = {}^t(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u).$$

Исходной и конечной точкой обноса служит одна из вершин данного треугольника. Найдите координаты результата параллельного перенесения базисных векторов в исходном базисе.

3. Докажите, что при параллельном перенесении векторов вдоль гладкой кривой на поверхности, длины векторов и углы между ними сохраняются.

4. Докажите, что угол поворота касательного вектора поверхности $f : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ при параллельном обнесении его вдоль границы односвязной области $f(D)$, где $D \subset U$, равен *интегральной кривизне* этой области, т. е.

$$\Delta\varphi = \iint_D K du dv.$$

5. Найдите ковариантные производные второй фундаментальной формы и основного оператора геликоида

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av)$$

в точке $p(1, 1)$ в направлении касательной к линии $u - v = 0$.

Вот и все. Последний пункт наших лекций подошел к концу и вы, я надеюсь, получили из этой книжки некоторое первоначальное представление о дифференциальной геометрии. Искренне надеюсь, что читательского интереса и полученных здесь сведений будет достаточно, чтобы приступить к постижению более серьезной литературы, ведь геометрия — это необъятная и ужасно интересная наука, пронизывающая самые фундаментальные разделы современного естествознания. От души желаю вам успехов в постижении устройства окружающего мира. Кристальной ясности во всех изучаемых вопросах!

Литература, в которую заглядывал автор при написании этой книжки

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
2. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1990.
3. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.
4. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. — М.: Наука, 1966.
5. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1990.
6. *Проскураков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1974.
7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979.
9. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 3. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.
10. *Аминов Ю. А.* Дифференциальная геометрия и топология кривых. — М.: Наука, 1987.
11. *Базылев В. Т.* Геометрия дифференцируемых многообразий. — М.: Высшая школа, 1989.
12. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. — М.: Высшая школа, 1980.
13. *Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф.* Дифференциалы помогают геометрии. — М.: Просвещение, 1982.
14. *Корниенко С. В.* Ремонт японских автомобилей (заметки автослесаря). — ООО Изд-во АСТ, 1999.