МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Уральский федеральный университет им. первого Президента России
Б. Н. Ельцина

На правах рукописи
УДК 512.532.2+512.572

ШАПРЫНСКИЙ Вячеслав Юрьевич

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ
РЕШЕТОК МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент Б. М. Верников

Екатеринбург
2015

Содержание

Введение

1. Обсуждение проблематики и обзор результатов, предшествующих диссертации

Решетки многообразий составляют один из основных классов структур, изучаемых в универсальной алгебре. Значение этих решеток можно объяснить тем обстоятельством, что та или иная алгебраическая теория (например, теория групп, теория колец или теория решеток), как правило, изучает некоторое конкретное многообразие, а многие области этой теории (теория абелевых групп, ассоциативных или лиевых колец, дистрибутивных или модулярных решеток) изучают его подмногообразия. При этом более общие области связаны с бóльшими многообразиями, а более частные — с меньшими. Таким образом, логическая структура теории, изучающей целый класс алгебр, оказывается схематически отражена в строении одной конкретной алгебры — решетки подмногообразий соответствующего многообразия.

Применительно к полугруппам решеточная теория многообразий начала систематически развиваться в середине 1960-х годов. К настоящему времени изучению решетки многообразий полугрупп посвящено около 250 работ. Результаты, полученные на начальном этапе развития этой теории, приведены в обзорах [23] и [1]. Обзор более поздних исследований по многообразиям полугрупп дается в цикле статей [19], [20], [18], третья из которых посвящена теоретико-решеточному направлению и отражает его современное состояние.

Поскольку диссертация посвящена многообразиям полугрупп, во всем тексте слова “тождество” и “многообразие” будут означать “полугрупповое тождество” и “полугрупповое многообразие”, если только в явном виде не оговорено противное. Прилагательное, обозначающее свойство полугрупп, относят и к многообразию, все полугруппы которого обладают данным свойством (например, “коммутативное многообразие”, “периодическое многообразие”). Решетку всех многообразий полугрупп будем обозначать через **SEM**.

Заметное место в изучении решетки **SEM** занимает рассмотрение решеточных тождеств, в частности модулярности и дистрибутивности, в различных ее частях. В первую очередь речь идет о решетках подмногообразий многообразий полугрупп. Еще на самом раннем этапе исследования решетки многообразий полугрупп, в 1969 году, в работах Ежека [27] и Швабауэра [36] были приведены первые явные примеры многообразий с немодулярной решеткой подмногообразий. При этом пример Швабауэра состоит из коммутативных полугрупп, что доказывает немодулярность уже решетки коммутативных многообразий. В 1971 г. в обзоре Эванса [23] была в явном виде поставлена задача описания многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Для ее решения потребовалось около 20 лет и усилия целого ряда авторов. Окончательно она была решена М. В. Волковым в начале 1990-х годов. О сложности и объеме доказательства этого результата говорит хотя бы тот факт, что для его полного обнародования потребовалось опубликовать семь статей [3, 7–11, 53]. Параллельно в работах [8–10], а также в [49,50] получена существенная информация о многообразиях полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, близкая к их описанию по модулю групп, а в [3,7,11] найден ряд обобщений, в частности, доказана эквивалентность модулярности и дезарговости в решетках подмногообразий многообразий полугрупп. К обсуждаемому направлению принадлежит и целый ряд других работ, систематический обзор которых можно найти в § 11 статьи [18].

После исследования тождеств модулярности и дистрибутивности в решетках подмногообразий следующим шагом стало изучение специальных элементов решетки **SEM**, связанных с этими тождествами.

В теории решеток изучается целый ряд типов специальных элементов, но основное внимание при этом уделяется элементам следующих восьми типов. Элемент x решетки L называется

дистрибутивным, если $\forall y, z \in L \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

кодистрибутивным, если $\forall y, z \in L \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

стандартным, если $\forall y, z \in L \quad y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z)$,

костандартным, если $\forall y, z \in L \quad y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$,

нейтральным, если $\forall y, z \in L \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$,

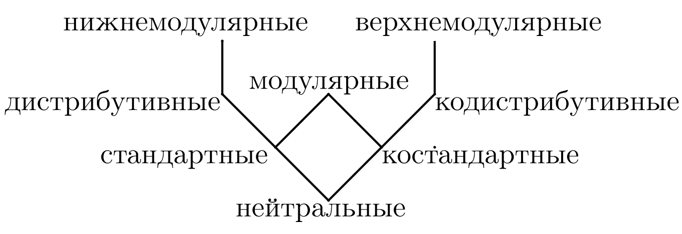
модулярным, если $\forall y, z \in L \quad y \le z \to (y \vee x) \wedge z = y \vee (x \wedge z)$,

нижнемодулярным, если $\forall y, z \in L \quad x \le y \to (x \vee z) \wedge y = x \vee (z \wedge y)$,

верхнемодулярным, если $\forall y, z \in L \quad y \le x \to (y \vee z) \wedge x = y \vee (z \wedge x)$.

Нейтральный элемент можно также определить как элемент, который вместе с любыми двумя элементами порождает дистрибутивную подрешетку (см. [13], теорема III.2.4). Первые пять из этих типов будем называть *дистрибутивными типами*, остальные три — *модулярными*[1].

Относительно включения соответствующих классов элементов перечисленные типы образуют частично упорядоченное множество, изображенное на следующем рисунке.



Тот факт, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен, хорошо известен и легко проверяется (см., например, [13], теорема III.2.3), а

[1] Применительно к элементам модулярных типов пока еще нет устоявшейся терминологии. Так, в [37] модулярные и верхнемодулярные элементы называются, соответственно, левомодулярными и правомодулярными. Мы будем пользоваться терминологией, сложившейся в работах по решеткам многообразий полугрупп.

остальные включения, указанные на рисунке, очевидны.

Отметим, что в ряде случаев знание того, как устроены специальные элементы какого-либо из перечисленных типов, дает существенную информацию о строении всей решетки в целом. Так, дистрибутивные и кодистрибутивные элементы связаны с гомоморфными образами решетки, а нейтральные — с ее подпрямыми разложениями (см. леммы 1.2 и 1.3 ниже). Элементам дистрибутивных типов в абстрактных решетках посвящен § III.2 монографии [13].

Прилагательное, обозначающее тип специального элемента решетки, договоримся относить и к многообразию, являющемуся элементом решетки **SEM** этого типа. Например, будем говорить «дистрибутивное многообразие» вместо «дистрибутивный элемент решетки **SEM**».

Первые результаты о специальных элементах решетки многообразий полугрупп были получены в работах [6, 29], в которых они носили вспомогательный характер. В первой из них найдено некоторое достаточное условие модулярности и нижней модулярности многообразия полугрупп. Первый из этих результатов был переоткрыт во второй работе, в которой, кроме того, получено сильное необходимое условие модулярности многообразия. Ниже результаты работ [6, 29] будут охарактеризованы более подробно. Систематическое изучение специальных элементов в решетке **SEM** было начато работой [52] и продолжено в работах [4,5,40–43,48]. В этих работах рассматривались шесть из восьми введенных выше типов специальных элементов в **SEM**, а именно, элементы всех типов, кроме дистрибутивных и стандартных. Нейтральные и костандартные многообразия были полностью описаны в [52] и [5] соответственно. В [41] было усилено упомянутое выше необходимое условие модулярности многообразия из [29] и найдено описание коммутативных модулярных многообразий. Наконец, для нижнемодулярных многообразий в [40,42], верхнемодулярных многообразий в [4,43,48] и кодистрибутивных многообразий в [5] были найдены сильные необходимые условия и описание многообразий указанных типов в обширных частных случаях, в том числе в коммутативном случае. Отметим, что результаты [6, 29, 41] в идейном плане восходят к более ранней работе [28], посвященной модулярным элементам решетки всех многообразий универсальных алгебр заданной сигнатуры. Результатам о специальных элементах решетки **SEM**, полученным до 2009-го года, посвящен § 14 обзора [18]. Современное состояние данной области отражено в обзоре [44].

2. Постановки задач

Диссертация посвящена систематическому изучению специальных элементов различных типов в решетке всех многообразий полугрупп и некоторых ее важных подрешетках.

Прежде всего отметим следующий факт. Из результатов работы [29] вытекает, что всякое *собственное* (т. е. отличное от многообразия всех полугрупп) модулярное многообразие периодично. Аналогичное заключение верно для нижнемодулярных и верхнемодулярных многообразий [40, 43]. А в силу отмеченных выше взаимосвязей между элементами разных типов периодическими будут и многообразия всех остальных рассматриваемых нами типов. Возникает естественный вопрос: случайно ли это совпадение? Чтобы сформулировать этот вопрос более точно, нам понадобится ввести одно новое понятие, принадлежащее автору диссертации. Прежде чем давать соответствующее определение, заметим, что все рассматриваемые нами типы специальных элементов вводятся по одной и той же схеме. Рассмотрим два основных свойства решеток — дистрибутивность и модулярность. Свойство дистрибутивности, как известно, может быть задано любым из следующих трех эквивалентных друг другу тождеств:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

Модулярность определяется квазитождеством

$$y \leq z \to (y \vee x) \wedge z = y \vee (x \wedge z).$$

Если в одной из этих четырех формул объявить некоторую переменную свободной, а остальные переменные — связанными квантором всеобщности, то будет получено условие на элемент решетки. Легко видеть, что таким образом можно записать восемь неэквивалентных условий, которые и определяют перечисленные выше типы специальных элементов. Такой единообразный способ задания типов элементов позволяет ввести следующее определение, формализующее понятие «специального элемента произвольного типа».

Пусть $p(x_0, x_1, \ldots, x_n) = q(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — решеточное тождество от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Обозначим это тождество через I. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in L \quad p(x, x_1, \ldots, x_n) = q(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что одно и то же решеточное тождество, в котором переменные упорядочены двумя различными способами, рассматривается здесь как два различных тождества. Элемент назовем *id-элементом*, если он является I-элементом для некоторого нетривиального тождества I. Многообразия, являющиеся I-элементами и id-элементами решетки **SEM**, будем называть, соответственно, *I-многообразиями* и *id-многообразиями*. Все восемь рассматриваемых нами типов специальных элементов являются I-элементами для подходящих I. Для элементов дистрибутивных типов это очевидно, а для элементов модулярных типов следует из возможности переписать модулярный решеточный закон в виде тождества. Кроме того, несложно понять, что любой элемент решетки с тем свойством, что порожденный им главный идеал удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству, является I-элементом для подходящего I (см. лемму 1.1 ниже). Применительно к решетке **SEM** это означает, что если решетка подмногообразий многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, то $\mathcal{V}$ является id-многообразием. Таким образом, изучение id-многообразий объединяет два обсуждавшихся выше направления: исследование тождеств в решетках многообразий полугрупп и специальных элементов восьми упомянутых типов в решетке **SEM**. При этом периодическими являются не только специальные элементы этих восьми типов в решетке **SEM**, но и многообразия с нетривиальными тождествами в решетках подмногообразий (последнее непосредственно вытекает из сопоставления результатов работ [22] и [34] и леммы 1.17 ниже).

В силу вышесказанного естественно поставить следующую задачу.

Задача 1. *Выяснить, будет ли всякое собственное id-многообразие полугрупп периодическим.*

Перейдем к задачам, относящимся к тем или иным конкретным типам специальных элементов. В работах [40, 42] было получено некоторое необходимое условие нижней модулярности и описаны нижнемодулярные многообразия в ряде обширных частных случаев. Все найденные при этом собственные нижнемодулярные многообразия либо являются 0-*приведенными* (т. е. задаются только 0-приведенными тождествами, определение последних будет приведено в § 1), либо имеют вид $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие, $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток. Ранее в работе [6] было доказано, что все многообразия указанного вида нижнемодулярны и модулярны. Возникает следующая задача.

Задача 2. *Выяснить, верно ли, что всякое собственное нижнемодулярное многообразие полугрупп либо является* 0*-приведенным, либо имеет вид* $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{N}$ *—* 0*-приведенное многообразие. В частности, верно ли, что всякое нижнемодулярное многообразие модулярно?*

Из вышесказанного вытекает, что положительный ответ на первый из вопросов, сформулированных в задаче 2, означал бы полное описание нижнемодулярных многообразий.

В силу упоминавшихся выше взаимосвязей между элементами различных типов, всякое дистрибутивное многообразие нижнемодулярно, а всякое стандартное многообразие дистрибутивно. Поэтому продвижения, достигнутые при изучении нижнемодулярных многообразий в [40, 42] предоставляют нам необходимое условие дистрибутивности и стандартности многообразия. Естественно попытаться завершить описание элементов этих двух типов.

Задача 3. *Описать дистрибутивные многообразия полугрупп.*

Задача 4. *Описать стандартные многообразия полугрупп.*

Решетка **SEM** содержит ряд обширных и важных подрешеток, представляющих самостоятельный интерес. Обзор работ, посвященных изучению этих подрешеток, приведен в главе 2 статьи [18]. В диссертации изучаются специальные элементы в двух таких подрешетках. Первой из них является решетка всех коммутативных многообразий, которую мы будем обозначать через **Com**. Вторая решетка состоит из всех многообразий, содержащих многообразие всех коммутативных полугрупп. Такие многообразия называются *надкоммутативными*, а образуемая ими решетка будет обозначаться через **OC**.

Перейдем к обсуждению решетки **Com**. Некоторая характеризация этой решетки предложена в работе Киселевича [31] (мы не останавливаемся на этой работе более подробно, поскольку в диссертации ее результаты не используются). Как уже отмечалось, еще в работе Швабауэра [36] была доказана немодулярность решетки **Com**. Из результата работы [22] вытекает, что эта решетка не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Многообразия коммутативных полугрупп, решетка подмногообразий которых дистрибутивна или модулярна, описаны в статьях [49] и [46] соответственно. Все это делает естественным изучение специальных элементов в решетке **Com**.

Отметим, что до наших исследований никаких результатов на эту тему известно не было. Лишь совсем недавно появилась работа Б. М. Верникова [45], в которой получено полное описание верхнемодулярных, кодистрибутивных и костандартных элементов в решетке **Com** (отметим, что в доказательствах этих результатов используются формулируемые ниже теоремы 4 и 7 диссертации). В частности, в этой работе показано, что верхняя модулярность и кодистрибутивность элемента в решетке **Com** эквивалентны, а костандартность и нейтральность — не эквивалентны. Это резко контрастирует с ситуацией в решетке **SEM**, где, напротив, костандартность эквивалентна нейтральности [5], а верхняя модулярность и кодистрибутивность не эквивалентны (это вытекает из сопоставления результатов работ [5] и [43]).

По аналогии со сформулированными выше возникают следующие задачи.

Задача 5. *Описать нижнемодулярные элементы решетки* **Com**.

Задача 6. *Описать дистрибутивные элементы решетки* **Com**.

Задача 7. *Описать стандартные элементы решетки* **Com**.

Как было отмечено выше, нейтральные многообразия описаны в [52]. Именно, собственными нейтральными многообразиями являются тривиальное многообразие и многообразия $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где $\mathcal{ZM}$ — многообразие всех полугрупп с нулевым умножением (см. предложение 1.1 ниже). Аналогичную задачу мы рассмотрим и для решетки **Com**.

Задача 8. *Описать нейтральные элементы решетки* **Com**.

Результаты о модулярных элементах решетки **SEM**, полученные в [6, 29, 41], естественно попытаться перенести (с теми или иными изменениями) на решетку **Com**. Охарактеризуем эти результаты подробнее.

В [29] показано, что всякое собственное модулярное многообразие либо является нильмногообразием, либо имеет вид $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. При этом многообразие $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ модулярно тогда и только тогда, когда модулярно многообразие $\mathcal{N}$ (это несложно проверяемое утверждение, впервые в явном виде отмеченное в [48], в действительности является частным случаем некоторого доказанного нами более общего факта — см. следствие 1.1 ниже). Перечисленные результаты полностью сводят задачу описания модулярных многообразий к случаю нильмногообразий. В работе [41] показано, что всякое модулярное нильмногообразие может быть задано только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами (определения этих двух типов тождеств см. ниже в § 1). С другой стороны, в [6] и [29] независимо было получено уже упомянутое достаточное условие модулярности нильмногообразия, состоящее в том, что всякое 0-приведенное многообразие модулярно.

Задача 9. *Выяснить, верны ли аналоги упомянутых результатов работ* [6, 29, 41] *для решетки* **Com**.

Как и решетка **Com**, решетка **OC** устроена довольно сложно. В работе [51] М. В. Волковым было получено описание этой решетки в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального вида, так называемых G-множеств (определение G-множеств будет приведено в § 5; некоторую информацию о конгруэнциях на них можно найти в [32]). Из этого результата вытекает, в частности, что решетка **OC** не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству (и даже квазитождеству). Договоримся обозначать решетку надкоммутативных подмногообразий надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ через $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$. В работах Б. М. Верникова [38, 39] получен ряд результатов о тождествах и квазитождествах в решетках вида $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$. В частности, в этих работах полностью описаны многообразия $\mathcal{V}$, для которых решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ модулярна или дистрибутивна. Решение следующих двух задач продолжает исследование тождеств и квазитождеств в решетках $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$.

Задача 10. *Описать надкоммутативные многообразия $\mathcal{V}$, для которых решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Задача 11. *Описать надкоммутативные многообразия $\mathcal{V}$, для которых решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет нетривиальному квазитождеству.*

В силу сказанного выше об id-элементах в абстрактных решетках, все многообразия, исследуемые в задачах 10 и 11, являются id-элементами решетки **OC**. Таким образом, рассмотрение этих задач вполне естественно в рамках данной диссертации. Задачи 10 и 11 являются "надкоммутативными" аналогами задач описания многообразий с нетривиальными [квази]тождествами в решетках подмногообразий. Последние весьма трудны и, по видимому, еще далеки от своего окончательного решения. С одной стороны, упомянутое выше описание многообразий с модулярной решеткой подмногообразий можно рассматривать как достаточное условие выполнимости нетривиального тождества в решетке подмногообразий. С другой стороны, достаточным условием для того, чтобы решетка подмногообразий не удовлетворяла никакому нетривиальному квазитождеству, является так называемое свойство решеточной универсальности, а также более слабое свойство конечной универсальности. Именно, многообразие называется *решеточно универсальным* [*конечно универсальным*], если в решетку его подмногообразий вложима решетка, двойственная решетке разбиений счетного [любого конечного] множества. Многообразия с этими свойствами рассматривались в целом ряде работ. Обзор соответствующих результатов можно найти в § 12 статьи [18]. Этой тематике посвящены также более поздние статья [14] и диссертация [15].

Изучение специальных элементов решетки **OC** было начато в работе Б. М. Верникова [2]. В ней рассматривались дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные и нейтральные элементы решетки **OC**. Было доказано, что свойства быть элементами всех этих пяти типов эквивалентны, и предложено некоторое описание многообразий, обладающих этими свойствами. Однако, как было замечено автором диссертации, это описание неверно (хотя результат об эквивалентности пяти указанных условий доказан в [2] верно). В силу сказанного, естественно сформулировать следующую задачу.

Задача 12. *Описать элементы всех дистрибутивных типов в решетке* **OC**.

3. Обсуждение результатов диссертации

В диссертации полностью решены задачи 1–12. Опишем полученные результаты более подробно. В диссертации показано, что всякое собственное id-многообразие периодично. Далее, получено полное описание нижнемодулярных, дистрибутивных и стандартных многообразий. При этом показано, что всякое нижнемодулярное многообразие модулярно, а дистрибутивность многообразия эквивалентна его стандартности (интересно сравнить последний факт с результатом Б. М. Верникова [5] о том, что костандартность многообразия эквивалентна его нейтральности). Полностью описаны также нижнемодулярные, дистрибутивные, стандартные и нейтральные элементы решетки **Com**. При этом установлено, что в решетке **Com**, как и в **SEM**, нижняя модулярность влечет модулярность, а дистрибутивность эквивалентна стандартности. Для модулярных элементов решетки **Com** найдены сильное необходимое условие и близкое к нему достаточное условие, аналогичные упоминавшимся выше результатам о модулярных многообразиях полугрупп, полученным в [6, 29, 41]. Доказано, что для любого надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ выполнимость в решетке $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ нетривиального тождества равносильна выполнимости в ней нетривиального квазитождества и описаны многообразия $\mathcal{V}$ с этими двумя свойствами. Наконец, полностью описаны дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные и нейтральные элементы решетки **OC** (как уже отмечалось выше, эквивалентность свойств быть элементом любого из этих пяти типов доказана ранее Б. М. Верниковым в [2]).

Отметим следующую особенность перечисленных результатов. Между формулировками целого ряда результатов о специальных элементах решеток **SEM** и **Com** обнаруживается весьма неожиданная аналогия, которую вряд ли можно было предвидеть из каких-либо априорных соображений. В диссертации показано, что эта аналогия не случайна. А именно, оказывается, что эти результаты можно получить параллельно, как следствие из некоторых более общих результатов о специальных элементах в решетках подмногообразий надкоммутативных многообразий. Развитая при этом техника позволяет параллельно передоказать более простым способом некоторые из полученных ранее результатов, в частности, необходимое условие модулярности многообразия полугрупп, полученное в работе [29].

4. Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на Международных молодежных школах-конференциях по математике, проводимых Институтом математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, 2010–2012), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009), Международных конференциях по алгебре (Санкт-Петербург, 2010, Красноярск, 2010, Екатеринбург, 2011 и 2012, Казань, 2011 и 2014), Международных конференциях по решеткам и универсальной алгебре (Прага, 2010) и по полугруппам и общей алгебре (Потсдам, 2011). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2009–2014). Работа автора по теме диссертации была представлена на XIII Свердловском областном конкурсе студенческих научных работ «Научный олимп» (2010), где получила первую премию по направлению «Естественные науки».

По теме диссертации опубликовано 16 работ [54–69]. Из них 7 работ опубликованы в журналах из списка ВАК [54–60]. Работы [54, 59–63, 69] написаны совместно с Б. М. Верниковым. Часть доказательств результатов работ [54, 59, 61–63], принадлежащая Б. М. Верникову, перекрывается результатами автора, опубликованными позднее в [57][2]. Таким образом, приводимые в диссертации доказательства результатов этих работ целиком принадлежат автору. Что касается работ [60, 69], то в них Б. М. Верникову принадлежит постановка задачи, указание общей схемы доказательства и усовершенствование некоторых деталей изложения, а доказательства найдены автором.

5. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти параграфов и списка литературы. В § 1 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. В § 2 доказываются результаты, которые не входят в число основных результатов диссертации, но представляют определенный самостоятельный интерес. Они указывают некоторые свойства периодических многообразий, являющихся модулярными и нижнемодулярными элементами в решетках подмногообразий надкоммутативных многообразий и в решетке перестановочных многообразий полугрупп. Именно эти

[2]Это не относится к теоремам 3–5 работы [63], которые принадлежат Б. М. Верникову, опубликованы с доказательством в [5] и не входят в диссертацию.

результаты позволят нам в § 3 и 4 единообразно и ценой минимальных дополнительных усилий доказать целый ряд утверждений о модулярных и нижнемодулярных элементах в решетках **SEM** и **Com**. Наконец, § 3 посвящен задачам 1–4, § 4 — задачам 5–9, а § 5 — задачам 10–12.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Абстрактные решетки

Через $(a]_L$ [соответственно $[a)_L$] будем обозначать главный идеал [соответственно, главный фильтр] решетки L. Когда это не будет вызывать двусмысленности, вместо $(a]_L$ и $[a)_L$ будем писать соответственно $(a]$ и $[a)$. Следующая лемма объясняет указанную во введении связь между специальными элементами и тождествами в решетках.

Лемма 1.1. *Если идеал $(a]_L$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, то элемент a является id-элементом решетки L.*

Доказательство. Если $(a]_L$ удовлетворяет нетривиальному тождеству

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n),$$

то a является I-элементом, где I есть тождество

$$p(x_1 \wedge x_0, \ldots, x_n \wedge x_0) = q(x_1 \wedge x_0, \ldots, x_n \wedge x_0).$$

Действительно, если значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ независимо друг от друга пробегают всю решетку L, то значения выражений $x_1 \wedge a, \ldots, x_n \wedge a$ независимо друг от друга пробегают идеал $(a]$. $\square$

Значение специальных элементов дистрибутивных типов для структурной теории решеток характеризуется следующими двумя леммами.

Лемма 1.2 ([13], теорема III.2.4)**.** *Элемент a решетки L нейтрален тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto (x \wedge a, x \vee a)$ $(x \in L)$ определяет разложение решетки L в подпрямое произведение решеток $(a]$ и $[a)$.* $\square$

Лемма 1.3 ([13], теорема III.2.2)**.** *Элемент a решетки L дистрибутивен тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto x \vee a$ $(x \in L)$ является гомоморфизмом этой решетки на решетку $[a)$.* $\square$

Упомянутыми во введении соотношениями между типами специальных элементов мы будем пользоваться без явных ссылок. Эти соотношения дополняются еще двумя леммами. Следующая лемма справедлива в силу леммы II.1.1 работы [24] и двойственного утверждения.

Лемма 1.4. *Элемент решетки [ко]стандартен тогда и только тогда, когда он [ко]дистрибутивен и модулярен.* $\square$

Лемма 1.5. *Для любого элемента x произвольной решетки следующие условия эквивалентны:*

(а) *элемент x нейтрален;*

(б) *элемент x дистрибутивен и костандартен;*

(в) *элемент x кодистрибутивен и стандартен;*

(г) *элемент x дистрибутивен, кодистрибутивен и модулярен.*

Доказательство. Эквивалентность условий (а), (б) и (в) доказана в [13], теорема III.2.5. Эквиваленость условий (в) и (г) непосредственно вытекает из леммы 1.4. □

Как уже было отмечено во введении, при изучении специальных элементов решеток **SEM** и **Com** особую роль играет многообразие $\mathcal{SL}$. Это связано с тем, что многообразие $\mathcal{SL}$ является атомом и нейтральным элементом обеих решеток (первый факт общеизвестен, а второй вытекает из предложения 1.1 ниже). Следствия данного факта для теории специальных элементов описываются следующими двумя леммами.

Лемма 1.6. *Пусть a — атом и нейтральный элемент решетки L и пусть $s(x_0, x_1, \dots, x_n) = t(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — решеточное тождество, выполненное в двухэлементной решетке. Для любых элементов $x_0, x_1, \dots, x_n \in L$ равенство*

$$s(x_0, x_1, \dots, x_n) = t(x_0, x_1, \dots, x_n) \tag{1}$$

эквивалентно равенству $s(x_0 \vee a, \dots, x_n \vee a) = t(x_0 \vee a, \dots, x_n \vee a)$.

Доказательство. Из леммы 1.2 следует, что равенство (1) эквивалентно системе равенств

$$s(x_0 \wedge a, x_1 \wedge a, \dots, x_n \wedge a) = t(x_0 \wedge a, x_1 \wedge a, \dots, x_n \wedge a),$$
$$s(x_0 \vee a, x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a) = t(x_0 \vee a, x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a).$$

Остается заметить, что первое из равенств этой системы выполняется тождественно. Действительно, так как a — атом, идеал $(a]$ является двухэлементной цепью и потому удовлетворяет тождеству $s = t$. □

Лемма 1.7. *Пусть a — атом и нейтральный элемент решетки L, и пусть $s = t$ — решеточное тождество от $n+1$ переменных, выполненное в двухэлементной решетке, обозначаемое через I. Для любого элемента $x \in L$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *x является I-элементом решетки L;*

(б) *$x \vee a$ является I-элементом решетки L;*

(в) *$x \vee a$ является I-элементом коидеала $[a)$;*

(г) *равенство $s(x, x_1, \dots, x_n) = t(x, x_1, \dots, x_n)$ выполняется для любых $x_1, \dots, x_n \in [a)$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (а) и (в) непосредственно вытекает из леммы 1.6, поскольку если значения переменных $x_1, \dots, x_n$ пробегают все множество L, то $x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a$ пробегают множество $[a)$. Применив эту же лемму для набора значений переменных $x \vee a, x_1, \dots, x_n$, заключаем, что условие (б) также эквивалентно (в). Наконец, снова применив лемму 1.6 для набора значений переменных $x, x_1, \dots, x_n$, таких, что $x_1, \dots, x_n \in [a)$, заключаем, что (в) эквивалентно (г). □

1.2. Решетки разбиений

Решетку разбиений множества X будем обозначать через $\mathrm{Part}(X)$. Класс разбиения α, содержащий элемент x, обозначим через x^α. Следующая лемма описывает главные идеалы и главные фильтры решеток $\mathrm{Part}(X)$.

Лемма 1.8 ([13], лемма IV.4.1)**.** 1) *Пусть α — разбиение множества X на два класса: A и B. Отображение из $(\alpha]_{\mathrm{Part}(X)}$ в $\mathrm{Part}(A) \times \mathrm{Part}(B)$, определенное по правилу*

$$\beta \mapsto (\beta|_A, \beta|_B) \ (\beta \in (\alpha]_{\mathrm{Part}(X)}),$$

является изоморфизмом решеток.

2) *Пусть α — произвольное разбиение множества X. Отображение из $\mathrm{Part}(X/\alpha)$ в $[\alpha)_{\mathrm{Part}(X)}$, определенное по правилу*

$$\beta \mapsto \{(x, y) \in X \times X \mid (x^\alpha, y^\alpha) \in \beta\} \ (\beta \in \mathrm{Part}(X/\alpha)),$$

является изоморфизмом решеток. □

Следующая лемма будет необходима при решении задачи 1.

Лемма 1.9. *Пусть X и Y — два множества, $|Y| = n < \infty$, и пусть разбиение $\alpha \in \mathrm{Part}(X)$ содержит не менее n классов мощности не менее n. Тогда для любого $\beta \in \mathrm{Part}(Y)$ найдется вложение $\varphi\colon \mathrm{Part}(Y) \longrightarrow \mathrm{Part}(X)$, такое, что $\varphi(\beta) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $Y/\beta = \{B_1, \ldots, B_m\}$, и пусть $n_i = |B_i|$ для $1 \leq i \leq m$. Это, в частности, означает, что $m \leq n$ и $n_i \leq n$. Далее, пусть $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in_i}\}$ для каждого i. Выберем любые m различных α-классов $A_1, \ldots, A_m$ мощности не менее n. Каждое множество A_i произвольным образом разобьем на n_i непустых подмножеств $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in_i}$, получив некоторое новое разбиение $\gamma \leq \alpha$. Обозначим через δ разбиение, получаемое из α объединением всех классов A_i в один класс A. Отметим, что для любого $\rho \in [\gamma, \delta]$ выполняется равенство $\rho|_{X \setminus A} = \alpha|_{X \setminus A}$. Поэтому из п. 1) леммы 1.8 следует, что отображение $\rho \mapsto \rho|_A$ является изоморфизмом интервала $[\gamma, \delta]$ решетки $\mathrm{Part}(X)$ на коидеал $[\gamma')$ решетки $\mathrm{Part}(A)$, где $\gamma' = \gamma|_A$. Отметим, что γ'-классами являются в точности множества A_{ij}. Обратный изоморфизм объединяет каждое отношение эквивалентности $\rho \in [\gamma')_{\mathrm{Part}(A)}$ с отношением $\alpha|_{X \setminus A}$. Согласно п. 2) леммы 1.8 имеется изоморфизм $\mathrm{Part}(A/\gamma') \cong [\gamma')_{\mathrm{Part}(A)}$. Далее, двойная нумерация элементов множества Y и γ'-классов определяет биекцию между Y и A/γ'. Эта биекция естественным образом определяет изоморфизм $\mathrm{Part}(Y) \cong \mathrm{Part}(A/\gamma')$. Таким образом, $\mathrm{Part}(Y) \cong \mathrm{Part}(A/\gamma') \cong [\gamma')_{\mathrm{Part}(A)} \cong [\gamma, \delta]$. Легко видеть, что композиция этих трех изоморфизмов отображает β в α, то есть является искомым вложением. □

Следующая лемма дает достаточное условие модулярности и верхней модулярности элемента решетки $\mathrm{Part}(X)$.

Лемма 1.10. *Разбиение $\alpha \in \mathrm{Part}(X)$, содержащее не более одного неодноэлементного класса, является модулярным и верхнемодулярным элементом решетки $\mathrm{Part}(X)$.*

Доказательство. Модулярность доказана в [28], предложение 2.2, верхняя модулярность — в [6], следствие 3. □

1.3. Тождества полугрупп

Вначале уточним используемую терминологию и обозначения. Для записи тождеств используются *слова* — элементы свободной полугруппы над счетным алфавитом, обозначаемой через F. Символом F^1 обозначим полугруппу F с присоединенной единицей, трактуемой как пустое слово. Поскольку символ $=$ используется для записи тождеств, отношение равенства на F^1 будем обозначать через $\equiv$. Длина слова u обозначается через $\ell(u)$. Множество всех букв, входящих в слово u, называется *содержанием* этого слова и обозначается через $c(u)$. Через $\ell(u)$ обозначается длина слова u, через $\ell_x(u)$ — число вхождений буквы x в слово u. Вместо $\ell_{x_i}(u)$ будем также писать $\ell_i(u)$. Эндоморфизмы полугруппы F есть не что иное, как *подстановки* (слов вместо букв алфавита), автоморфизмы — перестановки букв в алфавите. Группа перестановок на множестве X будет обозначаться через $S(X)$. На практике в качестве множества X почти всегда будет выступать конечное подмножество алфавита. Если σ — произвольная перестановка множества $c(u)$, то через $\sigma(u)$ будет обозначаться результат соответствующего переобозначения букв в слове u. Слово u *делит* слово v, а v *содержит образ* слова u, если $v \equiv a\zeta(u)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторой подстановки ζ. Отношение делимости слов является отношением квазипорядка на F^1. Это отношение будем обозначать через $\leq$. Используя терминологию теории упорядоченных множеств (например, слова "антицепь" или "сравнимость") применительно к полугруппе F^1, мы будем подразумевать данное отношение квазипорядка. Запись $u \parallel v$ будет означать, что слова u и v несравнимы.

Будем говорить, что тождество $u = v$ *непосредственно вытекает* из тождества $s = t$, если либо $u \equiv a\zeta(s)b$ и $v \equiv a\zeta(t)b$, либо $u \equiv a\zeta(t)b$ и $v \equiv a\zeta(s)b$, для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторой подстановки ζ. Тождество $u = v$ *непосредственно вытекает* из системы тождеств Σ, если оно непосредственно вытекает из некоторого тождества этой системы. *Выводом* тождества $u = v$ из системы Σ называется последовательность тождеств $w_0 = w_1 = \cdots = w_k$, каждое из которых непосредственно вытекает из системы Σ, причем $w_0 \equiv u$ и $w_k \equiv v$. Число k (т. е. число тождеств в последовательности) называется *длиной вывода.* Удобно считать, что тривиальное тождество $u = u$ обладает выводом длины 0. *Выводом* тождества $u = v$ *из тождества* $s = t$ называется его вывод из системы $\{s = t\}$. Тождество $u = v$ является следствием системы Σ тогда и только тогда, когда у него существует вывод из этой системы. Этот базовый факт будет в дальнейшем использоваться без явного упонинания. В частности, пересечение многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ тогда и только тогда, когда существует его вывод из системы Σ, где Σ состоит из всех тождеств, выполненных хотя бы в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. В этом случае каждое тождество соответствующего вывода само выполняется в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

Символическое тождество $w = 0$ является сокращением для системы тождеств $wx = xw = w$, где буква x не входит в слово w. Данное обозначение объясняется тем, что любая полугруппа, удовлетворяющая этим двум тождествам, является полугруппой с нулем и слово w тождественно равно нулю в этой полугруппе. Тождества вида $w = 0$, равно как и многообразия, ими задаваемые, называются 0-*приведенными*. Тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в обе его части одинаковое число раз. Тождество $u = v$ называется *подстановочным*, если $c(u) = c(v)$ и слово u получается из v переобозначением букв.

Буква называется *простой в слове* u, если она входит в это слово ровно один раз, и называется *кратной в слове* u, если она входит в u больше одного раза. Слово называется *линейным*, если все его буквы — простые. Нетривиальное тождество называется *перестановочным*, если обе его части — линейные слова от одних и тех же букв. Ясно, что правая часть такого тождества получается из левой некоторой перестановкой букв. Группу перестановок чисел $1, \ldots, m$ (т. е. группу $S(\{1, \ldots, m\})$) обозначим через S_m. Образ числа k под действием перестановки α будем записывать как $k\alpha$. Итак, всякое перестановочное тождество от m букв с точностью до обозначения букв имеет вид

$$x_1 x_2 \ldots x_m = x_{1\alpha} x_{2\alpha} \ldots x_{m\alpha}$$

для некоторой перестановки $\alpha \in S_m$. Последнее тождество будем обозначать через $p_m[\alpha]$.

Лемма 1.11 ([35]). *Пусть α — перестановка из S_n такая, что $1\alpha \neq 1$ и $n\alpha \neq n$. Тогда существует натуральное число $N > n$ такое, что тождество $p_n[\alpha]$ влечет любое перестановочное тождество от N букв.* □

Лемма 1.12 ([33]). *Любое перестановочное тождество влечет тождество*

$$x_1 \ldots x_k yz t_1 \ldots t_k = x_1 \ldots x_k zy t_1 \ldots t_k$$

для подходящего k. □

1.4. Многообразия полугрупп

Многообразие, заданное системой тождеств Σ, обозначается через $\operatorname{var}\Sigma$. Решетку вполне инвариантых конгруэнций полугруппы S обозначим через $FIC(S)$. Вполне инвариантная конгруэнция на F, соответствующая многообразию $\mathcal{V}$ (т. е. эквациональная теория многообразия $\mathcal{V}$, рассматриваемая как бинарное отношение на F), будет обозначаться через $\sim_{\mathcal{V}}$. Соответствие $\mathcal{V} \mapsto \sim_{\mathcal{V}}$ является антиизоморфизмом между решетками **SEM** и $FIC(F)$. Через $\mathrm{End}(S)$ мы будем обозначать полугруппу эндоморфизмов полугруппы S, через $\mathrm{Aut}(S)$ — группу ее автоморфизмов. Для произвольного многообразия $\mathcal{X}$ слова u и v назовем *$\mathcal{X}$-эквивалентными*, если $u \sim_{\mathcal{X}} v$, и *$\mathcal{X}$-идентичными*, если $u \sim_{\mathcal{X}} \sigma(v)$ для некоторой перестановки σ множества $c(v)$ (или, что то же самое, $u \sim_{\mathcal{X}} \xi(v)$ для некоторого автоморфизма $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$). Слово u назовем *$\mathcal{X}$-неустойчивым*, если тождество $u = \sigma(u)$ не выполняется в $\mathcal{X}$ ни для какой нетривиальной перестановки σ множества $c(u)$. Слова, не являющиеся $\mathcal{X}$-неустойчивыми, будем называть $\mathcal{X}$-устойчивыми. Через $F(\mathcal{X})$ будем обозначать полугруппу, свободную в многообразии $\mathcal{X}$, т. е. фактор-полугруппу $F/\sim_{\mathcal{X}}$. Для элементов полугруппы $F(\mathcal{X})$ отношение квазипорядка $\leq$ определяется так же, как и для слов: $U \leq V$ (где $U, V \in F(\mathcal{X})$), если $V = A\xi(V)B$, где $\xi \in \mathrm{End}(F(\mathcal{X}))$, $A, B \in F^1(\mathcal{X})$. Известно, что если многообразие $\mathcal{X}$ надкоммутативно, то оно удовлетворяет лишь уравновешенным тождествам (см. лемму 1.13 ниже). Следовательно, значения $\ell(u)$, $\ell_x(u)$, $c(u)$ одинаковы для всех представителей $u \in F$ фиксированного класса $U \in F(\mathcal{X})$. Эти значения будут обозначаться через $\ell(U)$, $\ell_x(U)$ и $c(U)$ соответственно. Подмногообразие многообразия $\mathcal{X}$, заданное внутри него системой 0-приведенных тождеств, назовем 0-*приведенным в* $\mathcal{X}$.

Зафиксируем обозначения для некоторых конкретных многообразий, необходимые нам в дальнейшем. Для полноты продублируем некоторые из уже введенных обозначений.

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп;

$\mathcal{T}$ — тривиальное многообразие;

$\mathcal{COM}$ — многообразие всех коммутативных полугрупп;

$\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток;

$\mathcal{ZM}$ — многообразие всех полугрупп с нулевым умножением;

$\mathcal{LZ}$ — многообразие всех полугрупп левых нулей;

$\mathcal{RZ}$ — многообразие всех полугрупп правых нулей;

$\mathcal{A}_n$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты, делящей n;

$\mathcal{P} = \mathrm{var}\{xy = x^2y, x^2y^2 = y^2x^2\}$;

$\overleftarrow{\mathcal{P}} = \mathrm{var}\{xy = xy^2, x^2y^2 = y^2x^2\}$.

Через $L(\mathcal{X})$ будет обозначаться решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{X}$. В частности, $\mathbf{Com} = L(\mathcal{COM})$. Многообразие называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству. Перестановочные многообразия образуют подрешетку решетки **SEM**, обозначаемую **Perm**. Многообразие, являющееся дистрибутивным элементом решетки $L(\mathcal{X})$ [решетки **Perm**], будем называть *дистрибутивным в* $L(\mathcal{X})$ [дистрибутивным в **Perm**] и придерживаться аналогичных соглашений относительно всех остальных типов элементов. Решетка всех периодических многообразий обозначается через **Per**.

Как уже отмечено во введении, нейтральные многообразия описываются следующим предложением.

Предложение 1.1 ([52]). *Многообразия $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$ и только они являются нейтральными элементами решетки* **SEM**. $\square$

Известно, что атомами решетки **SEM** являются в точности многообразия $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{A}_p$ для всех простых чисел p [30]. В частности, многообразие $\mathcal{SL}$ является и атомом, и нейтральным элементом решетки **SEM**, а потому из леммы 1.7 мы получаем

Следствие 1.1. *Пусть $s = t$ — решеточное тождество от $n+1$ переменных, выполненное в двухэлементной решетке, обозначаемое через I. Для любого подмногообразия $\mathcal{V}$ любого надкоммутативного многообразия $\mathcal{X}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *$\mathcal{V}$ является I-элементом решетки $L(\mathcal{X})$;*

(б) *$\mathcal{V} \vee \mathcal{SL}$ является I-элементом решетки $L(\mathcal{X})$;*

(в) *$\mathcal{V} \vee \mathcal{SL}$ является I-элементом коидеала $[\mathcal{SL})_{L(\mathcal{X})}$;*

(г) *равенство $s(\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n) = t(\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n)$ выполняется для любых $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n \in [\mathcal{SL})_{L(\mathcal{X})}$.* $\square$

Разумеется, помимо многообразия $\mathcal{SL}$, теми же свойствами обладает и многообразие $\mathcal{ZM}$, однако данный факт нам не понадобится.

Следующая лемма описывает решение проблемы равенства слов в некоторых многообразиях. Чаще всего утверждение этой леммы будет использоваться без явных ссылок.

Лемма 1.13. *Тождество $u = v$ выполняется*

1) *в многообразии $\mathcal{COM}$ тогда и только тогда, когда оно уравновешено;*

2) *в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$;*

3) *в многообразии $\mathcal{A}_n$ тогда и только тогда, когда $\ell_x(u) \equiv \ell_x(v) \pmod{n}$ для каждой буквы x;*

4) *в многообразии $\mathcal{LZ}$ тогда и только тогда, когда слова u и v начинаются с одной и той же буквы;*

5) *в многообразии $\mathcal{RZ}$ тогда и только тогда, когда слова u и v оканчиваются на одну и ту же букву;*

6) *в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и либо слова u и v оканчиваются на одну и ту же простую букву, либо каждое из них оканчивается на кратную букву;*

7) *в многообразии $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$ и либо слова u и v начинаются с одной и той же простой буквы, либо каждое из них начинается с кратной буквы.* $\square$

Доказательство. Утверждения 1)–5) очевидны, а утверждения 6) и 7) доказаны в [12], лемма 7. □

Многообразие $\mathcal{V}$ называется *многообразием ступени* m, если все нильполугруппы многообразия $\mathcal{V}$ нильпотентны ступени нильпотентности не выше m и m — наименьшее натуральное число с таким свойством. Многообразие называется *многообразием конечной ступени*, если оно является многообразием ступени m для некоторого натурального m.

Лемма 1.14 ([16], лемма 1)**.** *Многообразие, удовлетворяющее тождеству*

$$x_1 \dots x_m = w,$$

где $\ell(w) > m$, *является многообразием ступени* $\leq m$. □

Лемма 1.15 ([43], предложение 2.11)**.** *Многообразие является многообразием ступени* $\leq m$ *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству*

$$x_1 \dots x_m = x_1 \dots x_{i-1}(x_i \dots x_j)^h x_{j+1} \dots x_m$$

для некоторого $h > 1$ *и некоторых* $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \leq j$. □

Следующее утверждение вытекает из леммы 2 работы [8] и доказательства предложения 1 той же работы.

Лемма 1.16. *Если многообразие* $\mathcal{V}$ *не содержит ни одно из многообразий* $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$, $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, *то* $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, *где многообразие* $\mathcal{M}$ *порождено моноидом, а* $\mathcal{N}$ *— нильмногообразие.* □

Следующее общеизвестное утверждение объясняет роль решетки **OC** в решетке **SEM**.

Лемма 1.17. *Решетка* **SEM** *является дизъюнктным объединением идеала* **Per** *и коидеала* **OC**. □

Следующее предложение предоставляет достаточное условие для модулярных и нижнемодулярных элементов решеток $L(\mathcal{X})$.

Предложение 1.2. *Пусть* $\mathcal{X}$ *— произвольное многообразие полугрупп. Всякое* 0*-приведенное в* $\mathcal{X}$ *многообразие модулярно и нижнемодулярно в* $L(\mathcal{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в $\mathcal{X}$ многообразие а ν — отвечающая ему конгруэнция на полугруппе $F(\mathcal{X})$ (т. е. фактор-конгруэнция $\sim_{\mathcal{N}} / \sim_{\mathcal{X}}$). Конгруэнция ν имеет ровно один неодноэлементный класс (нулевой). Решетка $L(\mathcal{X})$ антиизоморфна решетке $FIC(F(\mathcal{X}))$, которая, в свою очередь, вкладывается в решетку $\mathrm{Part}(F(\mathcal{X}))$. В силу леммы 1.10, конгруэнция ν является модулярным и верхнемодулярным элементом решетки $\mathrm{Part}(F(\mathcal{X}))$, а потому и решетки $FIC(F(\mathcal{X}))$. □

1.5. Коммутативные многообразия

В данном пункте будут собаны вспомогательные утверждения о решетке **Com**, которые понадобятся в параграфе 4. В рамках данного пункта символ $\sim$ будет обозначать отношение $\sim_{\mathcal{COM}}$. Слова, находящиеся в этом отношении, будем для краткости называть *эквивалентными* (в рамках этого пункта). Также для данного пункта удобно переопределить значение символа $\leq$. Именно, запись $u \leq v$, где $u, v \in F$, будет означать, что $U \leq V$, где U и V есть образы слов u и v в полугруппе $F(\mathcal{COM})$. Иначе говоря, $u \leq v$, если существует уравновешенное тождество $u = a\xi(v)$ для некоторого $a \in F^1$ и некоторой подстановки ξ. Соответственно, терминология теории упорядоченных множеств применительно к словам будет подразумевать данное отношение квазипорядка.

Для коммутативного нильмногообразия $\mathcal{V}$ через $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ обозначим коммутативное многообразие, заданное всеми 0-приведенными тождествами, выполненными в $\mathcal{V}$. Ясно, что $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ является наименьшим 0-приведенным многообразием, содержащим $\mathcal{V}$.

Лемма 1.18. *Пусть $\mathcal{V}$ — коммутативное многообразие, удовлетворяющее тождеству $x^n = 0$. Тогда $\mathcal{V} \vee \mathcal{A}_n = \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$.*

Доказательство. Включение $\mathcal{V} \vee A_n \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$ очевидно. Докажем обратное включение. Нужно проверить, что если тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{A}_n$, то оно выполнено и в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$. Так как тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{A}_n$, то $\ell_x(u) \equiv \ell_x(v) \pmod{n}$ для любой буквы x. Если тождество $u = v$ уравновешено, то оно автоматически выполнено в многообразии $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$ ввиду коммутативности последнего. Предположим теперь, что тождество $u = v$ не является уравновешенным, т. е. $\ell_x(u) \neq \ell_x(v)$ для некоторой буквы x. Тогда хотя бы одно из чисел $\ell_x(u)$ и $\ell_x(v)$ не меньше n. Не ограничивая общности, предположим, что $\ell_x(u) \geq n$. Тогда многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, а значит, и тождеству $v = 0$, так как $u = v$ в $\mathcal{V}$. Следовательно, многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ также удовлетворяет тождествам $u = 0 = v$, и потому тождество $u = v$ выполнено в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$. □

Лемма 1.19. *Пусть u, v — произвольные слова.*

(1) *Если $u \leq v$, то $\ell(u) \leq \ell(v)$, причем если $\ell(u) = \ell(v)$, то $|c(u)| \geq |c(v)|$.*

(2) *Следующие условия эквивалентны:*

а) *$u \leq v$, $\ell(u) = \ell(v)$ и $|c(u)| = |c(v)|$;*

б) *Существует уравновешенное тождество вида $u = \zeta(v)$, где ζ – подстановка, переводящая различные буквы слова u в различные буквы;*

в) *$u \sim v$.*

Доказательство. (1) Неравенство $u \leq v$ означает, что найдется уравновешенное тождество вида $v = a\zeta(u)b$. Тогда $\ell(u) \leq \ell(\zeta(u)) \leq \ell(a\zeta(u)b) = \ell(v)$.

Если $\ell(u) = \ell(v)$, то $\ell(\zeta(u)) = \ell(a\zeta(u)b)$. Это означает, что слова a и b пусты, а ζ переводит каждую букву слова u в букву. Отсюда следует, что $|c(u)| \geq |c(\zeta(u))| = |c(v)|$.

(2) а)$\longrightarrow$б). Если $u \leq v$, $\ell(u) = \ell(v)$ и $|c(u)| = |c(v)|$, то, в обозначениях п. (1), подстановка ζ не уменьшает число различных букв в слове u. Следовательно, она переводит различные буквы в различные.

б)$\longrightarrow$в). Пусть $u = \zeta(v)$ — уравновешенное тождество и подстановка ζ переводит различные буквы в различные. Тогда существует подстановка ξ, действующая на множестве $c(\zeta(u))$ обратно подстановке ζ. Тождество $v = \xi(u)$ является уравновешенным. Следовательно, в этом случае $u \leq v$ и $v \leq u$, т. е. $u \sim v$.

в)$\longrightarrow$а). Если $u \sim v$, то $u \leq v$ и $v \leq u$ по определению отношения $\sim$. Согласно утверждению (1) данной леммы, отсюда вытекает, что $\ell(u) = \ell(v)$ и $|c(u)| = |c(v)|$. □

В следующей лемме п. 1) очевиден, а п. 2) вытекает из п. 2) леммы 1.19 и леммы 1.3 работы [47].

Лемма 1.20. *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие коммутативных полугрупп, удовлетворяющее тождеству $u = v$.*

1) *Если $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.*
2) *Если $u \leq v$ и $u \not\sim v$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.* □

Лемма 1.21. *Если неуравновешенное тождество $s = t$ следует из системы $\{u = v, xy = yx\}$, то $u \leq s$ или $v \leq s$.*

Доказательство. Пусть последовательность $w_0 = \cdots = w_k$ является выводом тождества $s = t$ из тождеств $u = v$ и $xy = yx$. Так как тождество $s = t$ не является уравновешенным, существует такое i, что тождество $w_{i-1} = w_i$ не уравновешено. Пусть i — наименьший индекс с таким свойством. Тогда $s \equiv w_0 \sim w_1 \sim \cdots \sim w_{i-1}$. Далее, найдутся слова a и b и подстановка ζ такие, что либо $w_{i-1} \equiv a\zeta(u)b$ и $w_i \equiv a\zeta(v)b$, либо $w_{i-1} \equiv a\zeta(v)b$ и $w_i \equiv a\zeta(u)b$. В первом случае $u \leq w_{i-1} \sim s$, а во втором $v \leq w_{i-1} \sim s$. □

Лемма 1.22. *Пусть слова u и v несравнимы и $c(u) = c(v)$. Если тождество $u = w$ следует из системы тождеств $\{u = v, xy = yx\}$, то либо $w \sim u$, либо $w \sim v$.*

Доказательство. Пусть $w_0 = \cdots = w_k$ — вывод тождества $u = w$ из тождеств $u = v$ и $xy = yx$. Будем вести доказательство индукцией по длине k этого вывода.

База индукции. При $k = 0$ утверждение очевидно.

Шаг индукции. Пусть $k \geq 1$. Тождество $u = w_{k-1}$ вытекает из системы тождеств $\{u = v, xy = yx\}$ и соответствующий вывод $w_0 = \cdots = w_{k-1}$ имеет длину $k-1$. По предположению индукции либо $w_{k-1} \sim u$, либо $w_{k-1} \sim v$. Не ограничивая общности, предположим, что $w_{k-1} \sim u$. Тогда либо тождество $w_{k-1} = w_k$ уравновешено, либо существуют (возможно, пустые) слова a и b и подстановка ζ такие, что либо $w_{k-1} \equiv a\zeta(u)b$ и $w_k \equiv a\zeta(v)b$, либо

$w_{k-1} \equiv a\zeta(v)b$ и $w_k \equiv a\zeta(u)b$. Если тождество $w_{k-1} = w_k$ уравновешено, то $w \sim w_k \sim w_{k-1} \sim u$. Равенство $w_{k-1} \equiv a\zeta(v)b$ невозможно, так как $w_{k-1} \sim u \parallel v$. Остается случай, когда $w_{k-1} \equiv a\zeta(u)b$ и $w_k \equiv a\zeta(v)b$. В этом случае $u \sim w_{k-1} \equiv a\zeta(u)b$, т.е. $u \sim a\zeta(u)b$. В силу п. (2) леммы 1.19 отсюда вытекает, что $\ell(u) = \ell(a\zeta(u)b)$ и $|c(u)| = |c(a\zeta(u)b)|$, а это возможно только если слова a и b пусты, а подстановка ζ переводит различные буквы слова u (а значит, и слова v) в различные буквы. Тогда $w_k \equiv \zeta(v)$, и потому из п. (2) леммы 1.19 следует, что $w \equiv w_k \sim v$. □

Лемма 1.23. *Слова u и v $\mathcal{COM}$-идентичны тогда и только тогда, когда системы тождеств $\{xy = yx, u = 0\}$ и $\{xy = yx, v = 0\}$ эквивалентны.*

Доказательство. Необходимость. Если u и v $\mathcal{COM}$-идентичны, то найдется автоморфизм ξ на F такой, что тождество $v = \xi(u)$ выполняется в $\mathcal{COM}$, поэтому оно уравновешено по лемме 1.13. Тогда тождество $v = 0$ следует из системы $\{xy = yx, u = 0\}$. Аналогично, тождество $u = 0$ вытекает из системы $\{xy = yx, v = 0\}$. Следовательно, эти системы эквивалентны.

Достаточность. Предположим, что системы $\{xy = yx, u = 0\}$ и $\{xy = yx, v = 0\}$ эквивалентны. Легко видеть, что тождество $w = 0$ следует из системы $\{xy = yx, u = 0\}$ тогда и только тогда, когда $u \leq w$. Применительно к случаю $v \equiv w$ это означает, что найдется уравновешенное тождество $u = a\xi(v)$ для некоторого слова $a \in F^1$ и некоторой подстановки ξ. Аналогично, найдется уравновешенное тождество вида $v = b\zeta(u)$ для некоторого слова $b \in F^1$ и некоторой подстановки ζ. Тогда тождество $u = a\xi(b\zeta(u))$ также уравновешено. Отсюда $\ell(u) = \ell(a\xi(b\zeta(u)))$. Но это возможно только если слова a и b пусты и эндоморфизм $\xi\zeta$ переводит каждую букву слова u в букву. Далее, $c(u) = c(\xi\zeta(u))$, поскольку тождество $u = \xi\zeta(u)$ уравновешено. Это означает, что $\xi\zeta$ переводит различные буквы слова u в различные буквы. Следовательно, подстановки ξ и ζ осуществляют взаимно обратные биекции между множествами $c(u)$ и $c(v)$. Следовательно, слова u и v $\mathcal{COM}$-идентичны. □

1.6. Надкоммутативные многообразия

Для изучения решетки **OC** нам будет нужно понятие разбиения натурального числа. *Разбиением числа n на m частей* называется невозрастающая конечная последовательность натуральных чисел $\lambda = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$, такая, что $\ell_1 + \cdots + \ell_m = n$. Числа $\ell_1, \ldots, \ell_m$ называются *компонентами разбиения*. Число компонент разбиения λ обозначим через $m(\lambda)$, сумму компонент — через $n(\lambda)$. Множество всех разбиений всех натуральных чисел на две или большее число частей обозначим через Λ. Для разбиений $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ будем полагать $\lambda_1 \leq \lambda_2$, если λ_2 может быть получено из λ_1 последовательным применением *элементарных операций* следующих двух типов: 1) присоединение новой компоненты, равной 1, и 2) замена двух компонент их суммой с последующим переупорядочением всех компонент в невозрастающем порядке. То, что отношение $\leq$ действительно является отношением порядка, следует из того факта, что операция 1) увеличивает сумму компонент, а операция 2) уменьшает число компонент, сохраняя их сумму. Множество

Λ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, поскольку для любого разбиения λ, очевидно, существует лишь конечное число разбиений, меньших λ. Отметим также, что отношение $\leq$ для разбиений является более слабым, чем отношение *поэлементного порядка* $\leq_1$, определенного следующим образом: для разбиені $\lambda = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ и $\mu = (\ell'_1, \ldots, \ell'_{m'})$ полагаем $\lambda \leq_1 \mu$, если $m \leq m'$ и $\ell_i \leq \ell'_i$ при $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Лемма 1.24. *Множество Λ не содержит бесконечных антицепей.*

Доказательство. Предположим, что Λ содержит бесконечную антицепь A_0. Положим $m_1 = \min\{m(\lambda) \mid \lambda \in A_0\}$. Зафиксируем разбиение $\lambda_1 = (\ell^1_1, \ell^1_2, \ldots, \ell^1_{m_1}) \in A_0$. Для произвольного разбиения $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in A_0$ имеем $m_1 \leq k$, откуда, в силу условия $\lambda_1 \parallel \nu$, найдется $i \in \{1, \ldots, m_1\}$ такое, что $\ell^1_i > n_i$. Множество A_0 бесконечно, а индекс i пробегает конечное множество $\{1, 2, \ldots, m_1\}$. Следовательно, найдется номер $i_1 \leq m_1$ такой, что $n_{i_1} < \ell^1_{i_1}$ для бесконечного мнодества A_0 разбиений ν. Полоим $j_1 = \ell^1_{i_1}$.

Пусть $m_2 = \min\{m(\lambda) \mid \lambda \in A_1\}$. Зафиксируем произвольное разбиение $\lambda_2 = (\ell^1_2, \ell^2_2, \ldots, \ell^2_{m_2}) \in A_1$. Те же рассуждения, что и в предыдущем абзаце, показывают, что найдется число $i_2 \leq m_2$ и бесконечное подмножество $A_2 \subseteq A_1$ такие, что $n_{i_2} < \ell^2_{i_2}$ для каждого $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in A_2$. Положим $j_2 = \ell^2_{i_2}$.

Продолжая эту процедуру, построим последовательность бесконечных множеств разбиений $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, последовательность разбиений $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ и две последовательности чисел $(i_1, i_2, \ldots)$ и $(j_1, j_2, \ldots)$ такие, что для любого s выполняются следующие условия $\lambda_s \in A_{s-1}$, $i_s \leq m_s$, $j_s = \ell^s_{i_s}$ и $n_{i_s} < j_s$ для каждого $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in A_s$. Выбор разбиений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ гарантирует, что если $p > q$, то $\ell^p_{i_q} < \ell^q_{i_q} = j_q$. В частности, если $p > q$ и $i_p = i_q$, то $j_p = \ell^p_{i_p} = \ell^p_{i_q} < j_q$. Это означает, что все пары вида (i_s, j_s) различны. Далее, если $i_p \geq i_q$, то $\ell^p_{i_p} \leq \ell^p_{i_q}$, поскольку все разбиения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ есть невозрастающие последовательности чисел. Следовательно, если $p > q$ и $i_p \geq i_q$, то $j_p = \ell^p_{i_p} \leq \ell^p_{i_q} < j_q$. Положим $i_r = \min\{i_s \mid s \in \mathbb{N}\}$, $j_t = \min\{j_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ и $h = \max\{r, t\}$. Если $s > h$, то $i_s \geq i_r$ и $j_r \geq j_t$, откуда $j_s < j_r$ и $i_s < i_t$. Мы видим, что обе последовательности (i_s) и (j_s) ограничены. Но это невозможно, поскольку все пары вида (i_s, j_s) различны. Противоречие доказывает требуемое утверждение. $\square$

Типом слова u назовем разбиение, образованное кратностями букв в слове u. Будем обозначать тип слова u через $\mathrm{type}(u)$. Если тождество $u = v$ уравновешено, то $\ell(u) = \ell(v)$, $c(u) = c(v)$ и $\mathrm{type}(u) = \mathrm{type}(v)$. Обозначим эти характеристики через $\ell(u = v)$, $c(u = v)$ и $\mathrm{type}(u = v)$, соответственно. Последнюю будем называть *типом тождества* $u = v$. Если тождество $u = v$ непосредственно вытекает из уравновешенного тождества $s = t$, то $\mathrm{type}(u = v) \leq \mathrm{type}(s = t)$. Действительно, в этом случае без ограничения общности можно полагать, что $u \leq s$, откуда следует, что s можно получить из u, последовательно применяя операции четырех типов: а) умножить слева или справа на букву, не входящую ранее в данное слово; б) отождествить между собой две буквы; в) заменить некоторую букву двухбуквенным словом xy, где буквы x и y не входили ранее в данное слово; г) взаимно однозначно переобозначить буквы в слове. Но операция г) не меняет тип слова, операция а) соответствует операции 1) над типом слова, операция б) соответствует операции 2), а операция в) означает добавление к разбиению $\mathrm{type}(u)$ новой неединичной компоненты, что эквивалентно многократному добавлению единичных компонент операцией 1) и их соединению операцией 2). Из этого наблюдения вытекает

Лемма 1.25. *Если уравновешенное тождество $u = v$ вытекает из системы Σ уравновешенных тождеств, то $\mathrm{type}(s = t) \leq \mathrm{type}(u = v)$ для некоторого тождества $s = t$ из системы Σ.*

Доказательство. Пусть $u = w$ — первое тождество в выводе тождества $u = v$ из системы Σ. Оно непосредственно вытекает из некоторого тождества $s = t$ системы Σ, откуда

$$\mathrm{type}(s = t) \leq \mathrm{type}(u = w) = \mathrm{type}(u = v).$$

Лемма доказана. $\square$

Другим понятием, которое нам будет необходимо, является понятие G-множества. Пусть G — произвольная группа. Множество, на котором действует группа G, называется *G-множеством.* Такое множество рассматривается как унарная алгебра, операциями которой служат элементы группы G. Тем самым, в частности, для G-множеств определены понятия конгруэнции и решетки конгруэнций. Решетка конгруэнций G-множества A будет обозначаться через $\mathrm{Con}(A)$.

В дальнейшем нам будут нужны лишь G-множества некоторого специального вида, индексируемые разбиениями из множества Λ. Именно, для произвольного $\lambda = (\ell_1, \ldots, \ell_m) \in \Lambda$ обозначим через W_λ множество всех слов w, таких, что $c(w) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $\ell_i(w) = \ell_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. Множества W_λ называются *трансверсалями.* Эти множества удобны тем, что для записи нетривиальных уравновешенных тождеств можно ограничиться словами из множеств W_λ. Говоря точнее, любое уравновешенное тождество типа $\lambda \in \Lambda$, очевидно, эквивалентно некоторому тождеству $u = v$, где $u, v \in W_\lambda$. В дальнейшем будем предполагать, что симметрическая группа S_m действует на словах над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_m\}$ переобозначением букв. Пусть $m(\lambda) = m$. Через G_λ обозначим подгруппу группы S_m, образованную всеми перестановками букв, сохраняющими кратности букв в словах из W_λ. Иначе говоря, G_λ состоит из всех перестановок, действие которых переводит множество W_λ в себя. Таким образом, множество W_λ является G_λ-множеством. Для произвольного $\lambda \in \Lambda$ и произвольного $\mathcal{V} \in \mathbf{OC}$ обозначим через $\varphi_\lambda(\mathcal{V})$ ограничение конгруэнции $\sim_\mathcal{V}$ на множество W_λ. Техника исследования решетки $\mathbf{OC}$, развитая в [51], основана на использовании следующего предложения.

Предложение 1.3 ([51]). *Система отображений φ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ определяет разложение решетки $\mathbf{OC}$ в подпрямое произведение решеток, двойственных решеткам $\mathrm{Con}(W_\lambda)$.* $\square$

Предложение 1.3 допускает следующее обобщение.

Следствие 1.2 ([51]). *Система отображений* φ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *определяет разложение решетки* $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ *в подпрямое произведение решеток, двойственных фактор-решеткам* $\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))$. $\square$

§ 2. Модулярные и нижнемодулярные элементы в некоторых решетках многообразий полугрупп

Центральным результатом данного параграфа является следующее утверждение, необходимое для дальнейшего изучения модулярных и нижнемодулярных элементов решеток **SEM** и **Com**.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — периодическое подмногообразие надкоммутативного многообразия $\mathcal{X}$. Если многообразие $\mathcal{V}$ является модулярным или нижнемодулярным элементом решетки $L(\mathcal{X})$, то либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое нильмногообразие.*

В доказательстве предложения 2.1 ключевую роль играет следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{X}$ — надкоммутативное многообразие и пусть u, v, s, t — некоторые $\mathcal{X}$-неустойчивые попарно $\mathcal{X}$-неидентичные слова, имеющие одинаковую длину и содержание. Если многообразие $\mathcal{V} \in L(\mathcal{X})$ модулярно или нижнемодулярно в $L(\mathcal{X})$ и удовлетворяет тождествам $u = v$ и $s = t$, то оно удовлетворяет также тождеству $u = s$.*

Доказательство. Обозначим через U, V, S и T образы слов u, v, s и t при каноническом гомоморфизме F на $F(\mathcal{X})$. Отметим, что элементы U, V, S, T попарно несравнимы. Действительно, если, например, $U = A\xi(V)B$ для некоторых $A, B \in F^1(\mathcal{X})$ и $\xi \in \mathrm{End}(F(\mathcal{X}))$, то $\ell(V) = \ell(U) = \ell(A\xi(U)B) = \ell(A) + \ell(\xi(V)) + \ell(B)$, откуда $A = B = 1$ и $\xi \in \mathrm{Aut}(F(\mathcal{X}))$. Тогда $U = \xi(V)$, что противоречит $\mathcal{X}$-неидентичности слов u и v.

Пусть A и B — любые два из четырех элементов U, V, S, T ($A \neq B$), пусть $C, D \in F^1(\mathcal{X})$ и пусть $\xi \in \mathrm{End}(F(\mathcal{X}))$. Докажем, что пары $\{A, B\}$ и $\{C\xi(A)D, C\xi(B)D\}$ либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть

$$\{A, B\} \cap \{C\xi(A)D, C\xi(B)D\} \neq \varnothing.$$

В силу несравнимости элементов A и B имеем $A \neq C\xi(B)D$ и $B \neq C\xi(A)D$, поэтому либо $A = C\xi(A)D$, либо $B = C\xi(B)D$. Без ограничения общности предположим, что $A = C\xi(A)D$. В частности, $\ell(A) = \ell(C(\xi(A)D)) = \ell(C) + \ell(\xi(A)) + \ell(D)$, откуда $C = D = 1$ и $\xi \in \mathrm{Aut}(F(\mathcal{X}))$. Таким образом, $A = \xi(A)$. В силу $\mathcal{X}$-неустойчивости элемента A отсюда следует, что автоморфизм ξ тривиально действует на $c(A)$. Следовательно, так как $c(A) = c(B)$, имеем $\{C\xi(A)D, C\xi(B)D\} = \{A, B\}$.

Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{Y}$ — подмногообразия многообразия $\mathcal{X}$, заданные внутри него системами тождеств $\{u = s, v = t\}$, $\{u = s\}$ и $\{u = v\}$, соответственно. Обозначим через α, β, γ и δ вполне инвариантные конгруэнции на $F(\mathcal{X})$, отвечающие многообразиям $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{Y}$. Конгруэнция γ является транзитивным замыканием множества

$$\{(A\xi(U)B, A\xi(S)B) \mid A, B \in F^1(\mathcal{X}), \xi \in \mathrm{End}(F(\mathcal{X}))\} \\ \cup \{(A, A) \mid A \in F(\mathcal{X})\}.$$

В силу доказанного в предыдущем абзаце, отсюда следует, что множество $\{U, S\}$ является γ-классом, а в силу $\mathcal{X}$-несравнимости элементов U, V, S и T множества $\{V\}$ и $\{T\}$ также являются γ-классами. По аналогичным соображениям множества $\{U, S\}$ и $\{V, T\}$ являются β-классами, а множества $\{U, V\}$, $\{S\}$ и $\{T\}$ являются δ-классами.

Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $u = s$ и докажем, что тогда оно не модулярно и не нижнемодулярно в $L(\mathcal{X})$. Многообразие $\mathcal{V}$ не может удовлетворять тождеству $v = t$, так как иначе в $\mathcal{V}$ выполнена цепочка тождеств $u = v = t = s$. Отсюда следует, что множества $\{U\}$, $\{V\}$, $\{S\}$ и $\{T\}$ являются $\alpha \wedge \beta$-классами. Следовательно, множества $\{V\}$ и $\{T\}$ являются $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma$-классами. Значит, тождество $v = t$ не выполнено в многообразии $(\mathcal{V}\vee\mathcal{U})\wedge\mathcal{W}$. Однако оно выполнено в $(\mathcal{V}\wedge\mathcal{W})\vee\mathcal{U}$, так как цепочка тождеств $v = u = s = t$ выполняется в многообразии $\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$. Поскольку $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$, это означает немодулярность в $L(\mathcal{X})$ многообразия $\mathcal{V}$. Далее, множества $\{S\}$ и $\{T\}$ являются $(\alpha\wedge\beta)\vee\delta$-классами. Следовательно, тождество $s = t$ не выполняется в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{U}) \wedge \mathcal{Y}$. Однако оно выполнено в $(\mathcal{U} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{V}$, так как цепочка тождеств $s = u = v = t$ выполнена в $\mathcal{U} \wedge \mathcal{Y}$. Поскольку $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$, это означает, что многообразие $\mathcal{V}$ не нижнемодулярно в $L(\mathcal{X})$. □

Доказательство предложения 2.1. Вначале докажем, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ порождено коммутативным моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Многообразие $\mathcal{V}$ периодично, а потому удовлетворяет тождеству $x^n = x^{n+m}$ для некоторых натуральных n и m. Можно считать, что $n > 1$. Положим

$$u \equiv xy^{n+4m+3}z^nq, \qquad v \equiv xy^{n+2m+3}z^{n+2m}q,$$
$$s \equiv qy^{n+4m+2}z^{n+1}x, \qquad t \equiv qy^{n+2m+2}z^{n+2m+1}x.$$

Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $u = v$ и $s = t$. Дальнейшие рассуждения естественным образом распадаются на два случая.

Случай 1: слова u, v, s и t являются $\mathcal{X}$-неустойчивыми. Эти слова имеют одинаковую длину и содержание. Вместе с тем, эти слова попарно $\mathcal{X}$-неидентичны, поскольку максимальные кратности букв в этих словах различны. Следовательно, можно применить лемму 2.1, заключив, что тождество $u = s$, то есть тождество

$$xy^{n+4m+3}z^nq = qy^{n+4m+2}z^{n+1}x \tag{2}$$

выполнено в $\mathcal{V}$. Это тождество нарушается в каждом из многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ согласно лемме 1.13. Следовательно, $\mathcal{V}$ не содержит ни одно из этих многообразий, а потому, по лемме 1.16, имеет вид $\mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{M}$ порождено моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Подставляя 1 вместо y и z в тождество (2), получаем, что тождество $xq = qx$ выполнено в $\mathcal{M}$, поэтому $\mathcal{M}$ порождено коммутативным моноидом.

Случай 2: по крайней мере одно из слов u, v, s и t является $\mathcal{X}$-устойчивым. Допустим, что это слово u. Обозначим через U образ u при каноническом гомоморфизме F на $F(\mathcal{X})$. Существует автоморфизм $\xi \in \mathrm{Aut}(F(\mathcal{X}))$, нетривиально действующий на множестве $\{x, y, z, q\}$ и оставляющий элемент U неподвижным. Поскольку $\ell_y(U) > \ell_z(U) > \ell_x(U) = \ell_q(U)$, имеем $\xi(y) \equiv y$ и $\xi(z) \equiv z$. Следовательно, $\xi(x) \equiv q$ и $\xi(q) \equiv x$. Следовательно, образы слов $xy^{n+4m+3}z^n q$ и $qy^{n+4m+3}z^n x$ при каноническом гомоморфизме F на $F(\mathcal{X})$ совпадают. Следовательно, тождество

$$xy^{n+4m+3}z^n q = qy^{n+4m+3}z^n x \tag{3}$$

выполняется в $\mathcal{X}$ а потому и в $\mathcal{V}$. Это тождество нарушается в каждом из многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ по лемме 1.13. Следовательно, по лемме 1.16, имеем $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{M}$ порождено моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Подставляя 1 вместо y и z в тождестве (3), получаем, что тождество $xq = qx$ выполнено в $\mathcal{M}$, поэтому $\mathcal{M}$ порождено коммутативным моноидом. Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда $\mathcal{X}$-устойчивым является одно из слов v, s и t.

Остается проверить, что многообразие $\mathcal{M}$ совпадает либо с $\mathcal{T}$, либо с $\mathcal{SL}$. Для этого заметим, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $u' = v'$ и $s' = t'$, где

$$u' \equiv x^{n+2m+4}y^{n+2}z, \qquad v' \equiv x^{n+m+4}y^{n+m+2}z,$$
$$s' \equiv x^{n+2m+3}y^{n+2}z^2, \qquad t' \equiv x^{n+m+3}y^{n+m+2}z^2.$$

Эти слова имеют одинаковую длину и содержание. Вместе с тем, эти слова попарно $\mathcal{X}$-неидентичны, поскольку у любых двух из них различаются либо наибольшие, либо наименьшие кратности букв. Наконец, слова u', v', s' и t' являются $\mathcal{X}$-неустойчивыми, поскольку $\ell_x(w) > \ell_y(w) > \ell_z(w)$ для любого $w \in \{u', v', s', t'\}$. Согласно лемме 2.1, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u' = s'$, то есть тождеству

$$x^{n+2m+4}y^{n+2}z = x^{n+2m+3}y^{n+2}z^2.$$

Подставляя в этом тождестве 1 вместо x и y, получаем, что тождество $z = z^2$ выполняется в $\mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, а поскольку многообразие $\mathcal{SL}$ является атомом решетки $\mathcal{SEM}$, имеем либо $\mathcal{M} = \mathcal{T}$, либо $\mathcal{M} = \mathcal{SL}$. $\square$

Отметим, что условие периодичности многообразия $\mathcal{V}$ в предложении 2.1 существенно. В качестве примера рассмотрим многообразия $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{xyz = yxz = xzy\}$ и $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$. Легко видеть, что тождество $xy = yx$, с точностью до обозначения букв, является единственным тождеством, которое выполняется в $\mathcal{V}$, но нарушается в $\mathcal{X}$. Следовательно, многообразие $\mathcal{X}$ покрывает $\mathcal{V}$, т. е. $\mathcal{V}$ является коатомом решетки $L(\mathcal{X})$. Коатом любой решетки, очевидно, является нижнемодулярным элементом этой решетки, поэтому $\mathcal{V}$ нижнемодулярно в $L(\mathcal{X})$. Убедимся, что многообразие $\mathcal{V}$ также модулярно в $L(\mathcal{X})$. В силу следствия 1.1, достаточно проверить равенство $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y} = (\mathcal{V} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{X}$ для произвольных многообразий $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, содержащих $\mathcal{SL}$ и таких, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. В терминах вполне инвариантных конгруэнций, достаточно доказать, что ограничение α конгруэнции $\sim_{\mathcal{V}} / \sim_{\mathcal{X}}$ на каждый класс конгруэнции $\sim_{\mathcal{SL}} / \sim_{\mathcal{X}}$ модулярно в решетке разбиений этого класса.

Каждый класс конгруэнции $\sim_{\mathcal{SL}}$ / $\sim_{\mathcal{X}}$ состоит из всех элементов $U \in F(\mathcal{X})$ с фиксированным множеством $c(U)$, что следует из леммы 1.13. Разбиение α содержит либо один неодноэлементный класс (например, содержащий образ слова xy в $F(\mathcal{X})$ для случая $c(u) = \{x, y\}$), либо ни одного такого класса. Тогда требуемое утверждение вытекает из леммы 1.10.

Решетки подмногообразий надкоммутативных многообразий полугрупп расположены между решетками **SEM** и **Com** в том смысле, что они являются подрешетками первой из них и содержат вторую в качестве подрешетки. Еще одной важной и естественной решеткой такого рода является решетка **Perm** всех перестановочных многообразий полугрупп. Эта решетка и некоторые ее подрешетки эпизодически появлялись ранее в литературе (см., например, [25, 26]), но систематически она не изучалась. В этой связи интересно отметить, что в решетке **Perm** имеет место следующий аналог предложения 2.1.

Предложение 2.2. *Если перестановочное многообразие $\mathcal{V}$ модулярно или нижнемодулярно в* **Perm**, *то либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое нильмногообразие.*

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующий аналог леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть u, v, s, t — некоторые попарно $\mathcal{SEM}$-неидентичные слова, имеющие одинаковую длину и содержание. Если перестановочное многообразие $\mathcal{V}$ модулярно или нижнемодулярно в* **Perm** *и удовлетворяет тождествам $u = v$ и $s = t$, то оно удовлетворяет также тождеству $u = s$.*

Доказательство. Будучи перестановочным, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству $p_n[\alpha]$, где число n больше, чем длина любого из слов u, v, s, t. Пусть $\mathcal{X}$ — многообразие, заданное тождеством $p_n[\alpha]$. Ясно, что из тождества $p_n[\alpha]$ невозможно вывести никакое нетривиальное тождество вида $u = w$, $v = w$, $s = w$ или $t = w$, поэтому слова u, v, s и t попарно $\mathcal{X}$-неидентичны и $\mathcal{X}$-неустойчивы. При этом многообразие $\mathcal{X}$ надкоммутативно и $L(\mathcal{X}) \subseteq$ **Perm**, поэтому многообразие $\mathcal{V}$ модулярно или нижнемодулярно в $L(\mathcal{X})$. Остается применить лемму 2.1. $\square$

Доказательство предложения 2.2. Докажем сначала, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Будучи перестановочным, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому тождеству вида $p_n[\alpha]$. Приравняв между собой все буквы в этом тождестве, кроме двух, можно получить нетривиальное тождество $u = v$ от двух букв x и y. Ясно, что тождества $ux^2 = vx^2$, $ux^2 = uxy$, $ux^2 = vxy$, $vx^2 = uxy$, $vx^2 = vxy$, $uxy = vxy$ не подстановочны, то есть слова ux^2, vx^2, uxy и vxy попарно $\mathcal{SEM}$-неидентичны. В силу леммы 2.2, многообразие $\mathcal{V}$ вместе с тождествами $ux^2 = vx^2$ и $uxy = vxy$ удовлетворяет тождеству $ux^2 = uxy$. Подставив x^2 вместо y, получим тождество вида $x^k = x^{k+1}$. Периодичность $\mathcal{V}$ доказана. Теперь мы можем завершить доказательство предложения 2.2, применив предложение 2.1 для многообразия $\mathcal{X}$, заданного тождеством $p_n[\alpha]$. $\square$

§ 3. Решетка всех многообразий полугрупп

Данный параграф посвящен изучению специальных элементов в **SEM**. В пункте 3.1 будет решена задача 1, в пункте 2 — передоказано упомянутое во введении необходимое условие модулярности многообразия из [29], в пункте 3 — решена задача 2, в пункте 4 — решены задачи 3 и 4.

3.1. Периодичность специальных элементов всех типов

Основным результатом данного пункта является следующая теорема.

Теорема 1. *Всякое собственное id-многообразие является периодическим многообразием.*

Теорема 1 предоставляет необходимое условие для id-многообразий. В связи с этим естественным является вопрос о том, будет ли это условие достаточным, то есть будет ли всякое периодическое многообразие id-многообразием. Ответ оказывется отрицательным.

Предложение 3.1. *Существуют периодические многообразия, не являющиеся id-многообразиями.*

Доказательство теоремы 1 основано на использовании некоторых антигомоморфизмов решеток многообразий на решетки разбиений. Введем необходимые обозначения. Для произвольной антицепи (в смысле отношения делимости слов) $A \subseteq F$ рассмотрим множество L_A всех многообразий $\mathcal{V}$, для которых A является объединением $\sim_{\mathcal{V}}$-классов. Определим отображение $\varphi_A \colon L_A \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$, положив $\varphi_A(\mathcal{V}) = \sim_{\mathcal{V}} |_A$ для любого $\mathcal{V} \in L_A$.

Лемма 3.1. *Пусть A — произвольная антицепь в F, в которой все слова зависят от одних и тех же букв. Тогда:*

1) *множество L_A является подрешеткой решетки* **SEM***;*

2) *отображение φ_A является антигомоморфизмом решетки L_A на решетку* $\mathrm{Part}(A)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим разбиение α полугруппы F на два класса: A и $F \setminus A$. Его главный идеал $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F)}$ состоит из всех разбиений β таких, что A является объединением β-классов. Из этого наблюдения и определения множества L_A следует, что L_A является прообразом решетки $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F)} \cap FIC(F)$ решетки $FIC(F)$ при антиизоморфизме $\mathcal{V} \mapsto \sim_{\mathcal{V}}$. Следовательно, L_A — подрешетка в **SEM**.

2) Рассмотрим отображение $\psi_A \colon (\alpha]_{\mathrm{Part}(F)} \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$, определенное по правилу $\psi_A(\beta) = \beta|_A$ для любого $\beta \in (\alpha]_{\mathrm{Part}(F)}$. Согласно п. 1) леммы 1.8 решетка $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F)}$ разложима в прямое произведение решеток $\mathrm{Part}(A)$ и $\mathrm{Part}(F \setminus A)$, причем отображение ψ_A есть проекция на первый сомножитель. Следовательно, ψ_A — гомоморфизм решеток. Отображение φ_A по определению является композицией антиизоморфизма $\mathcal{V} \mapsto \sim_{\mathcal{V}}$, ограниченного на L_A, и гомоморфизма ψ_A, ограниченного на $(\alpha]_{FIC(F)}$, а потому является антигомоморфизмом. Остается доказать сюръективность φ_A. Возьмем

произвольное отношение эквивалентности $\beta \in \mathrm{Part}(A)$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{V}$, для которого β (рассматриваемое как множество пар слов) является базисом тождеств, и убедимся, что $\mathcal{V} \in L_A$ и $\varphi_A(\mathcal{V}) = \beta$. Это так, если каждый β-класс является $\sim_{\mathcal{V}}$-классом. Таким образом, нужно показать, что если тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{V}$ и $u \in A$, то $(u, v) \in \beta$. Если это не так, то в выводе тождества $u = v$ из системы β найдутся два соседних слова $a\xi(u')b$ и $a\xi(v')b$ ($a, b \in F^1$, $\xi \in \mathrm{End}(F)$, $(u', v') \in \beta$), одно из которых принадлежи u^β, а другое — не принадлежит. В этом случае $u' \leq u$. Поскольку $u, u' \in A$ и A — антицепь, отсюда следует, что $u \equiv u'$. Тогда $a \equiv b \equiv 1$ и ξ действует тождественно на всех буквах слов u' и v'. Отсюда $v \equiv v'$, поэтому $v \in u^\beta$, противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем любое собственное непериодическое многообразие $\mathcal{V}$ и нетривиальное решеточное тождество I. Согласно лемме 1.17, многообразие $\mathcal{V}$ надкоммутативно. Нужно доказать, что $\mathcal{V}$ не является I-многообразием.

Поскольку тождество I нетривиально, двойственное ему тождество $\overline{I}$ также нетривиально. Следовательно, $\overline{I}$ нарушается в некоторой конечной решетке. Любая конечная решетка может быть вложена в некоторую конечную решетку разбиений [34]. Таким образом, $\overline{I}$ нарушается в решетке $\mathrm{Part}(X)$ для некоторого конечного множества X. Положим $|X| = n$. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{Part}(X)$ — тот набор значений переменных тождества $\overline{I}$, на котором оно нарушается. В частности, разбиение α_0 не является $\overline{I}$-элементом решетки $\mathrm{Part}(X)$.

Будучи собственным, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству $u = v$. Хорошо известно, что всякое тождество, выполненное в непериодическом многообразии, уравновешено. Приравняв между собой все буквы в тождестве $u = v$, кроме одной, входящей в u и v в разных позициях, можно получить нетривиальное тождество от двух букв, которое также выполнено в $\mathcal{V}$. В силу этого можно считать, что $u = v$ — тождество от букв x и y. Кроме того, можно считать, что $\ell_x(u) > \ell_y(u)$: этого можно добиться, домножив обе части тождества на подходящую степень x. Далее, через A_i обозначим $\sim_{\mathcal{V}}$-класс слова $x^{2n-i}y^i u^n$ для $1 \leq i \leq n$. Положим $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Убедимся, что множество A является антицепью. Действительно, пусть два слова $w_1, w_2 \in A$ сравнимы, скажем, $w_1 \leq w_2$, т. е $w_2 = a\xi(w_1)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и $\xi \in \mathrm{End}(F)$. Слова w_1 и w_2 имеют одинаковую длину, откуда следует, что слова a и b пусты, а ξ переводит каждую букву в букву. Поскольку слова w_1 и w_2 содержат лишь буквы x и y, эндоморфизм ξ либо действует на этих буквах тождественно, либо переводит их друг в друга. Но второе невозможно, поскольку $\ell_x(w_1) > \ell_y(w_1)$ и $\ell_x(w_2) > \ell_y(w_2)$. Следовательно, $w_1 \equiv w_2$.

Итак, множество A является антицепью, а потому к нему применима лемма 3.1. При этом множества $A_1, \ldots, A_n$ являются в точности $\varphi_A(\mathcal{V})$-классами. Чтобы убедиться в этом, отметим, что $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$, поскольку тождество $x^{2n-i}y^i u^n = x^{2n-j}y^j u^n$ не является уравновешенным. При этом $|A_i| > n$, так как все слова $x^{2n-i}y^i u^k v^{n-k}$ при $0 \leq k \leq n$ различны и лежат в A_i. Применив лемму 4, построим гомоморфизм $\psi\colon \mathrm{Part}(X) \longrightarrow$

$\mathrm{Part}(A)$, для которого $\psi(\alpha_0) = \varphi_A(\mathcal{V})$. В силу сюръективности φ_A, найдутся многообразия $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$, такие, что $\varphi_A(\mathcal{V}_i) = \psi(\alpha_i)$ для $1 \le i \le m$. Поскольку тождество $\overline{I}$ нарушается на элементах $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ решетки $\mathrm{Part}(X)$ и поскольку ψ — вложение, это же тождество будет нарушаться на элементах $\psi(\alpha_0), \ldots, \psi(\alpha_m)$ решетки $\mathrm{Part}(A)$, т. е. на многообразиях $\varphi_A(\mathcal{V}), \varphi_A(\mathcal{V}_1), \ldots, \varphi_A(\mathcal{V}_m)$. Следовательно, тождество I нарушается на многообразиях $\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ решетки **SEM**, так как φ_A — антигомоморфизм. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ не является I-многообразием. □

Доказательство предложения 3.1. Воспользуемся тем, что в решетку нильмногообразий антиизоморфно вложима решетка $\mathrm{Part}(X)$, где X — счетное множество [21]. Так как I-элемент любой решетки, как легко видеть, является I-элементом любой ее подрешетки, достаточно показать, что решетка $\mathrm{Part}(X)$ содержит элемент, не являющийся I-элементом ни для какого нетривиального тождества I. Убедимся, что таковым является разбиение α множества X на счетное число счетных классов. По аналогии с доказательством теоремы 1, для произвольного тождества I можно найти конечную решетку разбиений $\mathrm{Part}(Y)$ и набор $\beta_0, \ldots, \beta_m$ значений переменных тождества I в решетке $\mathrm{Part}(Y)$, на котором это тождество нарушается. Воспользовавшись леммой 1.9, построим вложение $\varphi\colon \mathrm{Part}(Y) \longrightarrow \mathrm{Part}(X)$, для которого $\varphi(\beta_0) = \alpha$. Тождество I нарушается на элементах $\varphi(\beta_0), \ldots, \varphi(\beta_m)$ решетки $\mathrm{Part}(X)$, поэтому элемент $\varphi(\beta_0) = \alpha$ не является I-элементом. □

3.2. Модулярные элементы

В данном пункте будет передоказано достаточное условие модулярности многообразия из [29]. Поскольку точно так же доказываются аналогичные условия для модулярных в **Com**, нижнемодулярных и нижнемодулярных в **Com** многообразий, эти утверждения будут доказаны в этом же пункте.

Предложение 3.2. *Если $\mathcal{V}$ — модулярное или нижнемодулярное* [*в* **Com**] *многообразие, то либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$* [*соответственно $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$*]*, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое нильмногообразие.*

Доказательство. В силу предложения 2.1 для $\mathcal{X} = \mathcal{SEM}$ [$\mathcal{X} = \mathcal{COM}$], достаточно доказать периодичность многообразия $\mathcal{V}$ в случае, когда $\mathcal{V}$ не является единицей решетки. Для специальных элементов решетки **Com** это очевидно, докажем для специальных элементов решетки **SEM**. Будучи собственным, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству $w_1 = w_2$. Если многообразие $\mathcal{V}$ не периодично, то оно надкоммутативно по лемме 1.17 откуда по лемме 1.13 следует, что тождество $w_1 = w_2$ уравновешено. Повторяя рассуждения из доказательства предложения 2.2 с тождеством $w_1 = w_2$ вместо тождества $p_n[\alpha]$, убедимся, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично, вопреки предположению. □

Как уже было отмечено во введении, в работе [41] данное необходимое условие было усилено. Именно, в этой работе было доказано, что любое модулярное нильмногообразие может быть задано системой 0-приведенных и подстановочных тождеств. Там же было получено описание коммутативных модулярных нильмногообразий, а потому и всех коммутативных модулярных многообразий. Именно, коммутативное нильмноообразие модулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству $x^2y = 0$. Из этого факта следует, что имеющееся достаточное условие модулярности нильмногообразия (предложение 1.2) не является необходимым (контрпример — многообразие $\mathrm{var}\{x^2y = 0, xy = yx\}$), а необходимое (результат работы [41]) — достаточным (контрпример — многообразие $\mathrm{var}\{x^3 = xyzt = 0, xy = yx\}$).

3.3. Нижнемодулярные элементы

Нижнемодулярные многообразия описываются следующей теоремой.

Теорема 2. *Многообразие $\mathcal{V}$ нижнемодулярно тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое 0-приведенное многообразие.*

Теорема 2 непосредственно вытекает из предложения 3.2, следствия 1.1 и следующей леммы.

Лемма 3.2. *Нильмногообразие нижнемодулярно тогда и только тогда, когда оно является 0-приведенным многообразием.*

Доказательство. Достаточность устанавливается предложением 1.2, необходимость доказана в [40]. □

Из теоремы 2, предложения 1.2 и следствия 1.1 вытекает

Следствие 3.1. *Всякое нижнемодулярное многообразие модулярно.* □

В связи со следствием 3.1 отметим, что ни одно из остальных пяти возможных соотношений между элементами модулярных типов в решетке **SEM** не выполняется. Например:

- многообразие $\mathrm{var}\{x^2 = 0, xy = yx\}$ модулярно в силу описания коммутативных модулярных многообразий, приведенного в [41], но не нижнемодулярно по теореме 2;
- многообразие $\mathrm{var}\{xyz = 0\}$ модулярно и нижнемодулярно по предложению 1.2, но не верхнемодулярно в силу результата [4];
- многообразие $\mathcal{A}_p$ для любого простого p верхнемодулярно, поскольку атом любой решетки верхнемодулярен, но не является ни модулярным, ни нижнемодулярным по предложению 3.2.

3.4. Дистрибутивные и стандартные элементы

В данном пункте будут решены задачи 3 и 4. Соответствующим результатом является следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого многообразия $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно;*

(б) *многообразие $\mathcal{V}$ стандартно;*

(в) *либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие, удовлетворяющее тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0. \tag{4}$$

Отметим, что 0-приведенные подмногообразия многообразия $\mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$ исчерпываются многообразиями из следующего списка:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\};\\
&\mathrm{var}\{x^2 = xyx = 0\};\\
&\mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = x_1 \dots x_n = 0\};\\
&\mathrm{var}\{x^2 = xyx = x_1 \dots x_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Поскольку любой дистрибутивный элемент нижнемодулярен, из следствия 3.1 и леммы 1.4 непосредственно вытекает, что для многообразий полугрупп дистрибутивность эквивалентна стандартности. Тем самым, равносильность пунктов (а) и (б) уже доказана. Остается доказать равносильность пунктов (а) и (в). Так как любое дистрибутивное многообразие нижнемодулярно, теорема 2 и следствие 1.1 сводят доказательство теоремы 3 к доказательству следующего предложения.

Предложение 3.3. *Многообразие, являющееся 0-приведенным, дистрибутивно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождествам* (4).

Для доказательства необходимости в предложении 3.3 нам нужны еще две леммы.

Лемма 3.3. *Пусть u, v — несравнимые слова от одних и тех же букв. Пусть $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{u = v\}$, и пусть σ — произвольная перестановка множества $c(u)$. Если многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $\sigma(u) = w$, то $w \equiv \sigma(v)$.*

Доказательство. Предположим, что из тождества $u = v$ непосредственно вытекает нетривиальное тождество вида $\sigma(u) = w$. Тогда либо $\sigma(u) \equiv a\zeta(u)b$ и $w \equiv a\zeta(v)b$, либо $\sigma(u) \equiv a\zeta(v)b$ и $w \equiv a\zeta(u)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторой подстановки ζ. Во втором случае

$$\begin{aligned}
u &\equiv \sigma^{-1}(a\zeta(v)b) \equiv \sigma^{-1}(a)\sigma^{-1}(\zeta(v))\sigma^{-1}(b)\\
&\equiv \sigma^{-1}(a)(\sigma^{-1}\zeta)(v)\sigma^{-1}(b),
\end{aligned}$$

что противоречит несравнимости слов u и v. Таким образом, имеет место первый случай, и, в частности, $\sigma(u) \equiv a\zeta(u)b$. Из равенств $\ell(u) = \ell(\sigma(u)) = \ell(a\zeta(u)b)$ следует, что слова a и b — пустые, а ζ переводит каждую букву из $c(u)$ в букву. В частности, $\sigma(u) \equiv \zeta(u)$. Значит, σ и ζ одинаково действуют на $c(u)$, откуда $w \equiv \sigma(v)$. В силу симметрии, если из тождества $u = v$ непосредственно вытекает нетривиальное тождество вида $\sigma(v) = w$, то $w \equiv \sigma(u)$.

Предположим, что последовательность тождеств

$$\sigma(u) \equiv w_0 = w_1 = \cdots = w_k \equiv w$$

является кратчайшим выводом тождества $\sigma(u) = w$ из тождества $u = v$. В силу сказанного выше, $w_1 \equiv \sigma(v)$. Если $k > 1$, то из равенства $w_1 \equiv \sigma(v)$ вытекает равенство $w_2 \equiv \sigma(u)$. Значит, данный вывод не является кратчайшим. Таким образом, случай $k > 1$ невозможен. Следовательно, $k = 1$ и $w \equiv w_1 \equiv \sigma(v)$. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное 0-приведенное многообразие, а слова u, v зависят от одних и тех же букв и удовлетворяют одному из следующих условий:*

1) $u \parallel v$;

2) $\ell(u) = \ell(v)$.

Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, то оно удовлетворяет и тождеству $v = 0$.

Доказательство. 1) Если $|c(u)| = 1$, то $u = x^q$ и $v = x^r$ для некоторых натуральных q и r. Тогда слова u и v сравнимы, что противоречит условию. Следовательно, $|c(u)| > 1$, и потому группа $S(c(u))$ содержит нетривиальную перестановку α. Положим $w \equiv \alpha(u)$. Тогда в $\mathcal{V}$ выполняется тождество $w = 0$, а значит, и тождество $u = w$. Положим $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{u = v\}$ и $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\{v = w\}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно, выполняется равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}).$$

Очевидно, что многообразие $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$ удовлетворяет тождеству $u = w$. Следовательно, ему удовлетворяет и многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Значит, должен существовать вывод тождества $u = w$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, одно из этих многообразий должно удовлетворять нетривиальному тождеству вида $u = w_1$.

Предположим, что это тождество выполняется в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. В частности, оно выполняется в $\mathcal{Y}$. Применяя лемму 3.3 в случае, когда σ — тривиальная перестановка из $S(c(u))$, получаем, что $w_1 \equiv v$. Поскольку $u = w_1$ в $\mathcal{V}$, в $\mathcal{V}$ выполняется тождество $u = v$, а вместе с ним и тождество $v = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда тождество $u = w_1$ выполняется в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, оно выполняется в $\mathcal{Z}$. Поскольку $u \equiv \alpha^{-1}(w)$, можно применить лемму 3.3 при $\sigma = \alpha^{-1}$. В результате $w_1 \equiv \alpha^{-1}(v)$. Тождество

$u = w_1$ выполняется в $\mathcal{V}$, следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = \alpha^{-1}(v)$, а вместе с ним и тождествам $\alpha^{-1}(v) = 0$ и $v = 0$.

2) Поскольку п. 1) уже доказан, можно считать, что одно из слов u и v содержит образ другого. Вначале предположим, что $u \equiv a\zeta(v)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторой подстановки ζ. Поскольку $\ell(v) = \ell(u) = \ell(a\zeta(v)b))$, слова a и b являются пустыми, а ζ переводит каждую букву слова u в букву. Кроме того, $c(\zeta(v)) = c(u) = c(v)$, поэтому $\zeta(v) \equiv \alpha(v)$ для некоторой перестановки $\alpha \in S(c(u))$. Тогда $v \equiv \alpha^{-1}(\zeta(v)) = \alpha^{-1}(u)$ и тождество $v = 0$ эквивалентно в $\mathcal{V}$ тождеству $u = 0$. Аналогично можно показать, что если $v \equiv a\zeta(u)b$, где a, b и ζ имеют прежний смысл, то $v \equiv \alpha(u)$ для подходящей перестановки $\alpha \in S(c(u))$, а тождества $u = 0$ и $v = 0$ эквивалентны. $\square$

Доказательство необходимости в предложении 3.3. Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное 0-приведенное многообразие. Будучи 0-приведенным, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$ для некоторого слова u. Можно считать, что $c(u) = \{x, y\}$. В самом деле, если u зависит от одной буквы, то можно подставить вместо этой буквы слово xy, если u зависит от двух букв — переименовать одну из них в x, а другую — в y, а если u зависит более чем от двух букв — приравнять одну из них к x, а все остальные — к y. Пусть $n = \ell(u)$. В силу леммы 3.4.2), $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = \{x, y\}$ и $\ell(v) = n$. Если $n \leq 3$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (4).

Предположим теперь, что $n \geq 4$. Пусть $s \equiv xyx^{n-2}$ и $t \equiv x^{n-2}y$. Легко видеть, что при $n \geq 4$ слова s и t несравнимы. Из равенства $\ell(s) = n$ вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $s = 0$. Применяя лемму 3.4.1), получаем, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет и тождеству $t = 0$. Поскольку $\ell(t) = n - 1$, из леммы 3.4.2) вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = \{x, y\}$ и $\ell(v) = n - 1$. Очевидная индукция позволяет установить, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет и всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = \{x, y\}$ и $3 \leq \ell(v) \leq n-2$. В частности, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (4). $\square$

Доказательство достаточности в предложении 3.3. Пусть $\mathcal{V}$ — 0-приведенное многообразие полугрупп, удовлетворяющее тождествам (4), а $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия полугрупп. Требуется доказать, что

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}).$$

Следствие 1.1 позволяет всюду далее считать, что $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$. Включение $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$ очевидно, поэтому достаточно убедиться, что $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. Иными словами, требуется проверить, что произвольное тождество, выполненное в многообразии $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$, выполняется и в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$.

В дальнейшем будем постоянно использовать, не оговаривая этого в явном виде, следующий очевидный факт: если w — нелинейное слово и $w \not\equiv x^2$, то тождество $w = 0$ вытекает из (4) и потому выполняется в $\mathcal{V}$. Пусть тождество $u = v$ выполняется в многообразии $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. Тогда оно выполняется в $\mathcal{V}$ и существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Предположим, что последовательность

$$u \equiv w_0 = w_1 = \cdots = w_k \equiv v$$

является кратчайшим выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Поскольку $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$, из леммы 1.13 вытекает, что $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$. Без ограничения общности можно считать, что $c(w_0) = \cdots = c(w_k) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ для некоторого m.

Будем вести доказательство индукцией по длине вывода. База индукции очевидна: если $k = 1$, то тождество $u = v$ выполняется в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$, а значит, и в их пересечении. Пусть теперь $k > 1$.

Тождество $u = v$ выполняется в многообразии $\mathcal{V}$. Поскольку это многообразие является 0-приведенным, в $\mathcal{V}$ выполняются тождества $u = v = 0$. Если $w_i = 0$ в $\mathcal{V}$ для некоторого $0 < i < k$, то в $\mathcal{V}$ выполняются тождества $u = w_i$ и $w_i = v$. При этом последовательности

$$w_0 = w_1 = \cdots = w_i \text{ и } w_i = w_{i+1} = \cdots = w_k$$

являются соответственно выводами тождеств $u = w_i$ и $w_i = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, и длины этих выводов меньше k. По предположению индукции, тождества $u = w_i$ и $w_i = v$ выполняются в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Тогда и $u = v$ выполняется в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Поэтому далее можно считать, что каждое из слов $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ либо линейно, либо совпадает со словом x^2.

Предположим, что $w_i = x^2$ для некоторого i. Поскольку $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = x(w_k)$, все слова $w_0, \ldots, w_k$ являются степенями буквы x. В этом случае $(u, v) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$, где α, β, γ — вполне инвариантные конгруэнции на свободной циклической полугруппе над алфавитом $\{x\}$, отвечающие многообразиям $\mathcal{V}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ соответственно. Хорошо известно и легко проверяется, что любая циклическая полугруппа конгруэнц-дистрибутивна, откуда $(u, v) \in (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \subseteq (\sim_{\mathcal{V}} \vee \sim_{\mathcal{Y}}) \wedge (\sim_{\mathcal{V}} \vee \sim_{\mathcal{Z}})$. Следовательно, тождество $u = v$ выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$.

Остается рассмотреть случай, когда слова $w_1, \ldots, w_{k-1}$ линейны. При этом можно считать, что u и v не являются линейными. В самом деле, если хотя бы одно из слов u и v линейно, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \ldots x_m = 0$. Тогда тождества $u = w_0 = w_1 = \cdots = w_k = v = 0$ выполнены в $\mathcal{V}$ и последовательность $u \equiv w_0 = w_1 = \cdots = w_k \equiv v$ является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. Без ограничения общности можно считать также, что тождество $u = w_1$ выполняется в $\mathcal{Y}$ (а значит, тождество $w_1 = w_2$ выполняется в $\mathcal{Z}$, поскольку вывод $w_0 = \cdots = w_k$ — кратчайший) и что $w_1 \equiv x_1 x_2 \ldots x_m$. Дальнейшие рассуждения распадаются на три случая в зависимости от k.

Случай 1: $k = 2$. Вывод $w_0 = \cdots = w_k$ имеет в этом случае вид $u = w_1 = v$, причем тождество $u = w_1$ выполняется в $\mathcal{Y}$, а тождество $w_1 = v$ выполняется в $\mathcal{Z}$. Поскольку слова u и v не линейны, из леммы 1.14

вытекает, что $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ являются многообразиями ступени не выше m. В силу леммы 1.15, каждое из них удовлетворяет тождеству вида

$$x_1x_2\dots x_m = x_1\dots x_{i-1}(x_i\dots x_j)^t x_j\dots x_m$$

для некоторых $i,j\in\{1,\dots,m\}$, $i\le j$, и некоторого $t>1$. Для краткости обозначим это тождество через $f(m,i,j,t)$. Пусть $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $f(m,p,q,h_1)$, а $\mathcal{Z}$ — тождеству $f(m,r,s,h_2)$. Легко понять, что тождество $f(m,i,j,t)$ влечет тождество $f(m,i,j,l(t-1)+1)$ для любого натурального l. Положим $h=(h_1-1)(h_2-1)+1$. Заменив h_1 и h_2 на h, сведем доказательство к случаю $h_1=h_2$. Далее рассмотрим три подслучая.

Подслучай 1.1: одно из множеств $\{p,p+1,\dots,q\}$ и $\{r,r+1,\dots,s\}$ содержится в другом. По соображениям симметрии можно считать, $p\le r\le s\le q$. Тогда выводом тождества $u=v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V}\vee\mathcal{X}$ и $\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}$ является последовательность тождеств

$$\begin{aligned}
u &= x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^h x_{q+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_{r-1}x_r\dots x_s x_{s+1}\dots x_q)^h x_{q+1}\dots x_m\\
&= x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_{r-1}(x_r\dots x_s)^h x_{s+1}\dots x_q)^h x_{q+1}\dots x_m\\
&= x_1\dots x_{p-1}x_p\dots x_{r-1}(x_r\dots x_s)^h x_{s+1}\dots x_q x_{q+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{r-1}(x_r\dots x_s)^h x_{s+1}\dots x_m\\
&= v.
\end{aligned}$$

Подслучай 1.2: множества $\{p,p+1,\dots,q\}$ и $\{r,r+1,\dots,s\}$ имеют непустое пересечение, но ни одно из них не содержится в другом. По соображениям симметрии можно считать, что $p<r\le q<s$. Тогда выводом тождества $u=v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}$ и $\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}$ является последовательность тождеств

$$\begin{aligned}
u &= x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^h x_{q+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^{h-1}x_p\dots x_q x_{q+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^{h-1}x_p\dots x_{r-1}x_r\dots x_s x_{s+1}\dots x_m\\
&= x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^{h-1}x_p\dots x_{r-1}(x_r\dots x_s)^h x_{s+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^{h-1}x_p\dots x_{r-1}x_r\dots x_s(x_r\dots x_s)^{h-1}x_{s+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^{h-1}x_p\dots x_q x_{q+1}\dots x_s(x_r\dots x_s)^{h-1}x_{s+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{p-1}(x_p\dots x_q)^h x_{q+1}\dots x_s(x_r\dots x_s)^{h-1}x_{s+1}\dots x_m\\
&= x_1\dots x_{p-1}x_p\dots x_q x_{q+1}\dots x_s(x_r\dots x_s)^{h-1}x_{s+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{r-1}x_r\dots x_s(x_r\dots x_s)^{h-1}x_{s+1}\dots x_m\\
&\equiv x_1\dots x_{r-1}(x_r\dots x_s)^h x_{s+1}\dots x_m\\
&= v
\end{aligned}$$

Подслучай 1.3: множества $\{p,p+1,\dots,q\}$ и $\{r,r+1,\dots,s\}$ имеют пустое пересечение. По соображениям симметрии можно считать, что $p\le q<r\le$

s. Тогда последовательность слов

$$\begin{aligned}u &= x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^h x_{q+1} \dots x_m \\ &\equiv x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^h x_{q+1} \dots x_{r-1} x_r \dots x_s x_{s+1} \dots x_m \\ &= x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^h x_{q+1} \dots x_{r-1}(x_r \dots x_s)^h x_{s+1} \dots x_m \\ &= x_1 \dots x_{p-1} x_p \dots x_q x_{q+1} \dots x_{r-1}(x_r \dots x_s)^h x_{s+1} \dots x_m \\ &\equiv x_1 \dots x_{r-1}(x_r \dots x_s)^h x_{s+1} \dots x_m \\ &= v\end{aligned}$$

является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$.

Случай 2: $k = 3$. Тогда вывод $w_0 = w_1 = \dots = w_k$ имеет вид $u = w_1 = w_2 = v$, причем тождества $u = w_1$ и $w_2 = v$ выполняются в $\mathcal{Y}$, а тождество $w_1 = w_2$ — в $\mathcal{Z}$. Как и в случае 1, из лемм 1.14 и 1.15 вытекает, что многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $f(m, p, q, t)$ для некоторого $t > 1$ и некоторых $1 \le p \le q \le m$. Далее, слово w_2 линейно, т.е. $w_2 \equiv x_{1\alpha} x_{2\alpha} \dots x_{m\alpha}$ для некоторой нетривиальной перестановки $\alpha \in S_m$. Таким образом, многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождествам

$$u = x_1 \dots x_m = x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^t x_{q+1} \dots x_m$$

и

$$x_{1\alpha} \dots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \dots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \dots x_{m\alpha} = x_{1\alpha} \dots x_{m\alpha} = v$$

а многообразие $\mathcal{Z}$ — тождеству $p_m[\alpha]$. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два подслучая.

Подслучай 2.1: множества $\{p, p+1, \dots, q\}$ и $\{p\alpha, (p+1)\alpha, \dots, q\alpha\}$ совпадают. Поскольку перестановка α нетривиальна, $l\alpha \ne l$ для некоторого $l \in \{1, \dots, m\}$. Положим

$$r = \min_{1 \le l \le m} \{l \mid l\alpha \ne l\} \text{ и } s = \max_{1 \le l \le m} \{l \mid l\alpha \ne l\}.$$

Ясно, что $r < s$. Если $r > q$ или $s < p$, то тождество

$$x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^t x_{q+1} \dots x_m = \ x_{1\alpha} \dots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \dots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \dots x_{m\alpha}$$

получается из тожества $p_m[\alpha]$ подстановкой слова $x_q(x_p \dots x_q)^{t-1}$ вместо буквы x_q. Поэтому в данном случае выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$ является последовательность слов

$$\begin{aligned}u &= x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^t x_{q+1} \dots x_m \\ &= x_{1\alpha} \dots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \dots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \dots x_{m\alpha} \\ &= v.\end{aligned}$$

Пусть теперь $r \le q$ и $s \ge p$. Обозначим через β ограничение перестановки α на множество $\{r, r+1, \dots, s\}$. В силу леммы 1.11 существует натуральное число M такое, что тождество

$$x_r x_{r+1} \dots x_s = x_{r\beta} x_{(r+1)\beta} \dots x_{s\beta} \tag{5}$$

влечет любое перестановочное тождество длины M, а значит, и любое перестановочное тождество длины N для любого $N > M$. Пусть h — произвольное натуральное число такое, что

$$h > \frac{M + p - q + r - s - 2}{q - p + 1} + 2$$

и $t_0 = h(t-1) + 1$. Ясно, что $t_0 > h$. Многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $f(m, p, q, t_0)$, а значит, и тождествам

$$\begin{aligned}
&u = x_1 \dots x_m = x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^{t_0} x_{q+1} \dots x_m, \\
&x_{1\alpha} \dots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \dots x_{q\alpha})^{t_0} x_{(q+1)\alpha} \dots x_{m\alpha} = x_{1\alpha} \dots x_{m\alpha} = v.
\end{aligned}$$

Рассмотрим тождество

$$x_r \dots x_q (x_p \dots x_q)^{t_0 - 2} x_p \dots x_s = x_{r\beta} \dots x_{q\beta}(x_{p\beta} \dots x_{q\beta})^{t_0-2} x_{p\beta} \dots x_{s\beta}. \tag{6}$$

Из условия $\{p, p+1, \dots, q\} = \{p\alpha, (p+1)\alpha, \dots, q\alpha\}$ вытекает, что это тождество уравновешено. Обозначим его длину через N. Имеем

$$\begin{aligned}
N &= q - r + 1 + s - p + 1 + (q - p + 1)(t_0 - 2) \\
&> q - r + s - p + 2 + (q - p + 1)(h - 2) \\
&> q - r + s - p + 2 + M + p - q + r - s - 2 = M,
\end{aligned}$$

т. е $N > M$. Поскольку тождество (6) уравновешено, оно вытекает из тождества $p_N[\xi]$ для некоторой перестановки $\xi \in S_N$. В силу неравенства $N > M$ тождество $p_N[\xi]$ вытекает из (5). Таким образом, тождество (6) вытекает из (5). Домножив все слова, входящие в вывод тождества (6) из (5), на $x_1 \dots x_{r-1}$ слева и на $x_{s+1} \dots x_m$ справа, получим вывод тождества

$$\begin{aligned}
&x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^{t_0} x_{q+1} \dots x_m \\
&\quad = x_{1\alpha} \dots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \dots x_{q\alpha})^{t_0} x_{(q+1)\alpha} \dots x_{m\alpha}
\end{aligned}$$

из тождества $p_m[\alpha]$. Следовательно, это тождество выполняется в многообразии $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. Значит, последовательность слов

$$\begin{aligned}
u &= x_1 \dots x_{p-1}(x_p \dots x_q)^{t_0} x_{q+1} \dots x_m \\
&= x_{1\alpha} \dots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \dots x_{q\alpha})^{t_0} x_{(q+1)\alpha} \dots x_{m\alpha} \\
&= v
\end{aligned}$$

является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$.

Подслучай 2.2: множества $\{p, p+1, \dots, q\}$ и $\{p\alpha, (p+1)\alpha, \dots, q\alpha\}$ различны. Они равномощны, значит, ни одно из них не содержится в другом. Следовательно, найдутся числа $r, s \in \{p, p+1, \dots, q\}$ такие, что

$$r \notin \{p\alpha, (p+1)\alpha, \dots, q\alpha\} \text{ и } s\alpha \notin \{p, p+1, \dots, q\}. \tag{7}$$

Для всякого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ положим:

$$a_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq r, \\ x_r \ldots x_q (x_p \ldots x_q)^{t-2} x_p \ldots x_r & \text{при } i = r; \end{cases}$$

$$b_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq s\alpha, \\ x_{s\alpha} \ldots x_{q\alpha} (x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha})^{t-2} x_{p\alpha} \ldots x_{s\alpha} & \text{при } i = s\alpha; \end{cases}$$

$$c_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq r, s\alpha, \\ x_r \ldots x_q (x_p \ldots x_q)^{t-2} x_p \ldots x_r & \text{при } i = r, \\ x_{s\alpha} \ldots x_{q\alpha} (x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha})^{t-2} x_{p\alpha} \ldots x_{s\alpha} & \text{при } i = s\alpha. \end{cases}$$

Отметим, что определение слова c_i корректно, поскольку из (7) вытекает, что $r \neq s\alpha$. Из (7) вытекает также, что

$$c_i \equiv \begin{cases} a_i & \text{при } i \neq s\alpha, \\ a_{s\alpha} \ldots a_{q\alpha} (a_{p\alpha} \ldots a_{q\alpha})^{t-2} & \text{при } i = s\alpha. \end{cases}$$

и

$$c_i \equiv \begin{cases} b_i & \text{при } i \neq r, \\ b_r \ldots b_q (b_p \ldots b_q)^{t-2} b_p \ldots b_r & \text{при } i = r. \end{cases}$$

Последовательность

$$\begin{aligned}
u &= x_1 \ldots x_{p-1} (x_p \ldots x_q)^t x_{q+1} \ldots x_m \\
&\equiv x_1 \ldots x_{p-1} x_p \ldots x_q (x_p \ldots x_q)^{t-2} x_p \ldots x_q x_{q+1} \ldots x_m \\
&\equiv x_1 \ldots x_{r-1} (x_r \ldots x_q (x_p \ldots x_q)^{t-2} x_p \ldots x_r) x_{r+1} \ldots x_m \\
&\equiv a_1 \ldots a_m \\
&= a_{1\alpha} \ldots a_{m\alpha} \\
&= a_{1\alpha} \ldots a_{(p-1)\alpha} (a_{p\alpha} \ldots a_{q\alpha})^t a_{(q+1)\alpha} \ldots a_{m\alpha} \\
&\equiv a_{1\alpha} \ldots a_{(p-1)\alpha} a_{p\alpha} \ldots a_{q\alpha} (a_{p\alpha} \ldots a_{q\alpha})^{t-2} a_{p\alpha} \ldots a_{q\alpha} a_{(q+1)\alpha} \ldots a_{m\alpha} \\
&\equiv c_{1\alpha} \ldots c_{m\alpha} \\
&= c_1 \ldots c_m \\
&\equiv b_1 \ldots b_{r-1} (b_r \ldots b_q (b_p \ldots b_q)^{t-2} b_p \ldots b_r) b_{r+1} \ldots b_m \\
&\equiv b_1 \ldots b_{p-1} b_p \ldots b_q (b_p \ldots b_q)^{t-2} b_p \ldots b_q b_{q+1} \ldots b_m \\
&\equiv b_1 \ldots b_{p-1} (b_p \ldots b_q)^t b_{q+1} \ldots b_m \\
&= b_1 \ldots b_m \\
&= b_{1\alpha} \ldots b_{m\alpha} \\
&\equiv x_{1\alpha} \ldots x_{(s-1)\alpha} (x_{s\alpha} \ldots x_{q\alpha} (x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha})^{t-2} x_{p\alpha} \ldots x_{s\alpha}) x_{(s+1)\alpha} \ldots x_{m\alpha} \\
&\equiv x_{1\alpha} \ldots x_{(p-1)\alpha} x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha} (x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha})^{t-2} x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha} x_{(q+1)\alpha} \ldots x_{m\alpha} \\
&\equiv x_{1\alpha} \ldots x_{(p-1)\alpha} (x_{p\alpha} \ldots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \ldots x_{m\alpha} \\
&= v
\end{aligned}$$

будет искомым выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$.

Случай 3: $k > 3$. Здесь, как и в случае 2, слово w_2 в выводе $w_0 = \cdots = w_k$ имеет вид $x_{1\alpha}x_{2\alpha}\ldots x_{m\alpha}$ для некоторой перестановки $\alpha \in S_m$ и в многообразии $\mathcal{Y}$ выполняется тождество вида

$$w_2 = x_{1\alpha}\ldots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha}\ldots x_{q\alpha})^t x_{(q-1)\alpha}\ldots x_{m\alpha}.$$

Обозначим правую часть последнего тождества через w_2'. Тогда последовательности

$$u = w_1 = w_2 = w_2' \text{ и } w_2' = w_2 = w_3 = \cdots = w_k \equiv v$$

являются выводами тождеств $u = w_2'$ и $w_2' = v$ соответственно из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Длина первого из этих выводов равна 3, а длина второго равна $k-1$. При этом в многообразии $\mathcal{V}$ выполняются тождества $u = w_2'$ и $w_2' = v$, поскольку $w_2' = 0$ в $\mathcal{V}$. По предположению индукции тождества $u = w_2'$ и $w_2' = v$ выполняются в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$, а значит, и тождество $u = v$ выполняется в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$.

Предложение 3.3, а с ним и теорема 3 доказаны. $\square$

§ 4. Решетка коммутативных многообразий

Данный параграф посвящен задачам 5–9. В пункте 4.1 исследуется задача 9, в пункте 4.2 — задача 5, в пункте 4.3 — задачи 6 и 7, в пункте 4.4 — задача 8.

Все соглашения, упомянутые в первом абзаце п. 1.5, считаются действующими на протяжении данного параграфа.

4.1. Модулярные элементы

Основным результатом данного пункта является следующее необходимое условие для модулярных многообразий.

Теорема 4. *Если коммутативное многообразие $\mathcal{V}$ модулярно в* **Com**, *то либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — коммутативное нильмногообразие, заданное в $\mathcal{COM}$ системой 0-приведенных и подстановочных тождеств.*

Доказательство. Предложение 3.2 и следствие 1.1 сводят доказательство теоремы к доказательству того, что любое коммутативное нильмногообразие может быть задано в $\mathcal{COM}$ системой 0-приведенных и подстановочных тождеств. Предположим, что коммутативное нильмногообразие $\mathcal{V}$ модулярно в **Com** и рассмотрим произвольное тождество $u = v$, выполненное в $\mathcal{V}$. Предположим, что тождества $u = 0$ и $v = 0$ не выполнены в $\mathcal{V}$. Нужно доказать, что тождество $u = v$ следует из тождества $xy = yx$ и некоторого подстановочного тождества, выполненного в $\mathcal{V}$.

Согласно лемме 1.18, существует многообразие $\mathcal{G}$ периодических групп такое, что

$$\mathcal{G} \vee \mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathrm{ZR}(\mathcal{V}).$$

Положим $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{xy = yx, u = 0\}$, $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{xy = yx, v = 0\}$ и $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \vee \mathcal{G}$. Многообразие $\mathcal{G}$ удовлетворяет тождеству $x^n y = y$ для некоторого n, а потому и тождеству $x^n u = u$. Это тождество также выполнено в $\mathcal{X}$, поэтому оно выполнено в $\mathcal{Z}$ и, следовательно, в $\mathcal{V} \wedge \mathcal{Z}$. Будучи нильмногообразием, $\mathcal{V} \wedge \mathcal{Z}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, согласно лемме 1.20. Тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{V}$, поэтому $u = v = 0$ выполняется в $\mathcal{V} \wedge \mathcal{Z}$, т. е.

$$\mathcal{V} \wedge \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{X}) \vee \mathcal{G} &\subseteq (\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{G}) = (\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{G}) \wedge \mathcal{Z} \\ &= (\mathcal{V} \vee \mathcal{G}) \wedge \mathcal{Z} = (\mathcal{V} \wedge \mathcal{Z}) \vee \mathcal{G} \subseteq \mathcal{Y} \vee \mathcal{G}.\end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{X}) \vee \mathcal{G} \subseteq \mathcal{Y} \vee \mathcal{G}$. Тождество $v = vx^n$ выполняется в $\mathcal{Y} \vee \mathcal{G}$, а потому и в $(\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{X}) \vee \mathcal{G}$, и в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{X}$. Поскольку $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{X}$ является нильмногообразием, оно удовлетворяет тождеству $v = 0$ по лемме 1.20. Следовательно, найдется вывод $w_0 = \cdots = w_k$ этого тождества из тождеств многообразий $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ и $\mathcal{X}$. Будем считать, что среди всех таких выводов выбран кратчайший. В частности, ни одно из многообразий $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$

и $\mathcal{X}$ не удовлетворяет тождеству $w_i = 0$ ни для какого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ и тождество $w_i = w_{i+1}$ не выполняется в обоих многообразиях $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ и $\mathcal{X}$ одновременно. Пусть $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Поскольку многообразия $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ и $\mathcal{X}$ являются 0-приведенными в $\mathcal{COM}$ и ни одно из этих многообразий не удовлетворяет тождеству $w_i = 0$, тождество $w_i = w_{i+1}$ выполняется в $\mathcal{COM}$, а потому и в обоих многообразиях $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ и $\mathcal{X}$, противоречие. Следовательно, $n = 0$. Тогда тождество $v = 0$ выполняется в одном из многообразий $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ и $\mathcal{X}$. Но это тождество нарушается в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$, поскольку оно нарушается в $\mathcal{V}$. Таким образом, $v = 0$ в $\mathcal{X}$. Аналогично, рассматривая многообразие $\mathcal{Y} \vee \mathcal{G}$ вместо $\mathcal{X} \vee \mathcal{G}$, можно доказать, что тождество $u = 0$ выполняется в $\mathcal{Y}$. Это означает, что $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, поэтому системы $\{xy = yx, u = 0\}$ и $\{xy = yx, v = 0\}$ эквивалентны. В силу леммы 1.23 слова u и v $\mathcal{COM}$-идентичны. Следовательно, найдется автоморфизм ξ такой, что тождество $u = \xi(v)$ выполняется в $\mathcal{COM}$ тождество $u = \xi(v)$ уравновешено и выполняется в $\mathcal{V}$. Тождество $v = \xi(v)$ выполняется в $\mathcal{V}$, поскольку тождества $u = v$ и $u = \xi(v)$ выполняются в $\mathcal{V}$. Если $c(v) \neq c(\xi(v))$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $v = 0$ по лемме 1.20. Но это не так, поэтому $c(v) = c(\xi(v))$. Следовательно, тождество $v = \xi(v)$ является подстановочным. будучи уравновешенным, тождество $u = \xi(v)$ вытекает из тождества $xy = yx$. Из тождеств $u = \xi(v)$ и $v = \xi(v)$ вытекает $u = v$. Следовательно, тождество $u = v$ вытекает из тождеств $v = \xi(v)$ и $xy = yx$. Поскольку тождество $v = \xi(v)$ подстановочно и выполняется в $\mathcal{V}$, утверждение доказано. $\square$

Таким образом, для модулярных в **Com** многообразий, как и для модулярных в **SEM**, имеется необходимое условие (теорема 4) и близкое к нему достаточное условие (предложение 1.2). Как и для модулярных в **SEM** многообразий, данное необходимое условие не является достаточным, а достаточное — не является необходимым. Иначе говоря, среди нильмногообразий, заданных в многообразии $\mathcal{COM}$ только 0-приведенными и подстановочными тождествами, но не только 0-приведенными, встречаются как модулярные так и не модулярные. Подтверждением этому служат следующие два предложения.

Предложение 4.1. *Многообразие*

$$\mathcal{V} = \mathrm{var}\{x^2y = y^2x, x^3 = xyzt = 0, xy = yx\}$$

модулярно в **Com**.

Доказательство. Убедимся, что

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y} = (\mathcal{V} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{X}$$

для любых коммутативных многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ таких, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Согласно следствию 1.1, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{X}$ и $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{Y}$. Если $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$, то, очевидно, $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y} = \mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{X} = \mathcal{V} \vee \mathcal{X}$.

Пусть теперь $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{Y}$. Это означает, что найдется тождество $u = v$, которое выполняется в $\mathcal{Y}$, но нарушается в $\mathcal{V}$. Тогда хотя бы одно из слов u и v не равно нулю в $\mathcal{V}$, не ограничивая общности — слово u. С точностью до переобозначения и перестановки букв, слова, не равные нулю в $\mathcal{V}$, исчерпываются словами x, xy и x^2y. Но если в $\mathcal{V}$ тождество $x = v$ нарушается, то слово v не однобуквенное, а потому $xvy = 0$ в $\mathcal{V}$. Тождество $x^2y = xvy$ вытекает из $x = v$, а потому выполняется в $\mathcal{Y}$, но нарушается в $\mathcal{V}$. Итак, случай $u \equiv x$ сводится к случаю, когда $u \equiv x^2y$, причем $v = 0$ в $\mathcal{V}$. Аналогичным образом сводится к нему и случай $u \equiv xy$. Поэтому далее можно считать, что $u \equiv x^2y$. Кроме того, можно считать, что $v = 0$ в $\mathcal{V}$, так как иначе $v \equiv xy$ или $v \equiv x$ и мы, поменяв слова u и v местами, приходим к уже разобранным случаям. Отметим, что, поскольку тождество $x^2y = v$ выполняется в $\mathcal{SL}$, слово v содержит только буквы x и y. Это тождество равносильно тождеству $y^2x = \sigma(v)$, где σ — перестановка, меняющая буквы x и y друг на друга. При этом тождества $v = 0 = \sigma(v)$ выполняются в $\mathcal{V}$.

Докажем, что если тождество $s = t$ выполняется в $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{X}$, то оно выполняется и в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y}$. Пусть $w_0 = \dots = w_k$ — вывод тождества $s = t$ из тождеств многообразий $\mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$. Предположим, что среди тождеств $w_i = w_{i+1}$ встречается тождество $x^2y = y^2x$. Заменим соответствующий фрагмент

$$\dots = x^2y = y^2x = \dots$$

этого вывода фрагментом

$$\dots = x^2y = v = \sigma(v) = y^2x = \dots$$

В результате получим новый вывод того же тождества, в котором тождество $x^2y = y^2x$ встречается на один раз меньше. Повторив эту процедуру сколько это необходимо, получим вывод тождества $s = t$ из тождеств многообразий $\mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$, не содержащий тождеств $x^2y = y^2x$. Тождество $x^2y = y^2x$ — единственное (с точностью до обозначения букв) тождество, которое выполняется в $\mathcal{V}$, но нарушается в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$. Следовательно, тождество $s = t$ выполняется в $(\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{X}$. Но многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$, будучи 0-приведенным, модулярно в **Com** по предложению 1.2, поэтому

$$(\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{X} = (\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y} \supseteq (\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y},$$

то есть тождество $s = t$ выполняется в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y}$. □

Предложение 4.2. *Многообразие, заданное в $\mathcal{COM}$ тождествами*

$$x^4y^3z^2t = y^4x^3z^2t, \quad x_1x_2 \dots x_{11} = 0$$

и всеми тождествами $w = 0$, где w — слово длины десять не более чем от трех букв, не является модулярным в **Com**.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие, заданное в $\mathcal{COM}$ тождествами $x^4y^3z^2t = y^4x^3z^2t$, $x_1x_2 \dots x_{11} = 0$ и всеми тождествами $w = 0$, где w — слово длины десять не более чем от трех букв. Положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathrm{var}\{x^4y^3z^2t = y^4x^3z^2t\} \wedge \mathcal{N};\\
\mathcal{X} &= \mathrm{var}\{x^4y^3z^2t = x^4z^3t^2y\} \wedge \mathcal{N};\\
\mathcal{Y} &= \mathrm{var}\{x^4y^3z^2t = x^4t^3z^2y = x^4y^3t^2z\} \wedge \mathcal{N};\\
\mathcal{Z} &= \mathrm{var}\{x^4y^3z^2t = y^4x^3z^2t = y^4z^3t^2x\} \wedge \mathcal{N}
\end{aligned}$$

(т. е. группы постановок на буквах x, y, z, t, отвечающие многообразиям $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, есть, соответственно, двухэлементная подгруппа, трехэлементная подгруппа, стабилизатор точки x в группе S_4 и вся группа S_4).

Непосредственные вычисления позволяют установить, что

$$\mathcal{V} \wedge \mathcal{X} = \mathcal{V} \wedge \mathcal{Y} = \mathcal{Z};$$
$$\mathcal{V} \vee \mathcal{X} = \mathcal{V} \vee \mathcal{Y} = \mathcal{N}.$$

Таким образом, многообразия $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{N}$ образуют “пентагон” в решетке **Com**, откуда, очевидно, вытекает немодулярнсть многообразия $\mathcal{V}$. $\square$

4.2. Нижнемодулярные элементы

Следующая теорема описывает нижнемодулярные в **Com** многообразия.

Теорема 5. *Коммутативное многообразие $\mathcal{V}$ нижнемодулярно в* **Com** *тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие.*

Предложение 3.2 сводит доказательство теоремы 5 к доказательству следующей леммы.

Лемма 4.1. *Коммутативное нильмногообразие нижнемодулярно в* **Com** *тогда и только тогда, когда оно является 0-приведенным в* **Com** *многообразием.*

Доказательство. Из предложения 1.2 следует, что в доказательстве нуждается лишь необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — нижнемодулярное в **Com** коммутативное нильмногообразие. Будучи нильмногообразием, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x^n = 0$ для некоторого n. Учитывая, что $\mathcal{A}_n \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) = \mathcal{T}$ и $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{V})$, и используя лемму 1.18, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = \mathcal{T} \vee \mathcal{V} &= (\mathcal{A}_n \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V})) \vee \mathcal{V} = (\mathcal{A}_n \vee \mathcal{V}) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \\ &= (\mathcal{A}_n \vee \mathrm{ZR}(\mathcal{V})) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) = \mathrm{ZR}(\mathcal{V}),\end{aligned}$$

а многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ является 0-приведенным в $\mathcal{COM}$ по определению. $\square$

Из теоремы 5, предложения 1.2 и следствия 1.1 вытекает

Следствие 4.1. *Всякое нижнемодулярное в* **Com** *многообразие модулярно в* **Com**. $\square$

Как и в “некоммутативном” случае, ни одно из остальных пяти возможных соотношений между элементами модулярных типов не выполняется. Например:

- многообразие $\mathrm{var}\{xyzt = x^3 = 0, x^2y = y^2x, xy = yx\}$ модулярно в **Com** по предложению 4.1, но не нижнемодулярно в **Com** по теореме 5;
- многообразие $\mathrm{var}\{x^3 = 0, xy = yx\}$ модулярно в **Com** и нижнемодулярно в **Com** по предложению 1.2, но не верхнемодулярно в **Com** в силу предложения 4.3 ниже;

- многообразие $\mathcal{A}_p$ верхнемодулярно, поскольку является атомом решетки **Com**, но не является ни модулярным, ни нижнемодулярным элементом этой решетки по предложению 3.2.

4.3. Дистрибутивные и стандартные элементы

Данный пункт посвящен решению задач 6 и 7. Следующая теорема является основным результатом пункта.

Теорема 6. *Для коммутативного многообразия $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *$\mathcal{V}$ дистрибутивно в* **Com***;*

(б) *$\mathcal{V}$ стандартно в* **Com***;*

(в) *либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие, в котором выполнены тождества*

$$x^3yz = x^2y^2z = 0 \tag{8}$$

и либо выполнены оба тождества

$$x^3y = 0,\ x^2y^2 = 0, \tag{9}$$

либо не выполнено ни одно из них.

Эквивалентность условий (а) и (б) непосредственно вытекает из следствия 4.1 и леммы 1.4. Остается доказать эквивалентность условий (а) и (в). Ключевую роль в доказательстве импликации (а)$\longrightarrow$(в) играет следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть u, v, w — такие слова, что $c(u) = c(v)$, $u \parallel v$, $u \not\succeq w$. Тогда любое коммутативное многообразие $\mathcal{V}$, дистрибутивное в* **Com** *и удовлетворяющее тождеству $u = w$, удовлетворяет также тождествам $u = v_1 = w$ для некоторого слова v_1 такого, что $v_1 \sim v$ и $c(v_1) = c(u)$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{u = v, xy = yx\}$ и $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{v = w, xy = yx\}$. Тождество $u = w$ вытекает из тождеств $u = v$ и $v = w$. Следовательно, оно выполнено в $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$, а значит, и в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно в **Com**, выполнено равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}),$$

и, значит, $u = w$ в многообразии $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$. Рассмотрим вывод $w_0 = \cdots = w_k$ тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Поскольку $u \parallel v$, найдется i такое, что $w_i \nsim u$. Пусть i — наименьший индекс с таким свойством. Для всякого $j \in \{1, \ldots, k\}$ тождество $w_{j-1} = w_j$ выполняется хотя бы в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Заметим, что тождества $w_{j-1} = w_j$ при $j = 1, \ldots, i$ не выполняются в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Действительно, предположим, что $w_{j-1} = w_j$ в $\mathcal{Y}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, i\}$. Тогда тождество $w_{j-1} = w_j$ вытекает из тождеств $v = w$ и $xy = yx$. В силу леммы 1.21 отсюда следует, что $v \le w_{j-1} \sim u$ или $w \le w_{j-1} \sim u$, что противоречит условиям $u \parallel v$ и $u \not\ge v$. Таким образом, тождества $w_0 = w_1 = \cdots = w_i$ выполнены в $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$, а значит, и в $\mathcal{X}$. Но тогда тождество $u = w_i$ должно вытекать из тождеств $u = v$ и $xy = yx$. Согласно лемме 1.22, отсюда следует, чтолибо $w_i \sim u$, либо $w_i \sim v$. Но $w_i \not\sim u$ в силу выбора i, и потому $w_i \sim v$. Поскольку $c(u) = c(v)$, из леммы 1.13 вытекает, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{X}$, откуда $c(u) = c(w_i)$. Поскольку тождество $u = w_i$ выполнено в $\mathcal{V}$, слово $v_1 \equiv w_i$ является искомым. □

Доказательство импликации а)$\longrightarrow$в). В рассуждениях мы будем постоянно пользоваться тем очевидным фактом, что если слова u и v имеют одинаковую длину и зависят от одних и тех же букв, то они либо эквивалентны, либо несравнимы. Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное в **Com** многообразие, отличное от многообразия $\mathcal{COM}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com**, теорема 5 влечет, что $\mathcal{V} = \mathcal{N}$ либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие. В силу следствия 1.1, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{V} = \mathcal{N}$. Далее, существует натуральное $n \ge 2$ такое, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$, а значит, и тождествам $x^{n+1}yz = x^n y^2 z = 0$. Если $n = 2$, мы получаем тождества (8). Пусть теперь $n \ge 3$. Слова $x^{n+1}yz$, $x^n y^2 z$ и $x^{n-1}y^2z^2$ имеют длину $n+3$ и зависят от трех букв. Отсюда следует, что эти слова попарно неэквивалентны и потому попарно несравнимы. Применяя лемму 4.2 при $u \equiv x^{n+1}yz$, $w \equiv x^n y^2 z$ и $v \equiv x^{n-1}y^2z^2$, получаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^{n-1}y^2z^2 = 0$. Слова $x^{n-1}y^2z^2$ и $x^n yz$ также несравнимы: $x^{n-1}y^2z^2 \not\ge x^n yz$, так как $\ell(x^n yz) < \ell(x^{n-1}y^2z^2)$, а $x^n yz \not\le x^{n-1}y^2z^2$, так как слово $x^{n-1}y^2z^2$ не содержит букв кратности $\ge n$, а любое слово вида $a\zeta(x^n yz)b$ содержит хотя бы одну такую букву. Применяя лемму 4.2 при $u \equiv x^{n-1}y^2z^2$, $w \equiv x^{n+1}yz$ и $v \equiv x^n yz$, получаем, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^n yz = 0$. Слова $x^n yz$ и $x^{n-1}y^2z$ имеют длину $n+2$ и зависят от трех букв. Следовательно, они неэквивалентны и потому несравнимы. Применив лемму 4.2 при $u \equiv x^n yz$, $v \equiv x^{n-1}y^2z$ и $w \equiv x^{n-1}y^2z^2$, мы получим, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^{n-1}y^2z = 0$. Продолжая аналогичные рассуждения, мы заключаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам $x^{n-k+1}y^2z^2 = x^{n-k}y^2z = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-2$. При $k = n-2$ эти тождества совпадают с тождествами (8). Приравнивая в тождестве $x^3zy = 0$ переменные x и z, получим $x^4y = 0$. Чтобы получить, что $\mathcal{N}$ либо удовлетворяет каждому из тождеств (9), либо не удовлетворяет ни одному из них, остается еще раз применить лемму (4.2): если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^3y = 0$, мы полагаем $u \equiv x^3y$, $v \equiv x^2y^2$ и $w \equiv x^4y$; если же $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^2y^2 = 0$, то нужно положить $u \equiv x^2y^2$, $v \equiv x^3y$ и $w \equiv x^4y$. □

Для доказательства обратной импликации будет нужна следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть многообразие коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам* (8) *и либо удовлетворяет обоим тождествам* (9), *либо не удовлетворяет ни одному из них. Если в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $v = 0$ и не выполнено тождество $u = 0$, причем $c(u) = c(v)$, то $u \le v$.*

Доказательство. Дальнейшие рассуждения основаны на следующих трех очевидных наблюдениях.

(а) В каждом классе эквивалентных слов имеется единственное слово вида $x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \ldots x_m^{\ell_m}$, где $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_m$.

(б) Для нелинейного слова w найдется слово s такое, что $c(s) = c(w)$, $\ell(s) = \ell(w) - 1$ и $s \leq w$: слово s можно получить, например, удалив в w одно (любое) вхождение любой кратной буквы. Следовательно, для любого $k = |c(w)|, |(c(w))| + 1, \ldots, \ell(w)$ найдется слово s такое, что $c(s) = c(w)$, $\ell(s) = k$ и $s \leq w$.

(в) Если $w_1 \leq w_2$, то тождество $w_2 = 0$ вытекает из тождеств $w_1 = 0$ и $xy = yx$.

Из (а) следует, что каждое слово длины 5 от двух букв эквивалентно одному из слов $x^4 y$ и $x^3 y^2$, а каждое слово длины $m+4$ от $m+2$ букв (для произвольного натурального m) — одному из слов $x^3 y z_1 \ldots z_m$ и $x^2 y^2 z_1 \ldots z_m$. По условию леммы многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $x^3 yz = x^2 y^2 z = 0$, из которых вытекают тождества $x^4 y = x^3 y^2 = 0$ и $x^3 y z_1 \ldots z_m = x^2 y^2 z_1 \ldots z_m = 0$, а следовательно, согласно (б) и (в), и все тождества вида $w = 0$, где w — слово длины ≥ 5 от одной или двух букв или слово длины $\geq m+4$ от $m+2$ букв. Согласно (а), каждое слово длины ≤ 4 от одной или двух букв или длины $\leq m+3$ от $m+2$ букв эквивалентно одному из слов

$$x, x^2, x^3, x^4, xy, x^2 y, x^3 y, x^2 y^2, xyz_1 \ldots z_m, x^2 y z_1 \ldots z_m. \tag{10}$$

В частности, одному из этих слов эквивалентно слово u. Отметим следующий факт: (г) если w — любое из слов (10), кроме $x^3 y$ и $x^2 y^2$, то w эквивалентно любому слову w' такому, что $\ell(w') = \ell(w)$ и $c(w') = c(w)$.

Пусть w_1 — одно из слов (10), а w_2 — любое слово такое, что $\ell(w_2) > \ell(w_1)$ и $c(w_2) = c(w_1)$. Покажем, что $w_1 \leq w_2$. Если w_1 не совпадает ни с одним из слов $x^3 y$ и $x^2 y^2$, то это следует из (б) и (г). Пусть w_1 — одно из слов $x^3 y$ и $x^2 y^2$. Согласно (б) можно считать, что $\ell(w_2) = \ell(w_1) + 1 = 5$. Тогда, согласно (а), w_2 эквивалентно одному из слов $x^4 y$ и $x^3 y^2$. Но $x^3 y^2$ содержит подслова $x^3 y$ и $x^2 y^2$, а $x^4 y$ содержит подслово $x^4 \equiv \zeta(x^3 y) = \zeta(x^2 y^2)$, где $\zeta(x) \equiv \zeta(y) \equiv x$, так что в любом случае $w_1 \leq w_2$. Таким образом, остается доказать, что $\ell(u) < \ell(v)$. Если $\ell(v) < \ell(u)$, то $v \leq u$ и тождество $u = 0$ вытекает из $v = 0$ в силу (в). Следовательно, $\ell(u) \leq \ell(v)$. Предположим, что $\ell(u) = \ell(v)$. Если u не эквивалентно ни одному из слов $x^3 y$ и $x^2 y^2$, то из равенств $\ell(u) = \ell(v)$ и $c(u) = c(v)$ вытекает, что $u \sim v$. Но тогда тождество $u = 0$ выполнено в $\mathcal{V}$. Наконец, если u эквивалентно одному из слов $x^3 y$ и $x^2 y^2$, то из равенств $\ell(u) = \ell(v)$ и $c(u) = c(v)$ вытекает, что v также эквивалентно одному из этих слов. Тогда из условия леммы следует, что $u = 0$ в $\mathcal{V}$. Итак, равенство $\ell(v) = \ell(u)$ невозможно. Следовательно, $\ell(u) < \ell(v)$. $\square$

Доказательство импликации а)$\longrightarrow$б). Нужно доказать, что для любых коммутативных многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ выполнено равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}).$$

В силу следствия 1.1 можно считать, что $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{SL}$ и (в обозначениях теоремы 6) $\mathcal{V} = \mathcal{N}$. Случай, когда $\mathcal{X} = \mathcal{COM}$ или $\mathcal{Y} = \mathcal{COM}$ очевиден, поэтому далее будем считать, что $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \neq \mathcal{COM}$.

Поскольку включение $\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \subseteq (\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$ очевидно, требуется доказать, что $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$, т. е что произвольное тождество $u = v$, выполненное в многообразии $\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$, выполнено и в многообразии $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$. Поскольку многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$ коммутативно, можно считать, что тождество $u = v$ не является уравновешенным. Так как многообразие $\mathcal{V}$ является 0-приведенным в $\mathcal{COM}$ и удовлетворяет тождеству $u = v$, оно должно удовлетворять также тождествам $u = 0$ и $v = 0$. Кроме того, тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$. Рассмотрим вывод $w_0 = w_1 = \cdots = w_k$ этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Для всякого $i = 1, \ldots, k$ тождество $w_{i-1} = w_i$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Поскольку каждое из этих многообразий содержит $\mathcal{SL}$, из леммы 1.13 вытекает, что $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $w_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$, то $w_0 = \cdots = w_k$ является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$, и потому все доказано. Пусть теперь тождество $w_i = 0$ не выполнено в $\mathcal{V}$ для некоторого i, причем i — минимальный индекс с таким свойством. Тождество $u = w_{i-1}$ выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$, так как последовательность слов $w_0 = w_1 = \cdots = w_{i-1}$ является выводом этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Таким образом, остается проверить, что многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$ удовлетворяет тождеству $w_{i-1} = v$. Отметим, что последовательность $w_{i-1} = w_i = \cdots = v$ является выводом тождества $w_{i-1} = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Это позволяет далее считать, что $i = 1$, т. е. что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $w_1 = 0$. Аналогичными рассуждениями можно свести доказательство к случаю, когда тождество $w_{k-1} = 0$ не выполнено в $\mathcal{V}$.

Из того, что $\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \neq \mathcal{COM}$, вытекает, что и $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \neq \mathcal{COM}$. В силу леммы 1.16, $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{M}$ порождено моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Остается убедиться в том, что тождество $u = v$ выполняется в каждом из многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Поскольку тождество $u = 0$ выполнено в $\mathcal{V}$, а тождество $w_1 = 0$ — нет, из леммы 1.20 вытекает, что $w_1 \leq u$, т. е. найдется уравновешенное тождество вида $u = a\zeta(w_1)b$ для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторой подстановки ζ. Тождество $u = w_1$, а значит, и тождество $a\zeta(w_1)b = w_1$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Не ограничивая общности, предположим, что оно выполнено в $\mathcal{X}$. Тогда тождество $a\zeta(w_1)b = a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$ также выполнено в $\mathcal{X}$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $a\zeta(w_1)b = 0$, а потому и тождествам $a\zeta(a\zeta(w_1)b)b = 0$ и $a\zeta(w_1)b = a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$. Итак, тождество $a\zeta(w_1)b = a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$. Следовательно, оно выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$, а значит, и в $\mathcal{N}$. При этом $w_1 \not\preceq a\zeta(w_1)b$ (поскольку тождество $a\zeta(w_1)b = 0$ выполнено в $\mathcal{V}$, а тождество $w_1 = 0$ — нет), откуда $a\zeta(w_1)b \not\preceq a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$. В силу леммы 1.20, многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$. Аналогичным образом можно установить, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $v = 0$, а значит, и тождеству $u = v$.

Остается показать, что тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{M}$. Многообразие

$\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^3yz = 0$, а значит, и тождеству $x^5 = 0$. Пусть буква x не входит в запись слов $w_0, w_1, \ldots, w_k$. Тождество $ux^5 = vx^5$ выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$: его выводом из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ будет последовательность $w_0x^5 = w_1x^5 = \cdots = w_kx^5$. Следовательно, тождество $ux^5 = vx^5$ выполняется в $\mathcal{M}$. Подставляя в это тождество 1 вместо x, получаем, что тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{M}$. Мы доказали, что многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно в **Com**. □

4.4. Нейтральные элементы

Нейтральные в **Com** многообразия описываются следующей теоремой.

Теорема 7. *Для многообразия коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ нейтрально в* **Com**;

б) *$\mathcal{V}$ верхнемодулярно и нижнемодулярно в* **Com**;

в) *либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству*

$$x^2y = 0.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение, представляющее и определенный самостоятельный интерес.

Предложение 4.3. *Всякое 0-приведенное верхнемодулярное в* **Com** *коммутативное многообразие удовлетворяет тождеству $x^2y = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие коммутативных полугрупп, верхнемодулярное в **Com**, а $\mathcal{W}$ — собственное подмногообразие многообразие многообразия $\mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{V}$ — 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие, содержащее $\mathcal{W}$, оно содержит также многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{W})$. Будучи нильмногообразием, $\mathcal{V}$ удовлетворяет $x^n = 0$ для некоторого n. Учитывая, что $\mathcal{A}_n \wedge \mathcal{V} = \mathcal{T}$ и $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{V}$, и используя лемму 1.18, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{W} \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) &= (\mathcal{A}_n \vee \mathrm{ZR}(\mathcal{W})) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) = (\mathcal{A}_n \vee \mathcal{W}) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) \\ &\subseteq (\mathcal{A}_n \vee \mathcal{W}) \wedge \mathcal{V} = (\mathcal{A}_n \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{W} = \mathcal{T} \vee \mathcal{W} = \mathcal{W}.\end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{W} = \mathrm{ZR}(\mathcal{W})$. Следовательно, $\mathcal{W}$ — 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие.

Мы показали, что любое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$ является 0-приведенным в $\mathcal{COM}$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{x^2y = xy^2, x^3 = xyzt = 0, xy = yx\}$. Оно не является 0-приведенным в $\mathcal{COM}$. Следовательно, $\mathcal{X} \nsubseteq \mathcal{W}$, и потому найдется тождество $w = 0$, выполненное в $\mathcal{V}$, но не выполненное в $\mathcal{X}$. Слово w с точностью до переобозначения букв является одним из следующих: x, x^2, xy, x^2y, xyx, yx^2, xyz (в противном случае $w = 0$ в $\mathcal{X}$). Следовательно, тождества $w = 0$ и $xy = yx$ влекут тождество $x^2y = 0$, поэтому многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет этому тождеству. □

Доказательство теоремы 7. Импликация а)$\longrightarrow$б) очевидна. Импликация б)$\longrightarrow$в) непосредственно вытекает из теоремы 5, предложения 4.3 и следствия 1.1.

Доказательство импликации в)$\longrightarrow$а). Положим $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\{x^2y = 0, xy = yx\}$. По следствию 1.1 достаточно убедиться в том, что если $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$, то многообразие $\mathcal{N}$ нейтрально в $\mathcal{COM}$. Легко понять, что всякое собственное подмногообразие многообразия $\mathcal{Z}$ задается внутри него либо тождеством

$$x^2 = 0, \tag{11}$$

либо тождеством

$$x_1x_2 \dots x_n = 0 \tag{12}$$

для некоторого n, либо совокупностью этих двух тождеств. Следовательно, многообразие $\mathcal{N}$ является 0-приведенным в $\mathcal{COM}$. В силу теоремы 6, многообразие $\mathcal{N}$ стандартно в **Com**. Согласно лемме 1.5, остается показать, что оно кодистрибутивно в **Com**. Иными словами, надо проверить, что если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — произвольные коммутативные многообразия, то

$$\mathcal{N} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) = (\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}) \vee (\mathcal{N} \wedge \mathcal{Y}).$$

Положим $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{N} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})$ и $\mathcal{Z}_2 = (\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}) \vee (\mathcal{N} \wedge \mathcal{Y})$. Ясно, что $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$. Поэтому достаточно установить, что каждое из тождеств (11) и (12) либо выполнено в каждом из многообразий $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$, либо не выполнено ни в одном из них. Поскольку $\mathcal{Z}_2 \subseteq \mathcal{Z}_1$, в действительности достаточно проверить, что каждое из тождеств (11) и (12) выполнено в $\mathcal{Z}_1$, если оно выпонено в $\mathcal{Z}_2$.

Предположим, что в $\mathcal{Z}_2$ выполнено тождество (11). В частности, оно выполнено в многообразии $\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}$. Следовательно, существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{N}$ и $\mathcal{X}$, и потому одно из этих многообразий удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $x^2 = w$. Если это тождество выполнено в $\mathcal{N}$, то в силу леммы 1.20 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (11). Предположим теперь, что $x^2 = w$ в $\mathcal{X}$. Если $c(w) = \{x\}$, то в $\mathcal{X}$ выполнено тождество

$$x^2 = x^m \tag{13}$$

для некоторого $m \neq 2$. Если $c(w) \neq \{x\}$ и $\ell(w) \neq 2$, то приравнивая в $x^2 = w$ все буквы к x, мы вновь получаем, что в $\mathcal{X}$ выполнено тождество (13) для некоторого $m \neq 2$. Наконец, если $c(w) \neq \{x\}$, и $\ell(w) = 2$, т. е. w совпадает с одним из слов xy и yx, то мы получим тот же результат, подставив x^2 вместо y в $x^2 = w$.

Итак, либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (11), либо $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству (13) для некоторого $m \neq 2$. Аналогично проверяется, что либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (11), либо $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству (13) для некоторого $m \neq 2$. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (11), то это тождество выполнено в $\mathcal{Z}_1$. Предположим теперь, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $x^2 = x^{m_1}$, а $\mathcal{Y}$ — тождеству $x^2 = x^{m_2}$ для некоторых $m_1, m_2 \neq 2$. Тогда найдется такое $m \neq 2$, что тождество (13) выполнено в $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$. Следовательно, оно выполнено и в $\mathcal{Z}_1$. Учитывая лемму 1.20, мы получаем, что и в этом случае $\mathcal{Z}_1$ удовлетворяет тождеству (11).

Предположим теперь, что в $\mathcal{Z}_2$ выполнено тождество (12). В частности, оно выполнено в многообразии $\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}$. Пусть $u \equiv w_0 = \cdots = w_k \equiv v$ — кратчайший вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{N}$ и $\mathcal{X}$. Тогда одно из этих многообразий удовлетворяет тождеству $x_1x_2\ldots x_n = w_1$. Если $c(w_1) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\ell(w_1) = n$, то тождество $x_1x_2\ldots x_n = w_1$ вытекает из тождества коммутативности. Но тогда оно выполнено и в $\mathcal{N}$, и в $\mathcal{X}$, и вывод $w_0 = \cdots = w_k$ можно сократить вопреки его выбору. Поэтому далее можно считать, что либо $c(w_1) \neq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, либо $\ell(w_1) \neq n$. Если тождество $u = w_1$ выполнено в многообразии $\mathcal{N}$, то из леммы 1.14 следует, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (12). Предположим теперь, что тождество $x_1x_2\ldots x_n = w_1$ выполнено в $\mathcal{X}$. В силу леммы 1.14 всякое нильподмногообразие многообразия $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству (12). Из коммутативности многообразия $\mathcal{X}$ и теоремы 2 работы [17] вытекает, что в этом случае $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству

$$x_1x_2\ldots x_n = (x_1x_2\ldots x_n)^{r+1} \tag{14}$$

для некоторого натурального r.

Итак, либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (12), либо $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству (14) для некоторoо натурального r. Аналогично проверяется, что либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (12), либо $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству (14) для некоторого r. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (12), то это тождество выполнено в $\mathcal{Z}_1$. Предположим теперь, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству

$$x_1x_2\ldots x_n = (x_1x_2\ldots x_n)^{r_1+1},$$

а $\mathcal{Y}$ — тождеству

$$x_1x_2\ldots x_n = (x_1x_2\ldots x_n)^{r_2+1}$$

для некоторых r_1, r_2. Тогда в $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ выполнено тождество (14) при $r = r_1r_2 + 1$. Следовательно, это тождество выполнено и в $\mathcal{Z}_1$. В этом случае, очевидно, $\mathcal{Z}_1$ удовлетворяет тождеству (12). Теорема доказана. $\square$

Отметим, что и в решетке **SEM**, как и в **Com**, каждый элемент, нижнемодулярный и верхнемодулярный одновременно, нейтрален [42]. Также интересно сравнить теорему 7 с описанием коммутативных модулярных в **SEM** многообразий, полученным в [41]. Из этого результата и теоремы 7 вытекает, что для коммутативных многообразий нейтральность в **Com** эквивалентна модулярности в **SEM**.

§ 5. Решетка надкоммутативных многообразий

Данный параграф состоит из двух пунктов. В пункте 5.1 решены задачи 10 и 11, в пункте 5.2 решена задача 12.

5.1. Тождества и квазитождества

Напомним, что решетки называются [*квази*]*эквационально эквивалентными*, если они удовлетворяют одним и тем же [квази]тождествам. Положим $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{xyzt = xytz, x^2y^2 = y^2x^2 = (xy)^2\}$. Многообразие, двойственное к $\mathcal{X}$, обозначим через $\overleftarrow{\mathcal{X}}$. Следующая теорема является основным результатом данного пункта.

Теорема 8. *Для надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет некоторому нетривиальному решеточному тождеству;*

(б) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет некоторому нетривиальному решеточному квазитождеству;*

(в) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ эквационально эквивалентна конечной решетке;*

(г) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ квазиэквационально эквивалентна конечной решетке;*

(д) *многообразие $\mathcal{V}$ перестановочно и не содержит подмногообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{X}$ и $\overleftarrow{\mathcal{X}}$.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем несколько лемм. Прежде всего нам понадобится лемма, дающая решение проблемы равенства слов в многообразии $\mathcal{X}$.

Лемма 5.1. *Тождество $u = v$ выполняется в многообразии $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда это тождество уравновешено и имеет место хотя бы одно из следующих условий:*

(1) *$u \equiv v$;*

(2) *слова u, v имеют одинаковые первые буквы и одинаковые вторые буквы;*

(3) *слова u, v имеют одинаковые первые буквы и их вторые буквы — кратные;*

(4) *первые и вторые буквы в словах u, v — кратные.*

Доказательство. Обозначим через α конгруэнцию $\sim_{\mathcal{X}}$ и через β — множество уравновешенных тождеств (рассматриваемых как пары слов), удовлетворяющих одному из условий (1)–(4). Нужно доказать, что $\alpha = \beta$.

Вначале докажем, что $\alpha \subseteq \beta$. Тождество $xyzt = xytz$ удовлетворяет условию (2), а тождества $x^2y^2 = y^2x^2 = (xy)^2$ — условию (4), поэтому все эти тождества принадлежат множеству β. Непосредственная проверка позволяет установить, что β является вполне инвариантной конгруэнцией на F. Отсюда вытекает требуемое включение.

Остается проверить, что $\beta \subseteq \alpha$. Докажем, что уравновешенное тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{X}$ в каждом из случаев (1)–(4). Случай (1) очевиден. Тождество $xyzt = xytz$ влечет любое тождество вида

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n = x_1x_2x_{3\alpha} \ldots x_{n\alpha},$$

где α — любая перестановка множества $\{3, \ldots, n\}$. Отождествляя и переобозначая буквы в последнем тождестве, можно получить любое уравновешенное тождество со свойством (2). В дальнейшем будем предполагать, что тождество $u = v$ имеет вид $xya = ztb$, где x, y, z, t — буквы, не обязательно различные. Рассмотрим случай (4). Предположим, что $x \equiv z \equiv t$ и $x \not\equiv y$, то есть $u \equiv xya$ и $v \equiv x^2b$. Поскольку буква y кратна, найдутся уравновешенные тождества $xya = (xy)^2c$ и $x^2b = x^2y^2c$ для некоторого слова c. Эти тождества удовлетворяют (2), поэтому они выполняются в $\mathcal{X}$. Следовательно, тождества

$$xya = (xy)^2c = x^2y^2c = x^2b$$

выполняются в $\mathcal{X}$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, если $y \equiv z \equiv t$ и $x \not\equiv y$ (в этом случае вместо тождества $(xy)^2 = x^2y^2$ следует использовать тождество $(xy)^2 = y^2x^2$). Следовательно, в общем случае многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождествам

$$xya = x^2c = xtd = t^2e = ztb$$

для любых слов c, d и e, таких, что эти тождества уравновешены. Очевидно, что такие слова c, d и e существуют, поэтому в случае (4) утверждение доказано. В случае (3) тождество $u = v$ есть $xya = xtb$, где буквы y и t — кратные. Можно считать, что буква x проста, поскольку иначе выполняется свойство (4). В частности, $x \not\equiv y$ и $x \not\equiv t$. Многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет любым уравновешенным тождествам вида $xya = xy^2c$ и $xtb = xt^2d$, поскольку случай (2) уже рассмотрен. Далее, $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $y^2c = t^2d$ (случай (4)), а потому и тождествам

$$xya = xy^2c = xt^2d = xtb,$$

что и требовалось. □

Две следующие леммы устанавливают некоторые эквациональные свойства многообразий, удовлетворяющих условию (д) теоремы 8.

Лемма 5.2. *Любое надкоммутативное перестановочное многообразие, не содержащее $\mathcal{LZ}$, удовлетворяет тождествам*

$$x^ny^nz^n = y^nx^nz^n \tag{15}$$

для всех достаточно больших натуральных n.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие, удовлетворяющее условию леммы. Будучи перестановочным, многообразие $\mathcal{V}$ по лемме 1.12 удовлетворяет тождеству

$$x_1 \dots x_k yz t_1 \dots t_k = x_1 \dots x_k zy t_1 \dots t_k \tag{16}$$

для некоторого k. Поскольку $\mathcal{LZ} \nsubseteq \mathcal{V}$, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xa = yb$, где x и y — различные буквы. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ надкоммутативно, это тождество уравновешено. Можно считать, что слова a и b содержат только буквы x и y: в противном случае можно отождествить с x все остальные буквы в этих словах. Пусть $n \geq k + \ell(a) = k + \ell(b)$. Докажем, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем тождествам вида $cz^n = dz^n$, где c и d содержат только буквы x и y и $\ell_x(c) = \ell_y(c) = \ell_x(d) = \ell_y(d) = n$. Пусть e — наибольший общий префикс слов c и d. Не ограничивая общности, можно считать, что $c \equiv exc'$ и $d \equiv eyd'$ для некоторых слов c' и d'. Если $\ell(e) \geq k$, то тождество $cz^n \equiv exc'z^n = eyd'z^n \equiv dz^n$ вытекает из (16), а потому выполняется в $\mathcal{V}$. Пусть теперь $0 \leq \ell(e) \leq k$. То, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $cz^n = dz^n$ будем доказывать обратной индукцией по $\ell(e)$. В качестве базы индукции возьмем уже рассмотренный случай $\ell(e) = k$. Теперь докажем утверждение для $\ell(e) < k$, предполагая, что оно уже доказано для всех значений $\ell(e)$, бóльших рассматриваемого. Положим $p = \ell_x(e) + \ell_x(b)$ и $q = \ell_y(b) + \ell_y(a)$. Неравенство $n \geq k + \ell(a) = k + \ell(b)$ влечет $n > p$ и $n > q$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} cz^n \equiv exc'z^n &= exax^{n-p}y^{n-q}z^n && \text{по предположению индукции} \\ &= eybx^{n-p}y^{n-q}z^n && \text{поскольку } xa = yb \\ &= eyd'z^n \equiv dz^n && \text{по предположению индукции,} \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 5.3. *Любое надкоммутативное перестановочное многообразие $\mathcal{V}$, такое, что $\mathcal{LZ}, \mathcal{X} \nsubseteq \mathcal{V}$, удовлетворяет тождествам*

$$xtx^{n-1}y^nz^n = yty^{n-1}x^nz^n \tag{17}$$

для всех достаточно больших n.

Доказательство. Будучи перестановочным, многообразие $\mathcal{V}$ по лемме 1.12 удовлетворяет тождеству (16) для некоторого k. Согласно лемме 5.2, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству

$$x^my^mz^m = y^mx^mz^m \tag{18}$$

для некоторого $m \geq k$. Наконец, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому уравновешенному тождеству $u = v$, которое нарушается в $\mathcal{X}$. Согласно лемме 5.1, это возможно в четырех случаях.

Случай 1. Первые буквы в словах u и v одинаковы, вторые буквы различны, и хотя бы в одном из этих слов вторая буква проста. Приравнивая в тождестве $u = v$ между собой все буквы, кроме этой простой буквы, получим тождество

$$xyx^{p+q-1} = x^{p+1}yx^{q-1} \tag{19}$$

для некоторых p и q. Последнее тождество влечет тождества

$$xyx^{pr+q-1} = x^{pr+1}yx^{q-1}$$

для всех натуральных r. Это наблюдение позволяет предполагать, что $p \geq k$. Возьмем натуральное n, большее, чем $m+k$ и $p+q$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
xtx^{n-1}y^nz^n &= x^{p+1}tx^{n-p-1}y^nz^n && \text{в силу (19)}\\
&= x^my^mz^mtx^{n-m}y^{n-m}z^{n-m} && \text{в силу (16)}\\
&= y^mx^mz^mtx^{n-m}y^{n-m}z^{n-m} && \text{в силу (18)}\\
&= y^{p+1}ty^{n-p-1}x^nz^n && \text{в силу (16)}\\
&= yty^{n-1}x^nz^n && \text{в силу (19).}
\end{aligned}$$

Случай 2. Первые буквы в словах u и v различны и хотя бы одна из них проста. Приравнивая между собой все буквы в тождестве $u = v$, кроме этой простой буквы, получим тождество $yx^{p+q} = x^pyx^q$ для некоторого положительного p и неотрицательного q. Это тождество влечет $xyx^{p+q} = x^{p+1}yx^q$, поэтому данный случай сводится к случаю 1.

Случай 3. Вторые буквы в словах u и v одинаковы и просты, а первые буквы различны и кратны. Запишем тождество $u = v$ в виде $xtu' = ytv'$. Можно считать, что слова u' и v' содержат лишь буквы x и y, поскольку все остальные буквы можно приравнять к x. Пусть $p = \ell_x(v')$ и $q = \ell_y(u')$. Возьмем натуральное n, большее, чем $k+p$, q и $k+m$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
xtx^{n-1}y^nz^n &= xtx^ku'x^{n-k-p}y^{n-q}z^n && \text{в силу (16)}\\
&= ytx^kv'x^{n-k-p}y^{n-q}z^n && \text{в силу } u=v\\
&= ytx^my^mz^mx^{n-m}y^{n-m-1}z^{n-m} && \text{в силу (16)}\\
&= yty^mx^mz^mx^{n-m}y^{n-m-1}z^{n-m} && \text{в силу (18)}\\
&= yty^{n-1}x^nz^n && \text{в силу (16).}
\end{aligned}$$

Случай 4. Первые буквы в u и v различны и кратны, вторые буквы различны, и хотя бы одна из вторых букв проста. Отождествив первые буквы в словах u и v, мы придем к случаю 1. □

Доказательство теоремы 8. Доказательство будем вести по схеме

$$(а) \longrightarrow (б) \longrightarrow (д) \longrightarrow (г) \longrightarrow (в) \longrightarrow (а).$$

Импликации (а)⟶(б) и (г)⟶(в) очевидны. Импликация (в)⟶(а) следует из того факта, что любое нетривиальное решеточное тождество нарушается в некоторой конечной решетке (см., например, [13], лемма V.3.2). Остается проверить импликации (б)⟶(д)⟶(г).

Доказательство импликации (б)⟶(д). Рассуждая от противного, допустим, что свойство (д) нарушается. Докажем, что тогда любая конечная решетка может быть вложена в одну из решеток $\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))$. Тогда из следствия 1.2 вытекает, что любая конечная решетка является гомоморфным образом подрешетки решетки $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$. Поскольку любое нетривиальное решеточное квазитождество нарушается в некоторой конечной решетке, это даст нам требуемое противоречие. Нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. Многообразие $\mathcal{V}$ не перестановочно. Рассмотрим разбиение $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ единиц}})$. Для этого разбиения имеем $G_\lambda = S_n$. Соответствующее G_λ-множество W_λ регулярно (т. е. группа G_λ действует транзитивно и никакой ее неединичный элемент не имеет в W_λ неподвижных точек). В этом случае $\mathrm{Con}(W_\lambda) \simeq \mathrm{Sub}(G_\lambda) = \mathrm{Sub}(S_n)$, где $\mathrm{Sub}(G)$ обозначает решетку подгрупп группы G. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ не перестановочно, конгруэнция $\varphi_\lambda(\mathcal{V})$ есть отношение равенства на W_λ, поэтому $W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}) = W_\lambda$. Мы получили, что $\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V})) \simeq \mathrm{Sub}(S_n)$. Каждая конечная решетка может быть вложена в решетку $\mathrm{Sub}(S_n)$ для некоторого n, поэтому утверждение доказано.

Случай 2. Многообразие $\mathcal{V}$ содержит одно из подмногообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. Не ограничивая общности, предположим, что $\mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{V}$. Рассмотрим разбиение $\lambda = (m, m-1, \dots, 2, 1)$ для произвольного $m \geq 2$. Группа G_λ тривиальна, поэтому $\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V})) = \mathrm{Part}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))$. Поскольку $\mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{V}$, многообразие $\mathcal{V}$ не удовлетворяет никакому тождеству $u = v$, где первые буквы в словах u и v различны. В частности, $(x_i a, x_j b) \notin \varphi_\lambda(\mathcal{V})$, если $x_i a, x_j b \in W_\lambda$ и $i \neq j$. Следовательно, множество $W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V})$ содержит хотя бы m элементов. Любая конечная решетка может быть вложена в любую достаточно большую решетку разбиений, а потому может быть вложена в одну из решеток $\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))$.

Случай 3. Многообразие $\mathcal{V}$ содержит одно из подмногообразий $\mathcal{X}$ и $\overleftarrow{\mathcal{X}}$. Не ограничивая общности, положим, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$. Рассмотрим то же разбиение λ, что и в случае 2. Снова получаем $\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V})) = \mathrm{Part}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))$. Поскольку $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$, по лемме 5.1 многообразие $\mathcal{V}$ не удовлетворяет никакому тождеству $u = v$, где первые буквы в словах u и v различны и вторая буква в u проста. В частности, $(x_i x_m a, x_j x_m b) \notin \varphi_\lambda(\mathcal{V})$, если $x_i x_m a, x_j x_m b \in W_\lambda$ и $i \neq j$. Следовательно, множество $W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V})$ содержит не менее, чем $m - 1$ элементов, откуда, как и в случае 2, вытекает требуемое утверждение.

Доказательство импликации (д)$\longrightarrow$(г). Пусть $\mathcal{V}$ — надкоммутативное многообразие, удовлетворяющее условию (д). Рассмотрим подпрямое разложение решетки $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$, имеющееся по следствию 1.2. Мы докажем, что мощности подпрямых сомножителей $\overline{\mathrm{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))}$ ограничены. Отсюда будет следовать, что среди этих сомножителей существует лишь конечное число неизоморфных решеток. Решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ квазиэквационально эквивалентна прямому произведению этих различных сомножителей, поскольку квазитождества сохраняются при взятии подрешеток и прямых произведений. Таким образом, импликация будет доказана.

Зафиксируем разбиение λ. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет (16) для некоторого k, согласно лемме 1.12. Можно считать, что λ — разбиение числа, большего, чем $2k+1$. Действительно, существует лишь конечное число разбиений чисел, не больших $2k + 1$, поэтому такие разбиения не влияют на существование верхней оценки для $|\operatorname{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))|$. Согласно лемме 5.3 и двойственному ей утверждению, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (17) и двойственному тождеству для некоторого n. Рассмотрим множество I всех целых $i \in \{1, \dots, n+2k-1\}$ таких, что хотя бы $4k$ компонент разбиения λ равны i. Для каждого $i \in I$ зафиксируем множество букв Y_i такое, что $Y_i = 4k$ и $\lambda_j = i$ для $j \in Y_i$. Это означает, что $\ell_x(w) = i$, если $x \in Y_i$ и $w \in W_\lambda$. Каждое слово $w \in W_\lambda$ может быть записано в виде $w \equiv abc$, где $\ell(a) = \ell(c) = k$. Будем обозначать слова a, b и c через $L(w)$, $M(w)$ и $R(w)$ соответственно. Заметим, что $(w_1, w_2) \in \varphi_\lambda(\mathcal{V})$, если $w_1, w_2 \in W_\lambda$, $\ell(w_1) = \ell(w_2)$ и $R(w_1) = R(w_2)$. Рассмотрим следующие два ограничения на слово $w \in W_\lambda$:

(i) В словах $L(w)$ и $R(w)$ нет букв x таких, что $\ell_x(w) \geq n + 2k$ и $x \not\equiv x_1$, $x \not\equiv x_2$ (напомним, что $\ell_1(w) \geq \ell_2(w) \geq \ell_x(w)$ для любой буквы $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, поэтому данное свойство тривиальным образом выполняется если $\ell_2(w) \leq n + 2k$);

(ii) в словах $L(w)$ и $R(w)$ нет буквы x, для которой $\ell_x(w) = i \in I$ и $x \notin Y_i$.

Докажем, что для любого $w \in W_\lambda$ найдется $w' \in W_\lambda$ со свойством (i) и такое, что $w = w'$ в $\mathcal{V}$. Это означает, что каждый $\varphi_\lambda(\mathcal{V})$-класс содержит слово со свойством (i). Рассмотрим любое вхождение в $L(w)$ буквы x такой, что $\ell_x(w) > n + 2k$, $x \not\equiv x_1$ и $x \not\equiv x_2$. Найдутся слова d и e, для которых $L(w) \equiv dxe$. Поскольку $\ell_1(w) \geq \ell_2(w) \geq \ell_x(w) \geq n + 2k$, имеем

$$\ell_x(M(w)), \ell_1(M(w)), \ell_2(M(w)) \geq 2k.$$

Следовательно, найдется уравновешенное тождество вида

$$M(w) = x^{n-1} x_1^n x_2^n f$$

для некоторого слова f. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} w &\equiv L(w)M(w)R(w) \\ &\equiv dxeM(w)R(w) \\ &= dxex^{n-1}x_1^n x_2^n fR(w) && \text{в силу (16)} \\ &= dx_1ex_1^{n-1}x^n x_2^n fR(w) && \text{в силу (15), если } e \text{ пусто, и в силу (17) иначе.} \end{aligned}$$

Слово $w'' \equiv dx_1ex_1^{n-1}x^n x_2^n fR(w)$ таково, что $L(w'') \equiv dx_1e$, $R(w'') \equiv R(w)$ и $(w, w'') \in \varphi_\lambda(\mathcal{V})$. Мы исключили одно вхождение буквы x в $L(w)$. Повторяя эту процедуру, можно исключить все вхождения в $L(w)$ букв x таких, что $\ell_x(w) > n + 2k$, кроме x_1 и x_2. Двойственным образом можно исключить все вхождения таких букв в $R(w)$.

Теперь мы докажем, что каждое тождество $u = v$ такое, что $u, v \in W_\lambda$ эквивалентно тождеству $u' = v'$, где u' и v' удовлетворяют условию (ii). Поскольку

$$\ell(L(u)) + \ell(L(v)) + \ell(R(u)) + \ell(R(v)) = 4k,$$

слова $L(u)$, $L(v)$, $R(u)$ и $R(v)$ содержат не больше, чем $4k$ различных букв. Следовательно, для $i \in \{1, \dots, n+2k-1\}$ они содержат не более, чем $4k$ различных букв x, таких, что $\ell_x(u) = i$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G_\lambda$, который для всех $i \in \{1, \dots, n+2k-1\}$ отображает все буквы x в словах $L(u)$, $L(v)$, $R(u)$ и $R(v)$, такие, что $\ell_x(w) = i$, в буквы из множества Y_i. Тождество $u' = v'$ можно получить, взяв $u' \equiv g(u)$ и $v' \equiv g(v)$.

Комбинируя утверждения в двух предыдущих абзацах, заключаем, что каждое тождество $u = v$, где $u, v \in W_\lambda$, эквивалентно в многообразии $\mathcal{V}$ некоторому тождеству $u' = v'$, где слова u' и v' удовлетворяют условиям (i) и (ii). Это утверждение можно переформулировать в терминах конгруэнций G-множеств. Для этого обозначим через A множество $\varphi_\lambda(\mathcal{V})$-классов всех слов в W_λ, удовлетворяющих условиям (i) и (ii). Мы доказали, что каждая конгруэнция на $W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V})$ порождается некоторым подмножеством $A \times A$. Далее, $\varphi_\lambda(\mathcal{V})$-класс слова w определяется словами $L(w)$ и $R(w)$ и не зависит от $M(w)$. Условия (i) и (ii) означают, что все вместе взятые слова $L(w)$ и $R(w)$ для всех таких w могут содержать не более, чем $4k(2n+k-1)+2$ различных букв: не более, чем $4k$ букв x, таких, что $\ell_x(w) = i$ для всех $i \in \{1, \dots, 2n+k-1\}$, и не более двух букв x, таких, что $\ell_x(w) \geq 2n+k$. Отсюда $|A| \leq N$, где $N = (4k(2n+k-1)+2)^{2k}$. Следовательно,

$$|\operatorname{Con}(W_\lambda/\varphi_\lambda(\mathcal{V}))| \leq 2^{|A \times A|} \leq 2^{N^2}.$$

Эта верхняя оценка не зависит от разбиения λ. $\square$

5.2. Специальные элементы

Через $\mathcal{S}_\lambda$ обозначим многообразие, заданное всеми уравновешенными тождествами, имеющими тип, не меньший λ. Из леммы 1.25 следует, что многообразие $\mathcal{S}_\lambda$ не удовлетворяет никаким другим нетривиальным тождествам.

Следующая теорема дает решение задачи 12.

Теорема 9. *Для произвольного надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно в* $\mathbf{OC}$*;*

(2) *многообразие $\mathcal{V}$ кодистрибутивно в* $\mathbf{OC}$*;*

(3) *многообразие $\mathcal{V}$ стандартно в* $\mathbf{OC}$*;*

(4) *многообразие $\mathcal{V}$ костандартно в* $\mathbf{OC}$*;*

(5) *многообразие $\mathcal{V}$ нейтрально в* $\mathbf{OC}$*;*

(6) $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{S}_{\lambda_n}$ *для некоторого конечного набора разбиений* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$.

Будем говорить, что многообразие $\mathcal{V}$ *сжимает* трансверсаль W_λ, если оно удовлетворяет некоторому тождеству типа λ, и *склеивает* трансверсаль W_λ, если оно удовлетворяет всем таким тождествам. Надкоммутативное многообразие называется *жадным*, если оно склеивает любую трансверсаль, которую оно сжимает. Ясно, что жадные многообразия образуют подрешетку решетки **OC**. Основной (корректно доказанный) результат работы [2] заключается в следующем предложении.

Предложение 5.1. *Для произвольного надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно в* **OC**;

(2) *многообразие $\mathcal{V}$ кодистрибутивно в* **OC**;

(3) *многообразие $\mathcal{V}$ стандартно в* **OC**;

(4) *многообразие $\mathcal{V}$ костандартно в* **OC**;

(5) *многообразие $\mathcal{V}$ нейтрально в* **OC**;

(6) *многообразие $\mathcal{V}$ является жадным.* □

Доказательство теоремы 9. В силу предложения 5.1, достаточно доказать эквивалентность условий (6) этого предложения и теоремы 9. Многообразия вида $\mathcal{S}_\lambda$, очевидно, являются жадными, а потому жадными являются и их пересечения. Обратно, пусть $\mathcal{V}$ — жадное многообразие. Если оно удовлетворяет нетривиальному (уравновешенному) тождеству $u = v$, то оно удовлетворяет и некоторому нетривиальному тождеству $s = t$, где разбиение $\mathrm{type}(s = t)$ получается из $\mathrm{type}(u = v)$ применением любой из элементарных операций 1) и 2). В случае операции 1) тождество $s = t$ можно получить, домножив тождество $u = v$ слева или справа на букву, не входящую в это тождество, а в случае операции 2) — отождествив в нем две буквы. Из этого наблюдения вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ сжимает все трансверсали W_μ, где $\lambda \le \mu$, а потому и схлопывает их. Таким образом, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}_\lambda$. Это означает, что многообразие $\mathcal{V}$ является пересечением всех многообразий $\mathcal{S}_\lambda$, содержащих $\mathcal{V}$. Ясно, что из неравенства $\lambda_1 \le \lambda_2$ вытекает включение $\mathcal{S}_{\lambda_1} \subseteq \mathcal{S}_{\lambda_2}$. Из этого наблюдения и условия обрыва убывающих цепей в множестве Λ вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ является пересечением всех минимальных многообразий $\mathcal{S}_\lambda$, содержащих $\mathcal{V}$. Эти многообразия, а потому и соответствующие разбиения λ, несравнимы. Следовательно, их число конечно по лемме 1.24. □

В связи с теоремой 9 естественным образом возникает вопрос о поиске возможно более простого базиса тождеств для многообразий $\mathcal{S}_\lambda$, в частности о конечной базируемости этих многообразий. Чтобы дать ответ на него, введем еще некоторые обозначения. Через λ^k обозначим разбиение, получаемое из λ добавлением k новых единичных компонент. Определим числовые характеристики $q(\lambda)$, $r(\lambda)$ как число всех единичных компонент и сумму всех неединичных компонент разбиения λ соответственно. Характеристику $s(\lambda)$ разбиения λ определим следующим образом:

$$s(\lambda) = \max\{r(\lambda) - q(\lambda) - \delta, 0\},$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda = (2, 1), \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через $\mathcal{W}_\lambda$ будем обозначать многообразие, заданное всеми тождествами, обе части которых принадлежат трансверсали W_λ. Следующее предложение показывает, что любое многообразие $\mathcal{S}_\lambda$ (а потому, по теореме 9, и любое многообразие, являющееся нейтральным элементом решетки **OC**) конечно базируемо.

Предложение 5.2. *Для любого* $\lambda \in \Lambda$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{S}_\lambda = \bigwedge_{k=0}^{s(\lambda)} \mathcal{W}_{\lambda^k}.$$

Ясно, что $\mathcal{S}_\lambda = \bigwedge_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_{\lambda^k}$, поскольку любое тождество, имеющее тип μ, где $\mu \geq \lambda$ может быть получено из некоторого тождества, имеющего тип λ^k для подходящего k, отождествлением некоторых букв. Это наблюдение сводит доказательство предложения 5.2 к доказательству следующей леммы.

Лемма 5.4. *Если* λ *— разбиение числа* n *на* m *частей и* $s(\lambda) = 0$*, то* $\mathcal{W}_\lambda \subseteq \mathcal{W}_{\lambda^k}$ *для любого натурального* k*.*

Доказательство. Из определения числа $s(\lambda)$ непосредственно следует, что если $s(\lambda) = 0$, то $s(\lambda^k) = 0$ для любого натурального k. Из этого наблюдения следует, что достаточно рассмотреть случай $k = 1$.

Прежде всего отметим, что $\lambda \neq (2,1)$, поскольку иначе $s(\lambda) = 1$. Для краткости положим $q = q(\lambda)$, $r = r(\lambda)$, $s = s(\lambda)$ и $t = m - q$. Поскольку $\lambda \neq (2,1)$, имеем $\delta = 1$ и, следовательно, $s = \max\{r - q - 1, 0\}$. Теперь из равенства $s = 0$ следует, что $r - q - 1 \leq 0$, т. е.

$$r \leq q + 1. \tag{20}$$

Предположим, что $q \leq 1$. Тогда $r \leq 2$. Пусть $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$. Из определения числа $r(\lambda)$ и неравенства $r \leq 2$ следует, что либо $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_m = 1$, либо $\ell_1 = 2$ и $\ell_2 = \cdots = \ell_m = 1$. Поскольку $\lambda \neq (2,1)$, отсюда следует, что $q \geq 2$, что противоречит неравенству $q \leq 1$. Следовательно, $q \geq 2$. Отсюда следует, что каждое слово из трансверсали W_{λ^1} содержит хотя бы три простые буквы.

Нужно проверить, что любое тождество вида $u = v$, где $u, v \in W_{\lambda^1}$, выполняется в W_λ. Достаточно убедиться, что если $u \in W_{\lambda^1}$, то многообразие W_λ удовлетворяет тождеству

$$u = x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \ldots x_t^{\ell_t} x_{t+1} \ldots x_{m+1}. \tag{21}$$

В дальнейшем слова "простая буква" будут означать "простая в u буква". Отметим, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) слово u оканчивается простой буквой;

2) слово u начинается с простой буквы;

3) слово u содержит подслово $x_i x_j$, где x_i и x_j — простые буквы.

Действительно, если все три условия нарушаются, то

$$u \equiv w_1 y_1 w_2 y_2 \dots w_{q+1} y_{q+1} w_{q+2},$$

где $y_1, y_2, \dots, y_{q+1}$ — простые буквы, а $w_1, w_2, \dots, w_{q+2}$ — непустые слова, не содержащие простых букв. Тогда $r = \ell(w) = \sum_{i=1}^{q+2}(\ell(w_i)) \geq q+2$, что противоречит неравенству (20).

Теперь рассмотрим три случая, соответствующие условиям 1)–3).

Случай 1: $u \equiv wx_i$ для некоторого слова w и некоторой простой буквы x_i. Тождество

$$w = x_1^{\ell_1} \dots x_t^{\ell_t} x_{t+1} \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{m+1}$$

имеет тип λ, а потому выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Умножая это тождество справа на x_i, получаем тождество

$$u = x_1^{\ell_1} \dots x_t^{\ell_t} x_{t+1} \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{m+1} x_i, \tag{22}$$

которое также выполнено в $\mathcal{W}_\lambda$. Если $i = m+1$, то тождество (22) совпадает с (21) и утверждение доказано. Пусть теперь $i \leq m$. Положим

$$j = \begin{cases} m-1, & \text{если } i = m, \\ m & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку u содержит хотя бы три простые буквы, буква x_j проста. Тождество (22) имеет вид

$$u = ax_j x_{m+1} x_i$$

для некоторого $a \in F^1$. Пусть x_p — любая буква, не входящая в u. Тождество

$$ax_p x_i = ax_i x_p \tag{23}$$

имеет тип λ, поэтому оно выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Подставляя $x_j x_{m+1}$ вместо x_p в (23), получаем тождество

$$ax_j x_{m+1} x_i = ax_i x_j x_{m+1}, \tag{24}$$

которое выполнено в $\mathcal{W}_\lambda$. Тождество

$$ax_i x_j = x_1^{\ell_1} \dots x_t^{\ell_t} x_{t+1} \dots x_m$$

имеет тип λ, поэтому оно также выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Умножая последнее на x_{m+1} справа, получим тождество

$$ax_i x_j x_{m+1} = x_1^{\ell_1} \dots x_t^{\ell_t} x_{t+1} \dots x_{m+1}, \tag{25}$$

также выполненное в $\mathcal{W}_\lambda$. Из тождеств (22), (24) и (25) вытекает тождество (21).

Случай 2: $u \equiv x_i w$ для некоторой простой буквы x_i и некоторого слова w. Слово u содержит не менее трех простых букв. Следовательно, в слове w найдется простая буква x_j. Таким образом, $w \equiv ax_j b$ для некоторых $a, b \in F^1$. Тождество

$$ax_j b = abx_j$$

имеет тип λ, поэтому оно выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Умножая последнее тождество на x_i слева, получим тождество $u = x_i abx_j$, которое также выполнено в $\mathcal{W}_\lambda$. Доказательство сведено к случаю 1.

Случай 3: $u \equiv ax_ix_jb$ для некоторых $a, b \in F^1$ и некоторых простых букв x_i и x_j. Пусть x_p — буква, не входящая в u. Тождество

$$ax_pb = abx_p$$

имеет тип λ, поэтому оно выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Подставляя x_ix_j вместо x_p в последнее тождество, мы получаем тождество $u = abx_ix_j$, которое выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Доказательство сведено к случаю 1. $\square$

Чтобы завершить исследование базисов тождеств многообразий $\mathcal{S}_\lambda$, докажем, что число $s(\lambda)$ в формулировке предложения 5.2 не может быть уменьшено. Положим $\mathcal{S}_\lambda^k = \bigwedge_{i=0}^k \mathcal{W}_{\lambda^i}$.

Предложение 5.3. *Пусть λ — разбиение, $s(\lambda) > 0$ и $0 \le k < s(\lambda)$. Тогда многообразие $\mathcal{S}_\lambda^k$ не склеивает трансверсали $W_{\lambda^{k+1}}, W_{\lambda^{k+2}}, \dots, W_{\lambda^{s(\lambda)}}$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{k+1, \dots, s(\lambda)\}$. Предположим, что $\mathcal{S}_\lambda^k$ склеивает трансверсаль W_{λ^i}. Дальнейшие рассуждения распадаются на два случая.

Случай 1: $\lambda \ne (2,1)$. Из определения числа $s(\lambda)$ и неравенства $s(\lambda) > 0$ следует, что $s(\lambda) = r(\lambda) - q(\lambda) - 1$. Поскольку $s(\lambda) \ge i$, имеем $r(\lambda) - q(\lambda) - 1 \ge i$. Очевидно, что из неравенств $r(\lambda^i) = r(\lambda)$ и $q(\lambda^i) = q(\lambda) + i$ следует, что $r(\lambda^i) \ge q(\lambda^i) + 1$. Следовательно, трансверсаль W_{λ^i} содержит слово u вида

$$u \equiv w_1y_1w_2y_2 \dots w_{q+i}y_{q+i}w_{q+i+1},$$

где $y_1, y_2, \dots, y_{q+i}$ — буквы, простые в u, а $w_1, w_2, \dots, w_{q+i+1}$ — непустые слова, не содержащие букв, простых в u. Пусть $v \in W_{\lambda^i}$ и $v \not\equiv u$. Поскольку $\mathcal{S}_\lambda^k$ склеивает W_{λ^i}, тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{S}_\lambda^k$. Следовательно, это тождество вытекает из системы

$$\Sigma = \{g = h \mid g, h \in W_{\lambda^j} \text{ для некоторого } j \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Пусть $w_0 = w_1 = \dots = w_\ell$ — вывод тождества $u = v$ из Σ. Имеем $w_0 \equiv u \equiv a\zeta(s)b$ и $w_1 \equiv a\zeta(t)b$ для некоторой подстановки ζ, некоторых $a, b \in F^1$ и некоторых $s, t \in W_{\lambda^j}$, где $j \in \{0, \dots, k\}$. Далее,

$$r(\mathrm{type}(s)) = r(\lambda^j) = r(\lambda^i) = r(\mathrm{type}(u)) = r(\mathrm{type}(a\zeta(s)b)). \tag{26}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$r(\mathrm{type}(s)) \le r(\mathrm{type}(\zeta(s))) \le r(\mathrm{type}(a\zeta(s)b)). \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует, что

$$r(\mathrm{type}(s)) = r(\mathrm{type}(\zeta(s))) = r(\mathrm{type}(a\zeta(s)b)).$$

Отсюда следует, что подслово $\zeta(s)$ слова $a\zeta(s)b$ содержит все вхождения букв, кратных в $a\zeta(s)b$, поэтому все буквы в словах a и b просты в u. Но слово $a\zeta(s)b \equiv u$ начинается и оканчивается кратными в u буквами. Следовательно, слова a и b пусты, то есть $u \equiv \zeta(s)$. Если существует кратная в s буква x такая, что $\ell(\zeta(x)) > 1$ или простая в s буква y такая, что слово $\zeta(y)$ содержит кратную в u букву, то $r(\mathrm{type}(\zeta(s))) > r(\mathrm{type}(s))$, что противоречит (27). Следовательно, ζ переводит каждую кратную в s букву в букву и переводит каждую простую в s букву в слово, состоящее из простых в u букв. Если y — простая в s буква, то $\zeta(y)$ является подсловом в u. Но u не содержит подслов, состоящих из простых букв, кроме подслов длины 1, то есть букв. Следовательно, ζ переводит простую в s букву в простую в $\zeta(s) \equiv u$ букву. Получаем, что $\ell(u) = \ell(\zeta(s)) = \ell(s)$. Но $\ell(s) = n + j$ и $\ell(u) = n + i$, где $n = n(\lambda)$. Следовательно, $j = i$. Но это невозможно, поскольку $i \geq k + 1$ и $j \leq k$.

Случай 2: $\lambda = (2, 1)$. В этом случае $r(\lambda) = 2$, $q(\lambda) = 1$ и $\delta = 0$, откуда $s(\lambda) = 1$. Следовательно, $k = 0$ и $i = 1$. Это означает, что $\mathcal{S}^k_\lambda = \mathcal{W}_\lambda$ и $\lambda^i = (2, 1, 1)$. Пусть $u \equiv x^2yz$ и $v \equiv x^2zy$. Предположим, что тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{W}_\lambda$. Тогда оно вытекает из системы тождеств

$$\Sigma = \{x^2y = xyx = yx^2\}.$$

Рассмотрим вывод $w_0 = \cdots = w_\ell$ тождества $u = v$ из Σ. Существуют числа $j \in \{0, \ldots, \ell\}$, для которых первое вхождение z в слово w_j предшествует первому вхождению y в это же слово. Пусть j — наименьшее число с таким свойством. Очевидно, что $j > 0$. Имеют место включения:

$$w_{j-1} \in \{x^2yz, xyxz, xyzx, yx^2z, yxzx, yzx^2\}, \tag{28}$$

$$w_j \in \{x^2zy, xzxy, xzyx, zx^2y, zxyx, zyx^2\}. \tag{29}$$

Далее, $w_{j-1} \equiv a\zeta(s)b$ и $w_j \equiv a\zeta(t)b$ для некоторого гомоморфизма ζ на F, некоторых $a, b \in F^1$ и некоторых $s, t \in \{x^2y, xyx, yx^2\}$. Повторяя дословно рассуждения из случая 1, можно получить, что $r(\mathrm{type}(w_{j-1})) = r(\mathrm{type}(w_j)) = 2$ и вывести из этих равенств, что x не входит в a и b, $\zeta(x)$ — буква и $\zeta(y) \in \{y, z, yz, zy\}$. Буква $\zeta(x)$ является кратной в w_{j-1}. В силу (29) имеем $\zeta(x) \equiv x$.

Если $\zeta(y) \equiv yz$, то слово w_j содержит подслово yz, что противоречит (29). Аналогично, если $\zeta(y) \equiv zy$, то слово w_{j-1} содержит подслово zy, что противоречит (28).

Теперь предположим, что $\zeta(y) \equiv y$. Тогда $\zeta(s) \equiv s$ и $\zeta(t) \equiv t$. Поскольку $\zeta(s)$ является подсловом в w_{j-1}, это означает, что одно из слов x^2y, xyx и yx^2 является подсловом в w_{j-1}. В силу (28), это означает, что w_{j-1} совпадает с одним из слов x^2yz, $xyxz$ и yx^2z. Следовательно, слово a пусто и $w_j \equiv \zeta(t)b \equiv tb$. Поскольку z не входит в t, имеем, что первое вхождение буквы y в w_j предшествует первому вхождению буквы z в w_j. Но это противоречит выбору числа j.

Наконец, пусть $\zeta(y) \equiv z$. Тогда $\zeta(s) \in \{x^2z, xzx, xz^2\}$, откуда w_{j-1} совпадает с одним из слов ax^2zb, $axzxb$ и azx^2b. В силу (28) это означает, что $w_{j-1} \in \{yx^2z, yxzx, yzx^2\}$. Следовательно, $a \equiv y$. Тогда слово w_j начинается с буквы y. Как и в предыдущем абзаце, имеем, что первое вхождение буквы

y в w_j предшествует первому вхождению буквы z в w_j, что противоречит выбору j.

Мы доказали, что многообразие $\mathcal{S}_\lambda^k$ не удовлетворяет тождеству $x^2yz = x^2zy$. Поскольку $\mathrm{type}(x^2yz = x^2zy) = (2,1,1) = \lambda^i$, получаем, что $\mathcal{S}_\lambda^k$ не склеивает трансверсаль W_{λ^i}. $\square$

Предложение 5.3 можно усилить, доказав, что множество многообразий $\{\mathcal{W}_{\lambda^0}, \dots, \mathcal{W}_{\lambda^k}\}$ является наименьшим по включению множеством Γ многообразий вида $\mathcal{W}_\mu$, для которого выполняется равенство

$$\mathcal{S}_\lambda = \bigwedge_{\mu\in\Gamma} \mathcal{W}_\mu. \tag{30}$$

Следствие 5.1. *Если равенство* (30) *выполняется для некоторого множества разбиений* Γ*, то* $\lambda^k \in \Gamma$ *для всех* $k \in \{0, 1, \dots, s(\lambda)\}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda^k \notin \Gamma$ для некоторого числа $k \in \{0, 1, \dots, s(\lambda)\}$. Пусть $u, v \in W_{\lambda^k}$. Из определения многообразия $\mathcal{S}_\lambda$ следует, что тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{S}_\lambda$. Следовательно, это тождество вытекает из системы тождеств

$$\Sigma = \{g = h \mid g, h \in W_\mu \text{ для некоторого } \mu \in \Gamma\}.$$

Пусть $w_0 = \cdots = w_\ell$ — вывод тождества $u = v$ из Σ. Пусть $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$. Тождество $w_i = w_{i+1}$ непосредственно вытекает из некоторого тождества вида $s = t$, где $s, t \in W_\mu$ для некоторого $\mu \in \Gamma$. Тождество $s = t$ выполняется в многообразии $\mathcal{S}_\mu$. Следовательно, $u = v$ также выполняется в $\mathcal{S}_\mu$. Тогда из леммы 1.25 вытекает, что $\mu \le \mathrm{type}(u = v) = \lambda^k$. Далее, тождество $s = t$ выполняется в $\mathcal{S}_\lambda$, поскольку $\mathcal{S}_\lambda \subseteq \mathcal{W}_\lambda$. Вновь применив лемму 1.25, получаем $\lambda \le \mu$. Следовательно, μ может быть получено из λ^j, а λ^k может быть получено из μ^q применением операции соединения компонент для некоторых неотрицательных целых j и k. В частности, $m(\mu) \le m(\lambda^j)$ и $m(\lambda^k) \le m(\mu^q)$.

Пусть $n(\lambda) = n$. Имеем $n(\mu) = n + j$ а $n(\lambda^k)$ равно одновременно $n + k$ (что очевидно) и $n + j + q$ (поскольку $n(\lambda^k) = n(\mu) + q$). Следовательно, $k = j + q$, откуда $q = k - j$. Тогда $m(\mu) \le m(\lambda^j) = m(\lambda) + j$ и $m(\lambda) + k = m(\lambda^k) \le m(\mu^{k-j}) = m(\mu) + k - j$. Отсюда $m(\mu) = m(\lambda^j)$. При этом $n(\mu) = n(\lambda^j)$, откуда $\mu = \lambda^j$. Мы видим, что $\lambda^j = \mu \le \lambda^k$, откуда $j \le k$. Но $j \ne k$, поскольку $\lambda^k \notin \Gamma$, когда $\lambda^j = \mu \in \Gamma$. Отсюда $j < k$. Вместе с тем, из равенства $\mu = \lambda^j$ вытекает, что тождество $w_i = w_{i+1}$ выполняется в многообразии W_{λ^j}. Поскольку $j \le k - 1$, имеем $\mathcal{S}_\lambda^{k-1} \subseteq \mathcal{W}_{\lambda^j}$. Следовательно, тождество $w_i = w_{i+1}$ выполняется в $\mathcal{S}_\lambda^{k-1}$. Это верно для всех $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$, поэтому тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{S}_\lambda^{k-1}$. Это верно для всех $u, v \in W_{\lambda^k}$. Следовательно, многообразие $\mathcal{S}_\lambda^{k-1}$ склеивает трансверсаль W_{λ^k}, что противоречит предложению 5.3. $\square$

Список литературы

[1] А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута. *О решетке многообразий полугрупп* // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46.

[2] Б. М. Верников. *Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп* // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 5. – С. 670–678.

[3] Б. М. Верников. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2002. – № 22. (Матем., механ. – Вып. 4.) – С. 16–42.

[4] Б. М. Верников. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II // Фундамент. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – № 7. – С. 43–51.

[5] Б. М. Верников. *Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 7. – С. 13–21.

[6] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1988. – С. 53–65.

[7] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2004. – № 30. (Матем., механ. – Вып. 6.) – С. 5–36.

[8] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 6. – С. 51–60.

[9] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* II // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 7. – С. 3–8.

[10] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* III // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 8. – С. 21–29.

[11] М. В. Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2002. – № 22. (Матем., механ. – Вып. 4.) – С. 43–61.

[12] Э. А. Голубов, М. В. Сапир. *Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1982. – № 11. – С. 21–29.

[13] Г. Гретцер. *Общая теория решеток.* – М.: Мир, 1982.

[14] И. А. Михайлова. *Шаблоны, избегаемые антицепями слов, и их алгебраические приложения* // Екатеринбург: Урал. гос. ун-т. – 2010. – Деп. в ВИНИТИ 01.07.2010. № 687-В2010. – 46 с.

[15] И. А. Михайлова. *Шаблоны, избегаемые антицепями слов, и их алгебраические приложения.* – Дисс. …канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург: Урал. гос. ун-т. – 2011.

[16] М. В. Сапир, Е. В. Суханов. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1981. – № 4. – С. 48–55.

[17] А. В. Тищенко. *Замечание о полугрупповых многообразиях конечного индекса* // Изв. вузов. Матем. – 1990. – № 7. – С. 79–83.

[18] Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 3. – С. 3–36.

[19] Л. Н. Шеврин, М. В. Волков. *Тождества полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 11. – С. 3–47.

[20] Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 6. – С. 3–39.

[21] S. Burris, E. Nelson. *Embedding the dual of* Π_∞ *in the lattice of equational classes of semigroups* // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1. – № 2 – P. 248–254.

[22] S. Burris, E. Nelson. *Embedding the dual of* Π_m *in the lattice of equational classes of commutative semigroups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – № 2. – P. 37–39.

[23] T. Evans. *The lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2. – № 1. – P. 1–43.

[24] G. Grätzer, E. T. Schmidt. *Standard ideals in lattices* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1961. – Vol. 12. – P. 17–86.

[25] M. Grech. *The structure and definability in the lattice of equational theories of strongly permutative semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2012. – Vol. 364. – № 6. – P. 2959–2985.

[26] M. Grech, O. B. Sapir. *On definability in some lattices of semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 2012. – Vol. 85. – № 3. – P. 477–512.

[27] J. Ježek. *Primitive classes of algebras with unary and nullary operations* // Colloq. Math. – 1969. – Vol. 20. – № 2. – P. 159–179.

[28] J. Ježek. *The lattice of equational theories. Part* I: *modular elements* // Czechosl. Math. J. – 1981. – Vol. 31. – № 1. – P. 127–152.

[29] J. Ježek, R. N. McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46. – № 2. – P. 199–245.

[30] J. Kalicki, D. Scott. *Equationally completeness in abstract algebras* // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – № 17. – P. 650–659.

[31] A. Kisielewicz. *Varieties of commutative semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – Vol. 342. – № 1. – P. 275–306.

[32] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor. *Algebras. Lattices. Varieties.* Vol. I. – Monterey: Wadsworth & Brooks/Cole, 1987.

[33] P. Perkins. *Bases for equational theories of semigroups* // J. Algebra. – 1989. – Vol. 11. – P. 298–314.

[34] P. Pudlák, J. Tůma. *Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice* // Algebra Universalis. – 1980. – Vol. 10. – № 1. – P. 74–95.

[35] M. S. Putcha, A. Yaqub. *Semigroups satisfying permutation identities* // Semigroup Forum – 1971. – Vol. 3. – № 1. – 68–73.

[36] R. Schwabauer. *Commutative semigroup laws* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22. – № 3. – P. 591–595.

[37] M. Stern. *Semimodular lattices. Theory and applications.* – Cambridge University Press, 1999.

[38] B. M. Vernikov. *Distributivity, modularity and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties* // In: Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / S. Kublanovsky, A. Mikhalev, P. Higgins, J. Ponizovskii (eds.). – St Petersburg: St Petersburg State Technical University. – 1999. – P. 411–439.

[39] B. M. Vernikov. *Semidistributive law and other quasi-identities in lattices of semigroup varieties* // Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 2. – 2001. – P. S241–S256.

[40] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 2007. – Vol. 75. – № 3. – P. 554–566.

[41] B. M. Vernikov. *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. – 2007. – Vol. 48. – № 4. – P. 595–606.

[42] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2008. – Vol. 74. – № 3–4. – P. 539–556.

[43] B. M. Vernikov. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 59. – № 3–4. – P. 405–428.

[44] B. M. Vernikov. *Special elements in lattices of semigroup varieties* // Электрон. ресурс. http://arxiv.org/abs/1309.0228. [P. 1–26.]

[45] B. M. Vernikov. *Upper-modular and related elements of the lattice of commutative semigroup varieties* // Электрон. ресурс. http://arxiv.org/abs/1501.02650. [P. 1–16.]

[46] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commutative semigroup varieties with modular subvariety lattices* // Monoids and Semigroups with Applications / J. Rhodes (ed.). – Singapore: World Scientific. – 1991. – P. 233–253.

[47] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups* // Contrib. General Algebra. – 2000. – Vol. 12. – P. 391–417.

[48] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Contrib. General Algebra. – 2006. – Vol. 17. – P. 173–190.

[49] M. V. Volkov. *Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices* // Contrib. General Algebra. – 1991. – Vol. 7. – P. 351–359.

[50] M. V. Volkov. *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects* // Contemp. Math. – 1992. – Vol. 131. – Part. 3 – P. 295–316.

[51] M. V. Volkov. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* // In: Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex / P. M. Higgins (ed.). – Colchester: University of Essex, 1994. – P. 99–110.

[52] M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. – 2005. – Vol. 16. – P. 275–288.

[53] M. V. Volkov, T. A. Ershova. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // In: Monash. Conf. on Semigroup Theory in Honour of G. B. Preston / T. E. Hall, P. R. Jones, J. C. Meakin (eds.). – Singapore: World Scientific. – 1991. – P. 306–322.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[54] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49. — № 3. — С. 303–330.

[55] В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 7. — С. 67–79.

[56] В. Ю. Шапрынский. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2012. — Т. 18. — № 3. — С. 282–286.

[57] V. Yu. Shaprynskiĭ. *Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 2012. — Vol. 85. — № 1. — P. 97–110.

[58] V. Yu. Shaprynskiĭ. *Identities and quasiidentities in the lattice of overcommutative semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 2013. — Vol. 86. — № 1. — P. 202–211.

[59] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* III // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2010. — Vol. 76. — № 3–4. — P. 371–382.

[60] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited* // Order. — 2011. — Vol. 28. — № 1. — P. 139–155.

Другие публикации

[61] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Междунар. алгебраич. конф., посвящ. 70-летию проф. А. В. Яковлева: Тез. докл. С.-Петербург. — 2010. — С. 14–15.

[62] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Нижнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп* // Междунар. конф. «Алгебра, логика и приложения»: Тез. докл. Красноярск. — 2010. — С. 16–17.

[63] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Специальные элементы решеток многообразий полугрупп* // Проблемы теоретич. и прикладн. математики: Тез. 41 Всеросс. молодежн. конф. Екатеринбург. — 2010. — С. 3–9.

[64] В. Ю. Шапрынский. *Специальные элементы решеток многообразий полугрупп* // XIII Областной конкурс студенч. научно-исслед. работ «Научный Олимп». Тез. студенч. научных работ. Направление «Естествен. науки». Екатеринбург: Изд-во УрГУ. — 2010. — С. 5–6.

[65] В. Ю. Шапрынский. *Модулярные и нижнемодулярные элементы решеток многообразий полугрупп* // Соврем. проблемы математики: Тез. 42 Всеросс. молодежной школы-конф., Екатеринбург. — 2011. — С. 253–255.

[66] В. Ю. Шапрынский. *Тождества и квазитождества в решетке надкоммутативных многообразий полугрупп* // Алгебра и геометрия: Тез. Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. А. И. Старостина, Екатеринбург — 2011. — С. 167–169.

[67] В. Ю. Шапрынский. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* // Соврем. проблемы математики. Тез. Междунар. (43 Всеросс.) молодежн. школы-конф. Екатеринбург. — 2012. — С. 104–105.

[68] В. Ю. Шапрынский. *Модулярные элементы решетки многообразий полугрупп* // Материалы конф. «Алгебра и математич. логика: теория и прилож.» и сопутствующей молодежной летней школы «Вычислимость и вычислимые структуры». Казань: Изд-во Казан. ун-та. — 2014. — С. 127.

[69] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited* // Междунар. конф. «Мальцевские чтения», посвящ. 100-летию со дня рожд. А. И. Мальцева: Тез. докл. Новосибирск. — 2009. — С. 182.