

Признак Даламбера

Теорема 1 (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами, $u_n > 0$ существует конечный предел

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Тогда

- 1) если $0 \leq d < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится**;
- 2) если $d > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **расходится**;
- 3) если $d = 1$, то вопрос о сходимости остается **открытым**.

Признак Даламбера. Задача 1

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение.

1) Заметим, что применение признака сравнения затруднительно.

2) Применим **признак Даламбера**:

$$u_n = \frac{n}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Признак Даламбера. Задача 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \right] = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку Даламбера.

Признак Даламбера. Задача 2

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

Решение.

Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{n!}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)! 3^n}{n! 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)!}{n!} =$$

Признак Даламбера. Задача 2

$$= \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n} \cdot (n+1)}{3(\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n})} = \frac{n+1}{3}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1$$

Ответ: ряд **расходится** по признаку Даламбера.

Признак Даламбера. Задача 3

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Решение.

Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Признак Даламбера. Задача 3

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(\cancel{n+1})}{(\cancel{n+1})(n+2)} =$$

$$= \frac{n}{n+2}; \quad d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} =$$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \right] = 1 \Rightarrow \text{Признак Даламбера ответа не дает.}$$

Признак Даламбера. Задача 3

Заметим, что

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

Признак Даламбера. Задача 3

Значит, частичная сумма ряда равна

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \text{сумма ряда равна}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \left[1 - \frac{1}{\infty}\right] = 1$$

Ответ: ряд **сходится по определению** (более простой способ рассмотрим в задаче 8).

Радикальный признак Коши

Теорема 2 (радикальный признак Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует конечный предел

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

Тогда

- 1) если $0 \leq q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится**;
- 2) если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **расходится**;
- 3) если $q = 1$, то вопрос о сходимости остается **открытым**.

Радикальный признак Коши

Замечание. При применении радикального признака Коши часто используют формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$$

Радикальный признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопиталля} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^0 = 1 \blacksquare$$

Радикальный признак Коши. Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Решение.

Применим **радикальный признак Коши:**

$$u_n = \frac{n}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Радикальный признак Коши. Задача 4

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}{2} =$$
$$= \underline{\text{Замечание}} = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: ряд **сходится** по радикальному признаку Коши.

Радикальный признак Коши. Задача 5

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Радикальный признак Коши. Задача 5

Решение.

Применим **радикальный признак Коши**:

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \frac{n}{2n+1}$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \right] = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: ряд **сходится** по радикальному признаку Коши.

Интегральный признак Коши

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами выполняются условия

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;

2) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots (u_n \downarrow)$;

3) $f(n) = u_n$;

4) $f(x)$ определена и непрерывна на $[1, +\infty)$,
 $f(x) > 0, f(x) \downarrow$ на $[1, +\infty)$.

Интегральный признак Коши

Тогда

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

либо одновременно сходятся,
либо одновременно расходятся.

Интегральный признак Коши. Задача 6

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Решение.

1. Применить признак сравнения невозможно (не с чем сравнивать).

2. Применим **признак Даламбера:**

$$u_n = \frac{1}{n} \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Интегральный признак Коши. Задача 6

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \right] = 1 \Rightarrow \text{Признак Даламбера ответа не дает.}$$

Интегральный признак Коши. Задача 6

3. Применим радикальный признак Коши.

$$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} =$$

$$= [\text{Замечание 1}] = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \text{Радикальный признак Коши тоже не дает ответа}$$

Интегральный признак Коши. Задача 6

4. Применим интегральный признак Коши.

Проверим его условия.

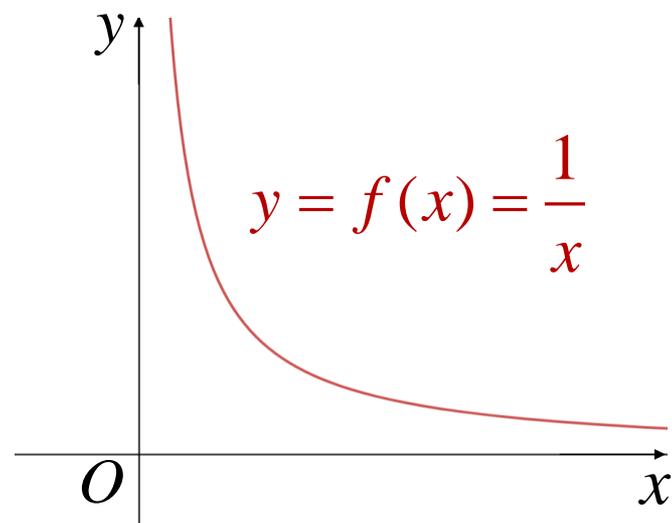
$$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$2) u_n = \frac{1}{n} \downarrow;$$

$$3) f(n) = u_n = \frac{1}{n}$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна, $f(x) > 0$, $f(x) \downarrow$
на $[1; +\infty)$.



Интегральный признак Коши. Задача 6

$$\text{Интеграл } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} =$$

$$= [\ln(+\infty) - \ln 1] = +\infty \text{ расходится.}$$

$$\Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится.}$$

Ответ: ряд **расходится** по интегральному признаку Коши.

Сходимость гармонического ряда

Следствие.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Док-во: упр.

Указание: рассмотреть два случая:

- 1) $\alpha \leq 0$ – тогда ряд расходится по необходимому признаку;
- 2) $\alpha > 0$ – аналогично задаче 6.

Интегральный признак Коши. Задача 7

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Решение.

- Применение других признаков не приводит к результату.
- Применим **интегральный признак Коши.**
- Условия проверить сам-но: см. задачу 6 (упр.)

Интегральный признак Коши. Задача 7

$$\text{Интеграл } \int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \rightarrow t = \ln 2 \\ x = +\infty \rightarrow t = +\infty \end{array} \right] =$$

Интегральный признак Коши. Задача 7

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = [\ln(+\infty) - \ln(\ln 2)] = +\infty$$

Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ расходится \Rightarrow

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

Ответ: ряд **расходится** по интегральному признаку Коши.

Предельный признак сравнения

Теорема 4 (предельный признак сравнения).

Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, с положительными членами существует конечный предел

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$$

Причем $0 < K < +\infty$.

Предельный признак сравнения

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

либо одновременно сходятся,
либо одновременно расходятся.

В этом случае ряды называются
эквивалентными и обозначаются

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Предельный признак сравнения ($K=0$)

Теорема 5 (предельный признак сравнения, $K=0$).

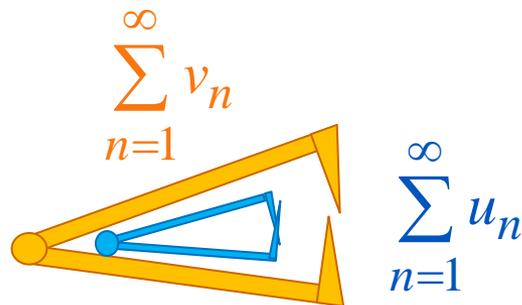
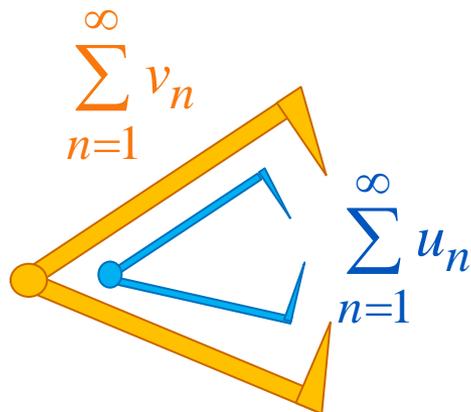
Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, с
положительными членами предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty \right)$$

Предельный признак сравнения ($K=0$)

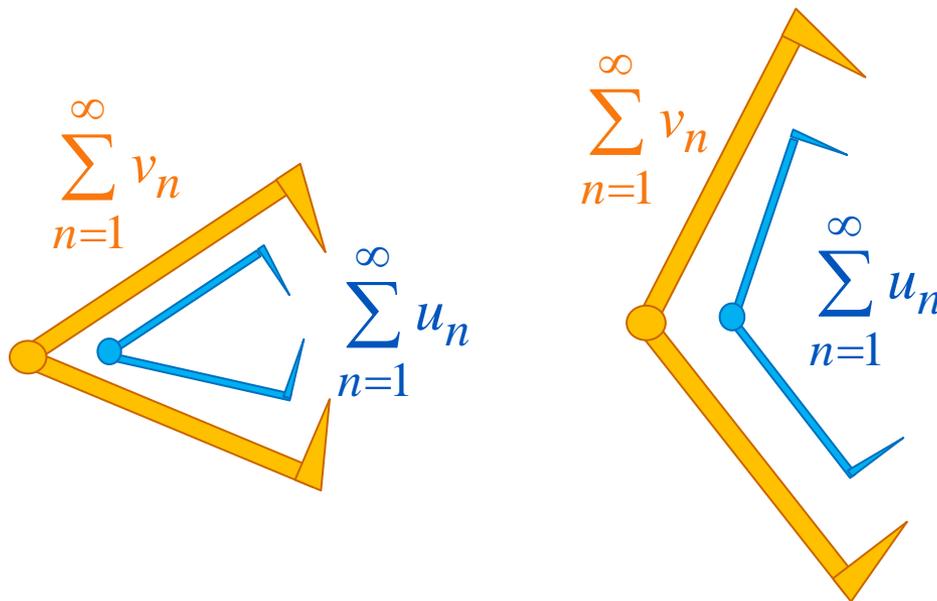
Тогда из сходимости «большого» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$
следует сходимость «меньшего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$



Предельный признак сравнения ($K=0$)

А из расходимости «меньшего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

следует расходимость «большого» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$



Предельный признак сравнения

Задача 8

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Применим предельный признак сравнения.

«Нестрогое» решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится } (\alpha = 2 > 1)$$

Предельный признак сравнения

Задача 8

«Строгое» решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad v_n = \frac{1}{n^2}$$

Предельный признак сравнения

Задача 8

«Строгое» решение.

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{1+0} \right] = 1 \end{aligned}$$

Предельный признак сравнения

Задача 8

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{- сходится как гармонический ряд}$$

\Rightarrow исходный ряд сходится

Ответ: ряд **сходится** по предельному признаку сравнения.

Предельный признак сравнения

Задача 9

Задача 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Решение. Применим **предельный признак сравнения.**

Хотя можно использовать просто признак сравнения или интегральный признак Коши.

Предельный признак сравнения

Задача 9

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad u_n = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \quad v_n = \frac{\ln n}{n}$$

Предельный признак сравнения

Задача 9

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

«Меньший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

⇓

«Большой» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ расходится

Ответ: ряд **расходится** по предельному признаку сравнения.

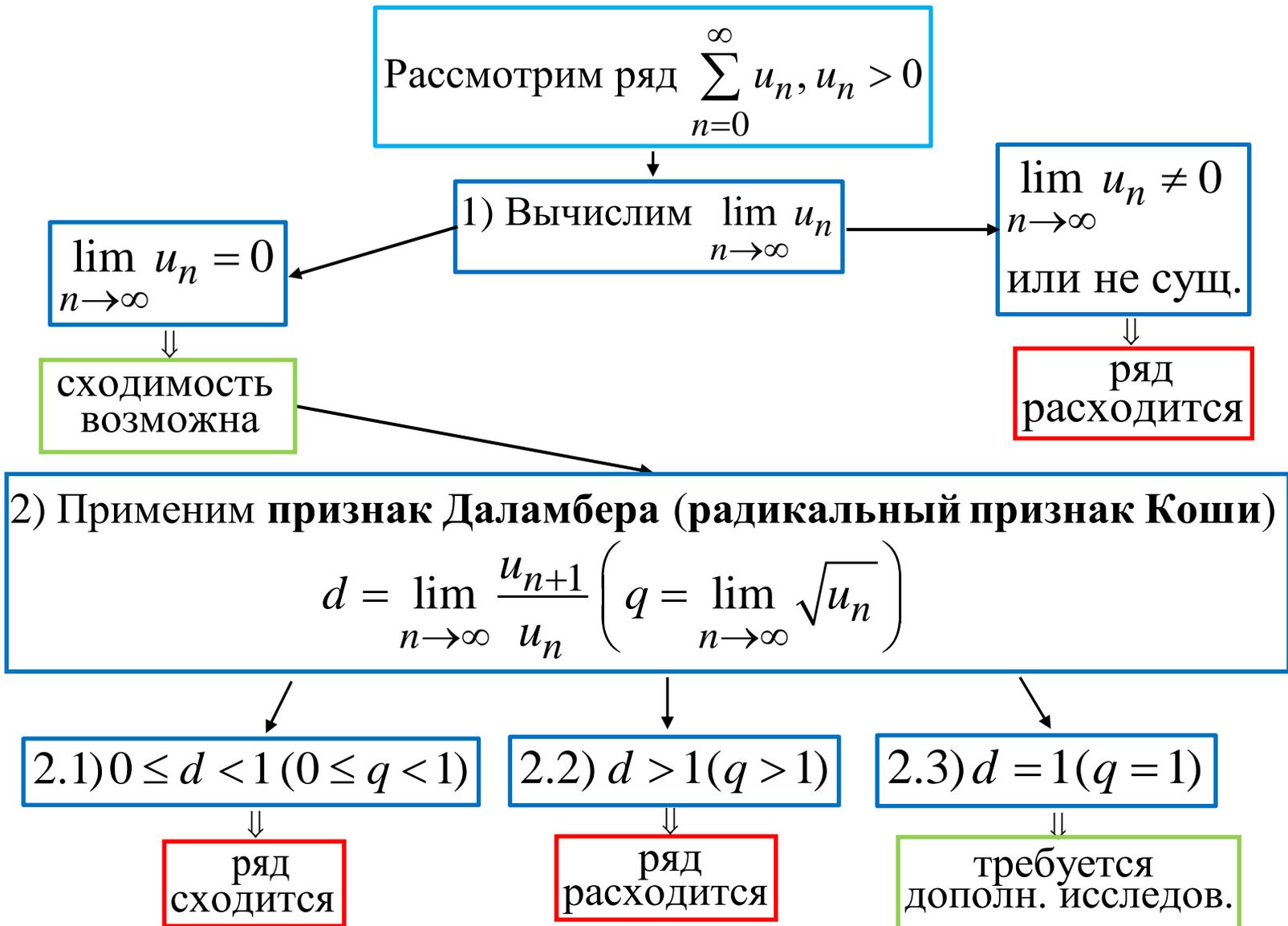
Алгоритм исследования на сходимость знакоположительного ряда

Для решения задач удобно использовать

[Алгоритм исследования на сходимость
знакоположительного ряда](#)

(см. следующие слайды; их можно не конспектировать)

Алгоритм исследования на сходимость знакоположительного ряда



требуется
дополн. исследов.

3) можно применить
предельный признак сравнения?

Да

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

3.1) $0 < \alpha \leq 1$

ряд
расходится

3.2) $\alpha > 1$

ряд
сходится

Нет

4) можно применить
интегральный признак Коши?

Да

$$4.1) \int_1^{\infty} f(x) dx$$

сходится

ряд
сходится

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \int_1^{\infty} f(x) dx$$

$$4.2) \int_1^{\infty} f(x) dx$$

расходится

ряд
расходится

Нет

5) можно применить
признак сравнения

ряд
сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расход.

ряд
сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$