

Изоморфизм ч.у.м., ординальные числа

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

20 сентября 2018 г.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — ч.у.м. Два ч.у.м. **изоморфны**, если существует биекция $f: A_1 \rightarrow A_2$ такая, что $\forall x_1, x_2 \in A_1$
 $x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Обозначение: $(A_1, \leq_1) \cong (A_2, \leq_2)$.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — ч.у.м. Два ч.у.м. **изоморфны**, если существует биекция $f: A_1 \rightarrow A_2$ такая, что $\forall x_1, x_2 \in A_1$
 $x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Обозначение: $(A_1, \leq_1) \cong (A_2, \leq_2)$.

Примеры

- Две цепи изоморфны тогда и только тогда, когда в них одинаковое число элементов;
- Ч.у.м. делителей числа 15 и 6 изоморфны;
- Ч.у.м. делителей числа 15 и ч.у.м. $(\mathcal{B}(\{3, 5\}), \subseteq)$ изоморфны.

Упражнение. Отношение "быть изоморфным" является отношением эквивалентности на классе всех вполне упорядоченных множеств.

Определение

Ординалом или **ординальным числом** называется класс разбиения относительно отношения "быть изоморфным" для в.у.м.

Упражнение. Отношение "быть изоморфным" является отношением эквивалентности на классе всех вполне упорядоченных множеств.

Определение

Ординалом или **ординальным числом** называется класс разбиения относительно отношения "быть изоморфным" для в.у.м.

Цепи $(\mathbb{N}, \leq)$ соответствует ординальное число ω , т.е. $Ord(\mathbb{N}) = \omega$.

Определение

Пусть $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ — два в.у.м. ($A \cap B = \emptyset$) с $\text{Ord}(A) = \alpha$, $\text{Ord}(B) = \beta$. Тогда **ординальной суммой** называется $(C = A \cup B, \leq)$, где

$$c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \leq_1 c_2 & c_1, c_2 \in A \\ c_1 \in A, & c_2 \in B \\ c_1 \leq_2 c_2, & c_1, c_2 \in B \end{cases}$$

Этой ординальной сумме соответствует ординальное число $\alpha + \beta$.

Определение

Пусть $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ — два в.у.м. ($A \cap B = \emptyset$) с $\text{Ord}(A) = \alpha$, $\text{Ord}(B) = \beta$. Тогда **ординальной суммой** называется $(C = A \cup B, \leq)$, где

$$c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \leq_1 c_2 & c_1, c_2 \in A \\ c_1 \in A, & c_2 \in B \\ c_1 \leq_2 c_2, & c_1, c_2 \in B \end{cases}$$

Этой ординальной сумме соответствует ординальное число $\alpha + \beta$.

Пример

Для конечных ч.у.м. $n + m = m + n$. Однако $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$.

Определение

Ординальным произведением в.у.м. $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ с $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$ называется $(C = A \times B, \leq)$, где

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, & b_1 \leq_2 b_2 \\ a_1 <_1 a_2 \end{cases}$$

Ординальное число $\alpha \cdot \beta$

Определение

Ординальным произведением в.у.м. $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ с $\text{Ord}(A) = \alpha$, $\text{Ord}(B) = \beta$ называется $(C = A \times B, \leq)$, где

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, & b_1 \leq_2 b_2 \\ a_1 <_1 a_2 \end{cases}$$

Ординальное число $\alpha \cdot \beta$

Пример

$$\omega = 2\omega \neq \omega \cdot 2$$

Итак, если $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ — в.у.м., то если $Card(A) = Card(B)$, то вообще говоря не обязательно $Ord(A) = Ord(B)$. Обратное верно: $Ord(A) = Ord(B) \Rightarrow Card(A) = Card(B)$.

Итак, если $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ — в.у.м., то если $Card(A) = Card(B)$, то вообще говоря не обязательно $Ord(A) = Ord(B)$. Обратное верно: $Ord(A) = Ord(B) \Rightarrow Card(A) = Card(B)$.

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м., $v \in A$. Тогда множество $A(v) = \{x \in A \mid x < v\}$ назовем **отрезком** множества A .

Итак, если $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ — в.у.м., то если $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$, то вообще говоря не обязательно $\text{Ord}(A) = \text{Ord}(B)$. Обратное верно: $\text{Ord}(A) = \text{Ord}(B) \Rightarrow \text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м., $v \in A$. Тогда множество $A(v) = \{x \in A \mid x < v\}$ назовем **отрезком** множества A .

Лемма 1

В.у.м. не изоморфен никакому своему собственному отрезку.

От противного. Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м. такой, что существует $c \in A$ $A \cong A(c)$. По определению это означает, что существует монотонная биекция $f: A \rightarrow A(c)$.

Доказательство леммы 1

От противного. Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м. такой, что существует $c \in A$ $A \cong A(c)$. По определению это означает, что существует монотонная биекция $f: A \rightarrow A(c)$.

Рассмотрим множество $B = \{x \in A \mid f(x) < x\}$. Оно непусто, так как $c \in B$.

Доказательство леммы 1

От противного. Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м. такой, что существует $c \in A$ $A \cong A(c)$. По определению это означает, что существует монотонная биекция $f: A \rightarrow A(c)$.

Рассмотрим множество $B = \{x \in A \mid f(x) < x\}$. Оно непусто, так как $c \in B$. Пусть $d = \min B$, тогда $f(d) < d$. Так как d — минимум, то $f(d) \notin B$. С другой стороны, так как f — изоморфизм, то $f(d) < d \Rightarrow f(f(d)) < f(d)$, откуда $f(d) \in B$.

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B .

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B .

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B .

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $Ord(A) = \alpha < \beta$, $Ord(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $\text{Ord}(A) = \alpha$, $\text{Ord}(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B .

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $\text{Ord}(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $\text{Ord}(A) = \alpha < \beta$, $\text{Ord}(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$. Рассмотрим отображение $f: \alpha \rightarrow c_\alpha$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $\text{Ord}(A) = \alpha$, $\text{Ord}(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B .

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $\text{Ord}(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м.

$\text{Ord}(A) = \alpha < \beta$, $\text{Ord}(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$. Рассмотрим отображение $f: \alpha \rightarrow c_\alpha$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$. Тогда $c_{\alpha_1} < c_{\alpha_2}$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B .

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $Ord(A) = \alpha < \beta$, $Ord(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$. Рассмотрим отображение $f: \alpha \rightarrow c_\alpha$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$. Тогда $c_{\alpha_1} < c_{\alpha_2}$. По лемме 1 в.у.м. не может быть изоморфен никакому своему отрезку, поэтому $\forall c \in B \quad Ord(B(c)) < \beta$. Следовательно, отображение f — является биекцией.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.

Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда

$\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.

Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.

Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.

Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$. Мы показали, что $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$. Следовательно, $\gamma \in C$.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.

Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.

Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$. Мы показали, что $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$. Следовательно, $\gamma \in C$.

Пусть $\gamma < \alpha, \beta$, тогда $W(\gamma) = C(\gamma) \subset C$.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.

Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.

Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$. Мы показали, что $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$. Следовательно, $\gamma \in C$.

Пусть $\gamma < \alpha, \beta$, тогда $W(\gamma) = C(\gamma) \subset C$. Следовательно, $\gamma = Ord(W(\gamma)) < Ord(C) = \gamma$. Откуда $\gamma = \alpha$ и $\alpha < \beta$, либо $\gamma = \beta$ и тогда $\beta < \alpha$.