Парадоксы теории множеств

Парадокс Рассела (1901)

Назовем множество *обычным*, если оно не содержит самого себя в качестве элемента. Рассмотрим множество всех обычных множеств $Z = \{X \mid X \notin X\}$. Будет ли оно обычным?

Парадоксы теории множеств

Парадокс Рассела (1901)

Назовем множество *обычным*, если оно не содержит самого себя в качестве элемента. Рассмотрим множество всех обычных множеств $Z = \{X \mid X \notin X\}$. Будет ли оно обычным?

- Если Z обычное, то $Z \notin Z$, а значит по определению множества Z мы получим $Z \in Z$.

Парадоксы теории множеств

Парадокс Рассела (1901)

Назовем множество *обычным*, если оно не содержит самого себя в качестве элемента. Рассмотрим множество всех обычных множеств $Z = \{X \mid X \notin X\}$. Будет ли оно обычным?

- Если Z обычное, то $Z \notin Z$, а значит по определению множества Z мы получим $Z \in Z$.
- Если Z не является обычным, то $Z \in Z$, а значит $Z \notin Z$

Парадоксы теории множеств

Парадокс Рассела (1901)

Назовем множество *обычным*, если оно не содержит самого себя в качестве элемента. Рассмотрим множество всех обычных множеств $Z = \{X \mid X \notin X\}$. Будет ли оно обычным?

- Если Z обычное, то $Z \notin Z$, а значит по определению множества Z мы получим $Z \in Z$.
- Если Z не является обычным, то $Z \in Z$, а значит $Z \notin Z$

Пусть X — множество всех множеств, тогда $\mathcal{B}(X) \subseteq X$. Откуда $|\mathcal{B}(X)| \leq |X|$. С другой стороны по теореме Кантора $|\mathcal{B}(X)| > |X|$. Следовательно,

- $\{x \mid P(x)\}$ не обязательно задает множество.
- Множества всех множеств не существует.

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

ZF3 Любое конечное множество является множеством;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

ZF3 Любое конечное множество является множеством;

ZF4 Объединение множеств является множеством;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

ZF3 Любое конечное множество является множеством;

ZF4 Объединение множеств является множеством;

ZF5 Существование множества натуральных чисел;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

ZF3 Любое конечное множество является множеством;

ZF4 Объединение множеств является множеством;

ZF5 Существование множества натуральных чисел;

ZF6 Для любого множества X и свойства P его *подмножество* $\{x \in X \mid P(x)\}$ является множеством;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

ZF3 Любое конечное множество является множеством;

ZF4 Объединение множеств является множеством;

ZF5 Существование множества натуральных чисел;

ZF6 Для любого множества X и свойства P его *подмножество* $\{x \in X \mid P(x)\}$ является множеством;

ZF7 Множество всех подмножеств множества X тоже является множеством;

Система аксиом Цермело-Френкеля

Девять аксиом, которые согласуются с интуитивной теорией множеств, т.е., например, всякий конечный набор элементов по-прежнему будет множеством.

ZF1 Определение равенства двух множеств;

ZF2 Существование пустого множества;

ZF3 Любое конечное множество является множеством;

ZF4 Объединение множеств является множеством;

ZF5 Существование множества натуральных чисел;

ZF6 Для любого множества X и свойства P его *подмножество* $\{x \in X \mid P(x)\}$ является множеством;

ZF7 Множество всех подмножеств множества X тоже является множеством;

ZF8 Пусть $Y \neq \emptyset$. Тогда $\exists x \in Y : \quad \forall z \in Y \quad z \notin x$.

Следствия аксиомы ZF8

ZF8 Пусть $Y \neq \emptyset$. Тогда $\exists x \in Y : \quad \forall z \in Y \quad z \notin x$.

Следствия аксиомы ZF8

ZF8 Пусть $Y \neq \emptyset$. Тогда $\exists x \in Y : \quad \forall z \in Y \quad z \notin x$.

- Заметим, что эта аксиома запрещает существование множеств, которые не являются обычными, т.е. $X \notin X$. Действительно, рассмотрим $Y = \{X\}$ — множество, в котором только один элемент. В качестве элемента x придется взять $x = X$, тогда все $z \in Y$, в том числе $z = x = X$ не принадлежат $x = X$.

Следствия аксиомы ZF8

ZF8 Пусть $Y \neq \emptyset$. Тогда $\exists x \in Y : \quad \forall z \in Y \quad z \notin x$.

- Заметим, что эта аксиома запрещает существование множеств, которые не являются обычными, т.е. $X \notin X$. Действительно, рассмотрим $Y = \{X\}$ — множество, в котором только один элемент. В качестве элемента x придется взять $x = X$, тогда все $z \in Y$, в том числе $z = x = X$ не принадлежат $x = X$.
- Так как множество всех множеств принадлежит самому себе, то его не существует.

Аксиома выбора

ZF9 Пусть A — непустое множество. Тогда существует функция f (выбора), которая каждому непустому подмножеству B множества A сопоставляет (выбирает) элемент из этого множества, т.е. $f(B) \in B$.

Аксиома выбора

ZF9 Пусть A — непустое множество. Тогда существует функция f (выбора), которая каждому непустому подмножеству B множества A сопоставляет (выбирает) элемент из этого множества, т.е. $f(B) \in B$.

Теорема Цермело

Любое непустое множество можно вполне упорядочить. Т.е. задать не нем линейный порядок так, чтобы в каждом его непустом подмножестве существовал минимальный элемент.

Аксиома выбора

ZF9 Пусть A — непустое множество. Тогда существует функция f (выбора), которая каждому непустому подмножеству B множества A сопоставляет (выбирает) элемент из этого множества, т.е. $f(B) \in B$.

Теорема Цермело

Любое непустое множество можно вполне упорядочить. Т.е. задать не нем линейный порядок так, чтобы в каждом его непустом подмножестве существовал минимальный элемент.

Лемма Цорна

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором для любой цепи существует верхняя грань. Тогда в $(A, \leq)$ существует максимальный элемент.

Аксиома выбора (1)

ZF9 Пусть A — непустое множество. Тогда существует функция f (выбора), которая каждому непустому подмножеству B множества A сопоставляет (выбирает) элемент из этого множества, т.е. $f(B) \in B$.

Теорема Цермело (2)

Любое непустое множество можно вполне упорядочить. Т.е. задать не нем линейный порядок так, чтобы в каждом его непустом подмножестве существовал минимальный элемент.

Лемма Цорна (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором для любой цепи существует верхняя грань. Тогда в $(A, \leq)$ существует максимальный элемент.

Теорема

Аксиома выбора, теорема Цермело и лемма Цорна эквивалентны.

Доказательство только (2) $\Rightarrow$ (3)

Дополнительные определения

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — вполне упорядоченное множество, $v \in A$. Тогда множество $A(v) = \{x \in A \mid x < v\}$ называется отрезком множества A.

Дополнительные определения

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — вполне упорядоченное множество, $v \in A$. Тогда множество $A(v) = \{x \in A \mid x < v\}$ называется отрезком множества A.

Упражнение.

1. $A(v) = \emptyset \Leftrightarrow v$ — минимальный элемент;
2. $\bigcup_{i \in I} A(v_i) = A$ или $A(v)$, где $v = \min\{A \setminus \bigcup_{i \in I} A(v_i)\}$.

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество.

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество. Заметим, что если $(B, \leq)$ — цепь, то $(B, \preceq)$ — тоже цепь. Обозначим через $B(v) = \{x \in B \mid x \prec v\}$ — отрезок цепи B.

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество. Заметим, что если $(B, \leq)$ — цепь, то $(B, \preceq)$ — тоже цепь. Обозначим через $B(v) = \{x \in B \mid x \prec v\}$ — отрезок цепи B. Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество. Заметим, что если $(B, \leq)$ — цепь, то $(B, \preceq)$ — тоже цепь. Обозначим через $B(v) = \{x \in B \mid x \prec v\}$ — отрезок цепи B. Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество. Заметим, что если $(B, \leq)$ — цепь, то $(B, \preceq)$ — тоже цепь. Обозначим через $B(v) = \{x \in B \mid x \prec v\}$ — отрезок цепи B. Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**
   Пусть $v_1 < v_2$. Так как цепь правильная, то
   $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) < x\}$.

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество. Заметим, что если $(B, \leq)$ — цепь, то $(B, \preceq)$ — тоже цепь. Обозначим через $B(v) = \{x \in B \mid x \prec v\}$ — отрезок цепи B. Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**
   Пусть $v_1 < v_2$. Так как цепь правильная, то $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) < x\}$. Так как $v_1 \in \{x \in A \mid B(v_1) < x\}$, то $B(v_1) < v_1$. Откуда $B(v_1) < v_2$.

Доказательство случая (2) $\to$ (3)

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., в котором каждая цепь имеет верхнюю грань. По теореме Цермело существует порядок $\prec$ (вообще говоря отличный от $\leq$) такой, что $(A, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество. Заметим, что если $(B, \leq)$ — цепь, то $(B, \preceq)$ — тоже цепь. Обозначим через $B(v) = \{x \in B \mid x \prec v\}$ — отрезок цепи B. Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.** Пусть $v_1 < v_2$. Так как цепь правильная, то $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) < x\}$. Так как $v_1 \in \{x \in A \mid B(v_1) < x\}$, то $B(v_1) < v_1$. Откуда $B(v_1) < v_2$. Следовательно, $v_2 \in \{x \in A \mid B(v_1) < x\}$. Так как v_1 — минимальный элемент по отношению $\preceq$, то $v_1 \prec v_2$.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если $\forall v \in B$

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если $\forall v \in B$

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**
   И обратно, пусть $v_1 \prec v_2$. Тогда $v_1 \in B(v_2) = \{x \in B \mid x \prec v_2\}$.
   Так как цепь правильная, то $B(v_2) < v_2$. Следовательно, $v_1 < v_2$.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если $\forall v \in B$

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**
   И обратно, пусть $v_1 \prec v_2$. Тогда $v_1 \in B(v_2) = \{x \in B \mid x \prec v_2\}$.
   Так как цепь правильная, то $B(v_2) < v_2$. Следовательно, $v_1 < v_2$.
2. **Правильные цепи существуют**

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если $\forall v \in B$

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**
   И обратно, пусть $v_1 \prec v_2$. Тогда $v_1 \in B(v_2) = \{x \in B \mid x \prec v_2\}$.
   Так как цепь правильная, то $B(v_2) < v_2$. Следовательно, $v_1 < v_2$.
2. **Правильные цепи существуют**
   Рассмотрим w — наименьший элемент в $(A, \preceq)$. Пусть $B = \{w\}$.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если $\forall v \in B$

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

1. **Если цепь правильная, то отношения $\leq$ и $\preceq$ совпадают.**
   И обратно, пусть $v_1 \prec v_2$. Тогда $v_1 \in B(v_2) = \{x \in B \mid x \prec v_2\}$.
   Так как цепь правильная, то $B(v_2) < v_2$. Следовательно, $v_1 < v_2$.
2. **Правильные цепи существуют**
   Рассмотрим w — наименьший элемент в $(A, \preceq)$. Пусть $B = \{w\}$.
   Тогда $B(w) = \emptyset$ и $\{x \in A \mid \emptyset < x\} = A$, и действительно
   $w = \min_{\preceq} A$.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3 **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3 **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**
Пусть $C = B(v_1) = B(v_2)$ — наибольший общий отрезок.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3 **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**
Пусть $C = B(v_1) = B(v_2)$ — наибольший общий отрезок. Тогда $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) = C = B(v_2) < x\} = v_2$, откуда $C \cup \{v_1\}$ — больший общий отрезок.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3. **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**
   Пусть $C = B(v_1) = B(v_2)$ — наибольший общий отрезок. Тогда $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) = C = B(v_2) < x\} = v_2$, откуда $C \cup \{v_1\}$ — больший общий отрезок.
4. $D = \bigcup_{i \in I} B_i$ — **правильная цепь (объединение всех правильных цепей).**

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3. **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**
   Пусть $C = B(v_1) = B(v_2)$ — наибольший общий отрезок. Тогда $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) = C = B(v_2) < x\} = v_2$, откуда $C \cup \{v_1\}$ — больший общий отрезок.
4. $D = \bigcup_{i \in I} B_i$ — **правильная цепь (объединение всех правильных цепей).**
   D — цепь, так как для любых $x, y \in D \quad \exists i, j \in I : x \in B_i, y \in B_j$. Без ограничения общности можно считать, что B_i — отрезок B_j. Тогда x, y сравнимы в B_j.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3. **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**
   Пусть $C = B(v_1) = B(v_2)$ — наибольший общий отрезок. Тогда $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) = C = B(v_2) < x\} = v_2$, откуда $C \cup \{v_1\}$ — больший общий отрезок.
4. $D = \bigcup_{i \in I} B_i$ — **правильная цепь (объединение всех правильных цепей).**
   D — цепь, так как для любых $x, y \in D \quad \exists i, j \in I : x \in B_i, y \in B_j$. Без ограничения общности можно считать, что B_i — отрезок B_j. Тогда x, y сравнимы в B_j. Покажем, что D — правильная цепь.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

3. **Пусть $(B_1, \leq)$, $(B_2, \leq)$ — две правильные цепи, покажем, что одна из них является отрезком другой.**
   Пусть $C = B(v_1) = B(v_2)$ — наибольший общий отрезок. Тогда $v_1 = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v_1) = C = B(v_2) < x\} = v_2$, откуда $C \cup \{v_1\}$ — больший общий отрезок.
4. $D = \bigcup_{i \in I} B_i$ — **правильная цепь (объединение всех правильных цепей).**
   D — цепь, так как для любых $x, y \in D \quad \exists i, j \in I : x \in B_i, y \in B_j$. Без ограничения общности можно считать, что B_i — отрезок B_j. Тогда x, y сравнимы в B_j. Покажем, что D — правильная цепь. Рассмотрим $v \in D$, тогда $\exists i \in I \quad v \in B_j$. Следовательно, $v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B_j(v) < x\}$. Так как $D(v) = \cup_{i \in I} B_i(v)$, то $B_j(v) = D(v)$ и цепь D правильная.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

5 Так как D — цепь, то по условию существует верхняя граница u для D в A. Тогда u — **максимальный элемент в** A

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

5 Так как D — цепь, то по условию существует верхняя граница u для D в A. Тогда u — **максимальный элемент в** A
От противного, пусть существует $v \in A$ такой, что $u < v$. Тогда $v \in \{x \in A \mid D < x\} \neq \emptyset$.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

5 Так как D — цепь, то по условию существует верхняя граница u для D в A. Тогда u — **максимальный элемент в** A
От противного, пусть существует $v \in A$ такой, что $u < v$. Тогда $v \in \{x \in A \mid D < x\} \neq \emptyset$. Рассмотрим $a = \min_{\preceq}\{x \in A \mid D < x\}$. Покажем, что $D' = D \cup \{a\}$ снова правильная цепь, содержащая в себе объединение *всех* правильных цепей.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

5 Так как D — цепь, то по условию существует верхняя граница u для D в A. Тогда u — **максимальный элемент в** A
От противного, пусть существует $v \in A$ такой, что $u < v$. Тогда $v \in \{x \in A \mid D < x\} \neq \emptyset$. Рассмотрим $a = \min_{\preceq}\{x \in A \mid D < x\}$.
Покажем, что $D' = D \cup \{a\}$ снова правильная цепь, содержащая в себе объединение *всех* правильных цепей.
Для $\forall d \in D \quad d \notin \{x \in A \mid D < x\}$,

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

5 Так как D — цепь, то по условию существует верхняя граница u для D в A. Тогда u — **максимальный элемент в** A
От противного, пусть существует $v \in A$ такой, что $u < v$. Тогда $v \in \{x \in A \mid D < x\} \neq \emptyset$. Рассмотрим $a = \min_{\preceq}\{x \in A \mid D < x\}$.
Покажем, что $D' = D \cup \{a\}$ снова правильная цепь, содержащая в себе объединение *всех* правильных цепей.
Для $\forall d \in D \quad d \notin \{x \in A \mid D < x\}$, тогда $d \prec a$. Следовательно, $D \prec a$.

Доказательство случая (2) $\Rightarrow$ (3)

Цепь B назовем *правильной*, если

$$v = \min_{\preceq}\{x \in A \mid B(v) < x\}$$

5 Так как D — цепь, то по условию существует верхняя граница u для D в A. Тогда u — **максимальный элемент в** A
От противного, пусть существует $v \in A$ такой, что $u < v$. Тогда $v \in \{x \in A \mid D < x\} \neq \emptyset$. Рассмотрим $a = \min_{\preceq}\{x \in A \mid D < x\}$. Покажем, что $D' = D \cup \{a\}$ снова правильная цепь, содержащая в себе объединение *всех* правильных цепей.
Для $\forall d \in D \quad d \notin \{x \in A \mid D < x\}$, тогда $d \prec a$. Следовательно, $D \prec a$. Откуда $\forall d \in D \quad D'(d) = D(d)$ и $D'(a) = D$. Подставив эти соотношения в определение правильной цепи мы убедимся, что D' — правильная цепь. Получили противоречие с тем, что u не максимальный элемент в A.

Пример применения леммы Цорна

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ (не обязательно конечномерное). Множество векторов $B \subseteq V$ является линейно независимым, если любое его *конечное* подмножество линейно независимо.

Пример применения леммы Цорна

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ (не обязательно конечномерное). Множество векторов $B \subseteq V$ является линейно независимым, если любое его *конечное* подмножество линейно независимо.

Определение

Базисом линейного пространства V называется максимальное линейно независимое множество $B \subseteq V$.

Пример применения леммы Цорна

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ (не обязательно конечномерное). Множество векторов $B \subseteq V$ является линейно независимым, если любое его *конечное* подмножество линейно независимо.

Определение

Базисом линейного пространства V называется максимальное линейно независимое множество $B \subseteq V$.

Следствие леммы Цорна

В любом линейном пространстве существует базис.

Пример применения леммы Цорна

Следствие леммы Цорна

В любом линейном пространстве существует базис.

Пример применения леммы Цорна

Следствие леммы Цорна

В любом линейном пространстве существует базис.

Рассмотрим $A = \{B \subseteq V \mid B$ линейно независимое множество$\}$ и ч.у.м. $(A, \subseteq)$.

Пример применения леммы Цорна

Следствие леммы Цорна

В любом линейном пространстве существует базис.

Рассмотрим $A = \{B \subseteq V \mid B$ линейно независимое множество$\}$ и ч.у.м. $(A, \subseteq)$.
Покажем, что любая цепь в A имеет верхнюю границу. Пусть $X = \{B_i\}_{i \in I}$ — цепь, рассмотрим $C = \bigcup_{i \in I} B_i$. Убедимся, что $C \in A$, т.е. является линейно независимым. Действительно, любое его конечное подмножество лежит в одном из B_i и, следовательно, является линейно независимым.

Пример применения леммы Цорна

Следствие леммы Цорна

В любом линейном пространстве существует базис.

Рассмотрим $A = \{B \subseteq V \mid B$ линейно независимое множество$\}$ и ч.у.м. $(A, \subseteq)$.
Покажем, что любая цепь в A имеет верхнюю границу. Пусть $X = \{B_i\}_{i \in I}$ — цепь, рассмотрим $C = \bigcup_{i \in I} B_i$. Убедимся, что $C \in A$, т.е. является линейно независимым. Действительно, любое его конечное подмножество лежит в одном из B_i и, следовательно, является линейно независимым. По лемме Цорна мы получаем, что в V существует максимальное линейно независимое множество векторов.