На правах рукописи

Шапрынский Вячеслав Юрьевич

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТОК МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2015

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Верников Борис Муневич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Бредихин Дмитрий Александрович, профессор кафедры «Математика и моделирование», Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, г. Саратов
	доктор физико-математических наук, профессор Пинус Александр Георгиевич, профессор кафедры алгебры и математической логики, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск
Ведущая организация:	Омский государственный педагогический университет, г. Омск

Защита диссертации состоится 2 июня 2015 г. в ______ на заседании диссертационного совета Д 004.006.03 на базе ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН» по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан «____» ______ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук И. Н. Белоусов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Решетки многообразий составляют один из основных классов структур, изучаемых в универсальной алгебре. Значение этих решеток можно объяснить тем обстоятельством, что та или иная алгебраическая теория (например, теория групп, теория колец или теория решеток), как правило, изучает некоторое конкретное многообразие, а многие области этой теории (теория абелевых групп, ассоциативных или лиевых колец, дистрибутивных или модулярных решеток) изучают его подмногообразия. При этом более общие области связаны с бо́льшими многообразиями, а более частные — с меньшими. Таким образом, логическая структура теории, изучающей целый класс алгебр, оказывается схематически отражена в строении одной конкретной алгебры — решетки подмногообразий соответствующего многообразия.

Применительно к полугруппам, решеточная теория многообразий начала систематически развиваться в середине 1960-х годов. К настоящему времени изучению решетки многообразий полугрупп посвящено около 250 работ. Результаты, полученные на начальном этапе развития этой теории, приведены в обзорах [11] и [1]. Ее современное состояние отражено в обзоре [9].

Решетку многообразий полугрупп будем обозначать через **SEM**. Эта решетка устроена крайне сложно. В частности, как вытекает из результата Барриса и Нельсон [10], эта решетка не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. В 1971 году в обзоре [11] была поставлена задача описания многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Она была решена М. В. Волковым в начале 1990-х годов [6, 7]. Им же получены значительные результаты о многообразиях полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, близкие к их описанию по модулю групп. При изучении тождеств в решетках полугрупповых многообразий получен и ряд других глубоких и ярких результатов. Их обзору посвящен § 11 статьи [9].

После исследования тождеств модулярности и дистрибутивности в решетках подмногообразий следующим шагом стало изучение специальных элементов решетки **SEM**, связанных с этими тождествами. Напомним, что элемент x решетки L называется *нейтральным*, если

$$\forall y, z \in L \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$$

стандартным, если

$$\forall y, z \in L \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$

дистрибутивным, если

$$\forall y, z \in L \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

модулярным, если

$$\forall y, z \in L \quad y \leq z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$$

нижнемодулярным, если

$$\forall y, z \in L \quad x \leq y \longrightarrow x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y.$$

Как хорошо известно, элемент $x \in L$ нейтрален тогда и только тогда, когда для всех $y, z \in L$ подрешетка, порожденная элементами x, y и z, дистрибутивна (см., например, [8, теорема III.2.4]). *Кодистрибутивные*, *костандартные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно. Отметим, что в ряде случаев знание того, как устроены специальные элементы какого-либо из перечисленных типов, дает существенную информацию о строении всей решетки в целом. Так, дистрибутивные и кодистрибутивные элементы связаны с гомоморфными образами решетки, а нейтральные — с ее подпрямыми разложениями. Нейтральным, [ко]стандартным и [ко]дистрибутивным элементам в абстрактных решетках посвящен § III.2 монографии [8].

Прилагательное, обозначающее тип специального элемента решетки, договоримся относить и к многообразию, являющемуся элементом решетки **SEM** этого типа. Например, будем говорить «дистрибутивное многообразие» вместо «дистрибутивный элемент решетки **SEM**». Первые результаты о специальных элементах решетки многообразий полугрупп были получены в работах [5, 12], в которых они носили вспомогательный характер. Систематическое изучение специальных элементов в решетке **SEM** было начато в [25] и продолжено в [3, 4, 15–18, 22]. В этих работах были полностью описаны нейтральные и костандартные элементы решетки **SEM**, а для модулярных, нижнемодулярных, верхнемодулярных и кодистрибутивных элементов найдены сильные необходимые условия и описания в обширных частных случаях (в частности, в коммутативном случае). Отметим, что дистрибутивные и стандартные элементы решетки **SEM** в этих работах не рассматривались. Обстоятельный обзор результатов этих работ содержится в статье [19] (см. также § 14 обзора [9]).

Диссертация посвящена систематическому изучению специальных элементов различных типов в решетке всех многообразий полугрупп и некоторых ее важных подрешетках. Перейдем к постановкам конкретных задач, которым посвящены наши исследования.

Напомним, что многообразие полугрупп называется *собственным*, если оно отлично от многообразия всех полугрупп. Из результатов работ [12, 15, 18] вытекает, что если собственное многообразие полугрупп является элементом любого из указанных выше типов в решетке **SEM**, то оно периодично. Возникает естественный вопрос: случайно ли это совпадение? Чтобы сформулировать этот вопрос более точно, нам понадобится ввести одно новое понятие, принадлежащее автору диссертации.

Пусть $p(x_0, x_1, \ldots, x_n) = q(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — решеточное тождество от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Обозначим это тождество через I. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in L \quad p(x, x_1, \ldots, x_n) = q(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что одно и то же решеточное тождество, в котором переменные упорядочены двумя различными способами, рассматривается здесь как два различных тождества. Элемент назовем *id-элементом*, если он является I-элементом для некоторого нетривиального тождества I. Многообразия, являющиеся id-элементами решетки

SEM, будем называть *id-многообразиями.* Все восемь рассматриваемых нами типов специальных элементов являются I-элементами для подходящих I. Для нейтральных, [ко]стандартных и [ко]дистрибутивных элементов это очевидно, а для модулярных, нижнемодулярных и верхнемодулярных элементов следует из возможности переписать модулярный решеточный закон в виде тождества. Кроме того, несложно показать, что любой элемент решетки с тем свойством, что порожденный им главный идеал удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству, является I-элементом для подходящего I. Применительно к решетке **SEM** это означает, что если решетка подмногообразий многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, то $\mathcal{V}$ является id-многообразием. Таким образом, изучение id-многообразий объединяет два обсуждавшихся выше направления: исследование тождеств в решетках многообразий полугрупп и специальных элементов восьми упомянутых типов в решетке **SEM**. При этом, как вытекает из результатов работы [10], периодическими являются не только специальные элементы этих восьми типов в решетке **SEM**, но и многообразия с нетривиальными тождествами в решетках подмногообразий.

В силу вышесказанного естественно поставить следующую задачу.

Задача 1. *Выяснить, будет ли всякое собственное id-многообразие полугрупп периодическим.*

Перейдем к задачам, относящимся к тем или иным конкретным типам специальных элементов. В работах [15,17] было получено некоторое необходимое условие нижней модулярности и описаны нижнемодулярные многообразия в ряде обширных частных случаев. Напомним, что пара тождеств вида $wx = xw = w$, где буква x не входит в слово w, обычно записывается кратко в виде символического тождества $w = 0$. Такие тождества и многообразия, ими заданные, называются 0-*приведенными.* Все найденные в [15, 17] собственные нижнемодулярные многообразия либо являются 0-приведенными, либо имеют вид $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие, а $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток. Ранее в работе [12] было доказано, что все многообразия указанного вида модулярны, а из результатов работы [5] легко вытекает, что все они нижнемодулярны. Возникает следующая задача.

Задача 2. *Выяснить, верно ли, что всякое собственное нижнемодулярное многообразие полугрупп либо является* 0*-приведенным, либо имеет вид* $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$*, где* $\mathcal{N}$ *—* 0*-приведенное многообразие. В частности, верно ли, что всякое нижнемодулярное многообразие модулярно?*

Из вышесказанного вытекает, что положительный ответ на первый из вопросов, сформулированных в задаче 2, означал бы полное описание нижнемодулярных многообразий.

Очевидно, что всякое дистрибутивное многообразие нижнемодулярно, а из хорошо известных теоретико-решеточных результатов вытекает, что всякое стандартное многообразие дистрибутивно (см., например, [8, теорема III.2.3]). Поэтому продвижения, достигнутые при изучении нижнемодулярных многообразий в [15, 17] предоставляют нам необходимое условие дистрибутивности и стандартности многообразия. Естественно попытаться завершить описание элементов этих двух типов.

Задача 3. *Описать дистрибутивные многообразия полугрупп.*

Задача 4. *Описать стандартные многообразия полугрупп.*

Решетка **SEM** содержит ряд обширных и важных подрешеток, представляющих самостоятельный интерес. Обзор работ, посвященных изучению этих подрешеток, приведен в главе 2 статьи [9]. В диссертации изучаются специальные элементы в двух таких подрешетках. Первой из них является решетка всех коммутативных многообразий, которую мы будем обозначать через **Com**. Вторая решетка состоит из всех многообразий, содержащих многообразие всех коммутативных полугрупп. Такие многообразия называются *надкоммутативными*, а образуемая ими решетка будет обозначаться через **OC**.

Перейдем к обсуждению решетки **Com**. Из результата работы [10] вытекает, что эта решетка не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Многообразия коммутативных полугрупп, решетка подмногообразий которых дистрибутивна или модулярна, описаны в статьях [23] и [21] соответственно. Все это делает естественным изучение специальных элементов в решетке **Com**. Отметим, что до наших исследований никаких результатов на эту тему известно не было. Лишь совсем недавно появилась работа Б. М. Верникова [20], в которой найдено полное описание костандартных, кодистрибутивных и верхнемодулярных элементов решетки **Com** (отметим, что в доказательствах этих результатов используются формулируемые ниже теоремы 4 и 7 диссертации). По аналогии со сформулированными выше, возникают следующие задачи.

Задача 5. *Описать нижнемодулярные элементы решетки* **Com**.

Задача 6. *Описать дистрибутивные элементы решетки* **Com**.

Задача 7. *Описать стандартные элементы решетки* **Com**.

Задача 8. *Описать нейтральные элементы решетки* **Com**.

Отметим, что аналог задачи 8 для решетки **SEM** выше не упоминался, потому что нейтральные элементы этой решетки полностью описаны в [25].

В работах [5, 12, 16] были получены существенные результаты о модулярных многообразиях. В [12] показано, что всякое собственное модулярное многообразие либо является нильмногообразием, либо имеет вид $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. При этом многообразие $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ модулярно тогда и только тогда, когда модулярно многообразие $\mathcal{N}$. Перечисленные результаты полностью сводят задачу описания модулярных многообразий к случаю нильмногообразий. Тождество называется *подстановочным*, если его правая и левая части содержат одни и те же буквы и отличаются друг от друга переименованием букв. В работе [16] показано, что всякое модулярное нильмногообразие может быть задано только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами. С другой стороны, в [5] и [12] независимо было получено уже упомянутое достаточное условие модулярности нильмногообразия, состоящее в том, что всякое 0-приведенное многообразие модулярно. Естественно попытаться перенести все эти результаты (с теми или иными изменениями) на решетку **Com**. Таким образом, возникает

Задача 9. *Выяснить, верны ли аналоги упомянутых результатов работ* [5, 12, 16] *для решетки* **Com**.

Как и решетка **Com**, решетка **OC** устроена довольно сложно. В работе [24] М. В. Волковым было получено описание этой решетки в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального вида, так называемых G-множеств. Из этого результата вытекает, в частности, что решетка **OC** не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству (и даже квазитождеству). Договоримся обозначать решетку надкоммутативных подмногообразий надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ через $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$. В работах Б. М. Верникова [13, 14] получен ряд результатов о тождествах и квазитождествах в решетках вида $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$. В частности, в этих работах полностью описаны многообразия $\mathcal{V}$, для которых решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ модулярна или дистрибутивна. Решение следующих двух задач продолжает исследование тождеств и квазитождеств в решетках $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$.

Задача 10. *Описать надкоммутативные многообразия $\mathcal{V}$, для которых решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Задача 11. *Описать надкоммутативные многообразия $\mathcal{V}$, для которых решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет нетривиальному квазитождеству.*

В силу сказанного выше об id-элементах в абстрактных решетках, все многообразия, о которых идет речь в задаче 10, являются id-элементами решетки **OC**.

Изучение специальных элементов решетки **OC** было начато в работе Б. М. Верникова [2]. В ней рассматривались дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные и нейтральные элементы решетки **OC**. Было доказано, что свойства быть элементами всех этих пяти типов эквивалентны, и предложено некоторое описание многообразий, обладающих этими свойствами. Однако, как было замечено автором диссертации, это описание неверно (хотя результат об эквивалентности пяти указанных условий доказан в [2] верно). В силу сказанного, естественно сформулировать следующую задачу.

Задача 12. *Описать дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные и нейтральные элементы в решетке* **OC**.

Целью работы является решение поставленных выше задач 1–12.

Методы исследования. В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации были представлены на Международных молодежных школах-конференциях по математике, проводимых Институтом математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, 2010–2012), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009), Международных конференциях по алгебре (Санкт-Петербург, 2010, Красноярск, 2010, Екатеринбург, 2011 и 2012, Казань, 2011 и 2014), Международных конференциях по решеткам и универсальной алгебре (Прага, 2010) и по полугруппам и общей алгебре (Потсдам, 2011). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2009–2014). Работа автора по теме диссертации была представлена на XIII Свердловском областном конкурсе студенческих научных работ «Научный олимп» (2010), где получила первую премию по направлению «Естественные науки».

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 работ [26–41]. Из них 7 работ опубликованы в журналах из списка ВАК [26–

32]. Работы [26, 31–35, 41] написаны совместно с Б. М. Верниковым. Часть доказательств результатов работ [26, 31, 33–35], принадлежащая Б. М. Верникову, перекрывается результатами автора, опубликованными позднее в [29][1]. Таким образом, приводимые в диссертации доказательства результатов этих работ целиком принадлежат автору. Что касается работ [32, 41], то в них Б. М. Верникову принадлежит постановка задачи, указание общей схемы доказательства и усовершенствование некоторых деталей изложения, а доказательства найдены автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти параграфов и списка литературы. Объем диссертации составляет 72 страницы. Библиографический список содержит 69 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении приводится обзор содержания работ, предшествующих диссертации. Там же ставятся основные задачи, решаемые в диссертационной работе, и кратко обсуждаются ее основные результаты.

Первый параграф диссертации имеет вспомогательный характер. В нем приводятся все необходимые определения, обозначения и предварительные результаты.

В § 2 доказываются результаты, которые не входят в число основных результатов диссертации, но представляют определенный самостоятельный интерес. Многообразие полугрупп называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет *перестановочному* тождеству, т. е. нетривиальному тождеству вида $x_1x_2\cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi}\cdots x_{n\pi}$, где π — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Решетка всех перестановочных многообразий обозначается через **Perm**. Результаты § 2 указывают некоторые свойства модулярных и нижнемодулярных элементов в решетках подмногообразий надкоммутативных много-

[1] Это не относится к теоремам 3–5 работы [35], которые принадлежат Б. М. Верникову, опубликованы с доказательством в [4] и не входят в диссертацию.

образий и в решетке **Perm**. Эти результаты позволяют в § 3 и 4 единообразно и ценой минимальных дополнительных усилий доказать целый ряд утверждений о модулярных и нижнемодулярных элементах в решетках **SEM** и **Com**. Центральным результатом § 2 является следующее предложение.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — периодическое подмногообразие надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{X}$. Если многообразие $\mathcal{V}$ является модулярным или нижнемодулярным элементом решетки подмногообразий многообразия $\mathcal{X}$, то либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое нильмногообразие.*

В § 2 показано, что многообразие $\mathcal{COM}$ является как модулярным, так и нижнемодулярным элементом решетки подмногообразий многообразия, заданного тождествами $xyz = yxz = xzy$. Это показывает, что условие периодичности многообразия $\mathcal{V}$ в формулировке предложения 2.1 существенно.

В § 2 также доказывается следующий аналог предложения 2.1 для решетки **Perm**.

Предложение 2.2. *Если перестановочное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является модулярным или нижнемодулярным элементом решетки* **Perm**, *то либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое нильмногообразие.*

Третий параграф посвящен специальным элементам решетки **SEM**. Он делится на четыре пункта. В первом пункте этого параграфа доказывается следующая теорема, дающая решение задачи 1.

Теорема 1. *Всякое собственное id-многообразие полугрупп является периодическим многообразием.*

Теорема 1 предоставляет необходимое условие для id-многообразий. В связи с этим естественным является вопрос о том, будет ли это условие достаточным, то есть будет ли всякое периодическое многообразие id-многообразием. Ответ оказывется отрицательным.

Предложение 3.1. *Существуют периодические многообразия полугрупп, не являющиеся* id*-многообразиями.*

Многообразие, являющееся дистрибутивным [модулярным, и т. д.] элементом подрешетки L решетки **SEM**, называется *дистрибутивным* [соответственно *модулярным* и т. д.] *в* L *многообразием.* В пункте 3.2 передоказывается достаточное условие модулярности многообразия из [12]. Поскольку точно так же доказываются аналогичные условия для модулярных в **Com**, нижнемодулярных и нижнемодулярных в **Com** многообразий, эти утверждения доказываются в этом же пункте. Обозначим через $\mathcal{COM}$ многообразие всех коммутативных полугрупп.

Предложение 3.2. *Если* $\mathcal{V}$ *— модулярное или нижнемодулярное* [*в* **Com**] *многообразие* [*коммутативных*] *полугрупп, то либо* $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ [*соответственно* $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$], *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, *где* $\mathcal{N}$ *— некоторое* [*коммутативное*] *нильмногообразие.*

В пункте 3.3 решается задача 2, что приводит к следующей теореме.

Теорема 2. *Многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *нижнемодулярно тогда и только тогда, когда либо* $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, *где* $\mathcal{N}$ *— некоторое* 0*-приведенное многообразие.*

Из теоремы 2 вытекает, что справедливо

Следствие 3.1. *Всякое нижнемодулярное многообразие полугрупп модулярно.*

Пункт 3.4 посвящен задачам 3 и 4. Дистрибутивные и стандартные многообразия описываются следующей теоремой.

Теорема 3. *Для любого многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(a) $\mathcal{V}$ *дистрибутивно;*

(б) $\mathcal{V}$ *стандартно;*

(в) *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{N}$ *—* 0*-приведенное многообразие, удовлетворяющее тождествам* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$.

В § 4 изучаются специальные элементы решетки **Com**. Он делится на четыре пункта. Задача 9 исследуется в первом пункте параграфа. Основным результатом этого пункта является следующее необходимое условие для модулярных многообразий.

Теорема 4. *Если многообразие коммутативных полугрупп* $\mathcal{V}$ *модулярно в* **Com**, *то либо* $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, *либо* $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, *где* $\mathcal{N}$ *— коммутативное нильмногообразие, заданное в* $\mathcal{COM}$ *системой* 0*-приведенных и подстановочных тождеств.*

Подмногообразие многообразия $\mathcal{COM}$, заданное в нем системой 0-приведенных тождеств, называется 0-*приведенным в* $\mathcal{COM}$. Нетрудно показать, что любое 0-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие или объединение 0-приведенного в $\mathcal{COM}$ многообразия с многообразием $\mathcal{SL}$ является модулярным в **Com**. Таким образом, для модулярных в **Com** многообразий имеется необходимое условие (теорема 4) и близкое к нему достаточное условие. В диссертации приведены следующие примеры, показывающие, что данное необходимое условие не является достаточным, а достаточное — необходимым.

Предложение 4.1. *Многообразие полугрупп, заданное тождествами* $x^2y = y^2x$, $x^3 = xyzt = 0$, $xy = yx$, *модулярно в* **Com**.

Предложение 4.2. *Многообразие коммутативных полугрупп, заданное в* $\mathcal{COM}$ *тождествами* $x^4y^3z^2t = y^4x^3z^2t$, $x_1x_2 \dots x_{11} = 0$ *и всеми тождествами* $w = 0$, *где* w *— слово длины десять от не более чем трех букв, не является модулярным в* **Com**.

В пункте 4.2 доказывается следующая теорема, решающая задачу 5.

Теорема 5. *Многообразие коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ нижнемодулярно в* **Com** *тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N} \vee \mathcal{SL}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое* 0*-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие.*

Из теоремы 5 вытекает, что справедлив следующий аналог следствия 3.1.

Следствие 4.1. *Всякое многообразие коммутативных полугрупп, нижнемодулярное в* **Com**, *модулярно в* **Com**.

Пункт 4.3 посвящен решению задач 6 и 7. Следующая теорема является основным результатом пункта.

Теорема 6. *Для многообразия коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *$\mathcal{V}$ дистрибутивно в* **Com**;

(б) *$\mathcal{V}$ стандартно в* **Com**;

(в) *либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ —* 0*-приведенное в $\mathcal{COM}$ многообразие, в котором выполнены тождества $x^3yz = x^2y^2z = 0$ и либо выполнены оба тождества $x^3y = 0$, $x^2y^2 = 0$, либо не выполнено ни одно из них.*

Решение задачи 8 дается следующей теоремой, доказываемой в пункте 4.4.

Теорема 7. *Многообразие коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ нейтрально в* **Com** *тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = 0$.*

В § 5 рассматриваются сформулированные выше задачи, относящиеся к решетке **OC**. Этот параграф делится на два пункта. В пункте 5.1 решены задачи 10 и 11. Напомним, что решетки называются [*квази*]*эквационально эквивалентными*, если они удовлетворяют одним и тем же [квази]тождествам. Обозначим через $\mathcal{X}$ многообразие, заданное тождествами $xyzt = xytz$ и $x^2y^2 = y^2x^2 = (xy)^2$, а через $\overleftarrow{\mathcal{X}}$ — двойственное к нему многообразие. Через $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$ будем обозначать, соответственно, многообразия полугрупп левых и правых нулей. Следующая теорема является основным результатом пункта 5.1.

Теорема 8. *Для надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет некоторому нетривиальному решеточному тождеству;*

(б) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ удовлетворяет некоторому нетривиальному решеточному квазитождеству;*

(в) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ эквационально эквивалентна некоторой конечной решетке;*

(г) *решетка $L_{\mathbf{OC}}(\mathcal{V})$ квазиэквационально эквивалентна некоторой конечной решетке;*

(д) *многообразие $\mathcal{V}$ перестановочно и не содержит подмногообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{X}$ и $\overleftarrow{\mathcal{X}}$.*

Наконец, задача 12 решена в пункте 5.2. Чтобы сформулировать соответствующий результат, нам понадобится ввести ряд определений. *Разбиением числа n на m частей* называется невозрастающая конечная последовательность натуральных чисел $\lambda = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$, такая, что $\ell_1 + \cdots + \ell_m = n$. Числа $\ell_1, \ldots, \ell_m$ называются *компонентами разбиения* λ. Множество всех разбиений всех натуральных чисел на две или большее число частей обозначим через Λ. Для разбиений $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ будем полагать $\lambda_1 \le \lambda_2$, если λ_2 может быть получено из λ_1 последовательным применением (произвольное число раз) следующих двух операций: присоединение новой компоненты, равной 1, и замена двух компонент их суммой с последующим переупорядочением всех компонент в невозрастающем порядке. Напомним, что тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в каждую из его частей одинаковое число раз. *Типом* уравновешенного тождества назовем разбиение, образованное кратностями всех букв в любой из частей этого тождества. Через $\mathcal{S}_\lambda$ будем обозначать многообразие, заданное всеми уравновешенными тождествами, имеющими тип $\geq \lambda$.

Теорема 9. *Для произвольного надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{V}$ *дистрибутивно в* $\mathbf{OC}$*;*

(2) $\mathcal{V}$ *кодистрибутивно в* $\mathbf{OC}$*;*

(3) $\mathcal{V}$ *стандартно в* $\mathbf{OC}$*;*

(4) $\mathcal{V}$ *костандартно в* $\mathbf{OC}$*;*

(5) $\mathcal{V}$ *нейтрально в* $\mathbf{OC}$*;*

(6) $\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{S}_{\lambda_n}$ *для некоторого конечного набора разбиений* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$*.*

Как уже отмечалось, эквивалентность условий (1)–(5) доказана ранее Б. М. Верниковым в [2].

Теорема 9 показывает важную роль, которую играют в рассматриваемых нами вопросах многообразия вида $\mathcal{S}_\lambda$. Поэтому представляет интерес также доказываемое в п. 5.2 утверждение о том, что все такие многообразия конечно базируемы.

Основные результаты диссертации

Основными результатами диссертации являются:

- утверждение о периодичности всех собственных id-многообразий полугрупп (теорема 1);
- полное описание дистрибутивных, стандартных и нижнемодулярных многообразий (теоремы 2 и 3);
- необходимое условие для модулярных в **Com** многообразий (теорема 4);

- полное описание нейтральных, дистрибутивных, стандартных и нижнемодулярных в **Com** многообразий (теоремы 5–7);
- полное описание надкоммутативных многообразий, решетка надкоммутативных подмногообразий которых удовлетворяет нетривиальному [квази]тождеству (теорема 8);
- полное описание нейтральных, дистрибутивных, кодистрибутивных, стандартных и костандартных в **OC** многообразий (теорема 9).

Список литературы

[1] А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута. *О решетке многообразий полугрупп* // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. — Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. — 1979. — С. 3–46.

[2] Б. М. Верников. *Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп* // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70. — № 5. — С. 670–678.

[3] Б. М. Верников. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14. — № 7. — С. 43–51.

[4] Б. М. Верников. *Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 7. — С. 13–21.

[5] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. — Свердловск: Урал. гос. ун-т. — 1988. — С. 53–65.

[6] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Докл. Акад. наук. — 1992. — Т. 326 — № 3. — С. 409–413.

[7] М. В. Волков. *Тождества в решетках многообразий полугрупп.* — Дисс. …д-ра физ.-мат. наук. — Екатеринбург. — 1994.

[8] Г. Гретцер. *Общая теория решеток.* — М.: Мир, 1982.

[9] Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 2009. — № 3. — С. 3–36.

[10] S. Burris, E. Nelson. *Embedding the dual of* Π_m *in the lattice of equational classes of commutative semigroups* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 30. — № 2. — P. 37–39.

[11] T. Evans. *The lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 1971. — Vol. 2. — № 1. — P. 1–43.

[12] J. Ježek, R. N. McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. — 1993. — Vol. 46. — № 2. — P. 199–245.

[13] B. M. Vernikov. *Distributivity, modularity and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties* // In: Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / S. Kublanovsky, A. Mikhalev, P. Higgins, J. Ponizovskii (eds.). — St Petersburg: St Petersburg State Technical University. — 1999. — P. 411–439.

[14] B. M. Vernikov. *Semidistributive law and other quasi-identities in lattices of semigroup varieties* // Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 2. — 2001. — P. S241–S256.

[15] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 2007. — Vol. 75. — № 3. — P. 554–566.

[16] B. M. Vernikov. *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. — 2007. — Vol. 48. — № 4. — P. 595–606.

[17] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2008. — Vol. 74. — № 3–4. — P. 539–556.

[18] B. M. Vernikov. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. — 2008. — Vol. 59. — № 3–4. — P. 405–428.

[19] B. M. Vernikov. *Special elements in lattices of semigroup varieties* // Электрон. ресурс. http://arxiv.org/abs/1309.0228. [P. 1–26.]

[20] B. M. Vernikov. *Upper-modular and related elements of the lattice of commutative semigroup varieties* // Электрон. ресурс. http://arxiv.org/abs/1501.02650. [P. 1–16.]

[21] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commutative semigroup varieties with modular subvariety lattices* // Monoids and Semigroups with Applications / J. Rhodes (ed.). — Singapore: World Scientific. — 1991. — P. 233–253.

[22] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Contrib. General Algebra. — 2006. — Vol. 17. — P. 173–190.

[23] M. V. Volkov. *Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices* // Contrib. General Algebra. — 1991. — Vol. 7. — P. 351–359.

[24] M. V. Volkov. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* // In: Transformation semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex / P. M. Higgins (ed.). — Colchester: University of Essex, 1994. — P. 99–110.

[25] M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. — 2005. — Vol. 16. — P. 275–288.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[26] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49. — № 3. — С. 303–330.

[27] В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 2011. — № 7. — С. 67–79.

[28] В. Ю. Шапрынский. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2012. — Т. 18. — № 3. — С. 282–286.

[29] V. Yu. Shaprynskiĭ. *Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 2012. — Vol. 85. — № 1. — P. 97–110.

[30] V. Yu. Shaprynskiĭ. *Identities and quasiidentities in the lattice of overcommutative semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 2013. — Vol. 86. — № 1. — P. 202–211.

[31] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* III // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2010. — Vol. 76. — № 3–4. — P. 371–382.

[32] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited* // Order. — 2011. — Vol. 28. — № 1. — P. 139–155.

Другие публикации

[33] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Междунар. алгебраич. конф., посвящ. 70-летию проф. А. В. Яковлева: Тез. докл. С.-Петербург. — 2010. — С. 14–15.

[34] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Нижнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп* // Междунар. конф. «Алгебра, логика и приложения»: Тез. докл. Красноярск. — 2010. — С. 16–17.

[35] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Специальные элементы решеток многообразий полугрупп* // Проблемы теоретич. и прикладн. математики: Тез. 41 Всеросс. молодежн. конф. Екатеринбург. — 2010. — С. 3–9.

[36] В. Ю. Шапрынский. *Специальные элементы решеток многообразий полугрупп* // XIII Областной конкурс студенч. научно-

исслед. работ «Научный Олимп». Тез. студенч. научных работ. Направление «Естествен. науки». Екатеринбург: Изд-во УрГУ. — 2010. — С. 5–6.

[37] В. Ю. Шапрынский. *Модулярные и нижнемодулярные элементы решеток многообразий полугрупп* // Соврем. проблемы математики: Тез. 42 Всеросс. молодежной школы-конф., Екатеринбург. — 2011. — С. 253–255.

[38] В. Ю. Шапрынский. *Тождества и квазитождества в решетке надкоммутативных многообразий полугрупп* // Алгебра и геометрия: Тез. Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. А. И. Старостина, Екатеринбург — 2011. — С. 167–169.

[39] В. Ю. Шапрынский. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* // Соврем. проблемы математики. Тез. Междунар. (43 Всеросс.) молодежн. школы-конф. Екатеринбург. — 2012. — С. 104–105.

[40] В. Ю. Шапрынский. *Модулярные элементы решетки многообразий полугрупп* // Материалы конф. «Алгебра и математич. логика: теория и прилож.» и сопутствующей молодежной летней школы «Вычислимость и вычислимые структуры». Казань: Изд-во Казан. ун-та. — 2014. — С. 127.

[41] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited* // Междунар. конф. «Мальцевские чтения», посвящ. 100-летию со дня рожд. А. И. Мальцева: Тез. докл. Новосибирск. — 2009. — С. 182.