Определение числовой последовательности

Опр. Числовая последовательность – упорядоченный бесконечный набор чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Замечание: числовая последовательность – это функция $x_n = f(n)$.

Обозначение числовой последовательности $\{x_n\}$.

Определение числовой последовательности

<u>Примеры:</u>

1) 1, 2, 3, 4, … $\qquad x_n = n$

2) 2, 4, 6, 8, … $\qquad x_n = 2n$

3) 1, 3, 5, 7, … $\qquad x_n = 2n - 1$

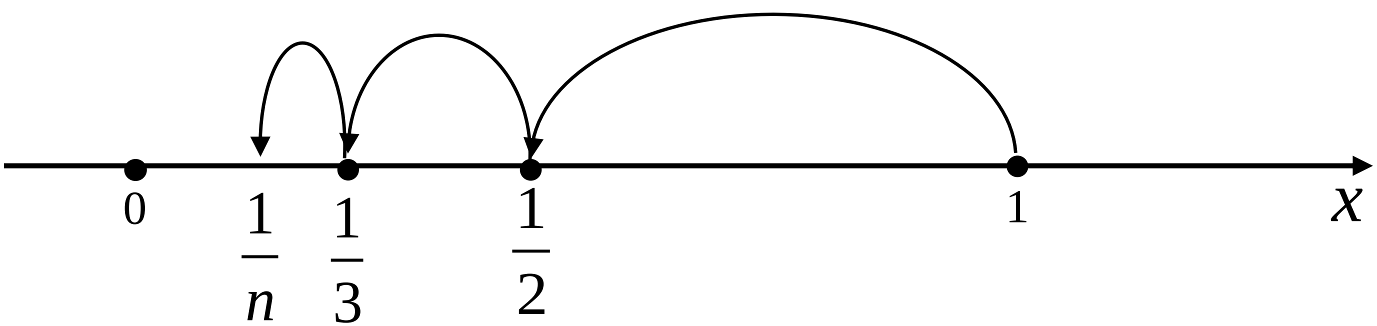
4) 2, 4, 8, 16, … $\qquad x_n = 2^n$

5) – 1, 1, – 1, 1, … $\qquad x_n = (-1)^n$

Определение числовой последовательности

6) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad x_n = \frac{1}{n}$

Иллюстрация:

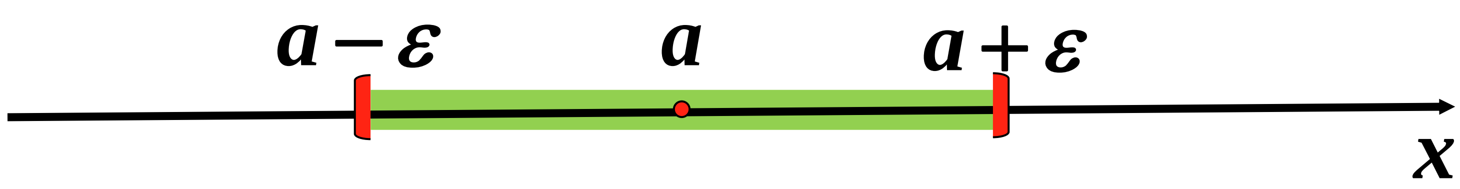


Определение ε-окрестности

<u>Опр.</u> ε-окрестностью точки a называется множество

$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$ т.е., интервал

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



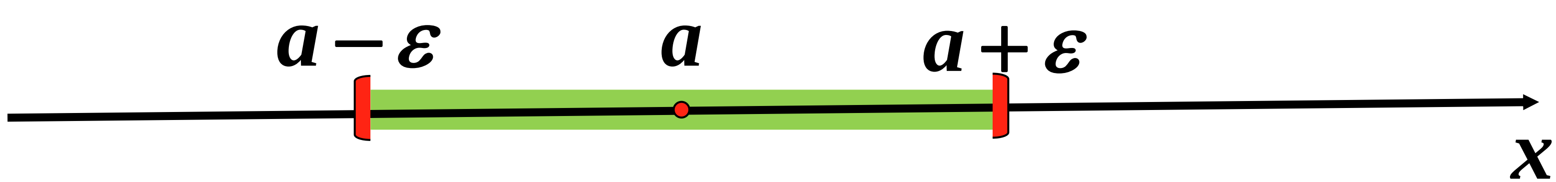
Обозначение: $O_{\varepsilon}(a)$

Определение ε-окрестности

<u>Опр.</u> ε-окрестностью точки a называется множество

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$ т.е., интервал

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



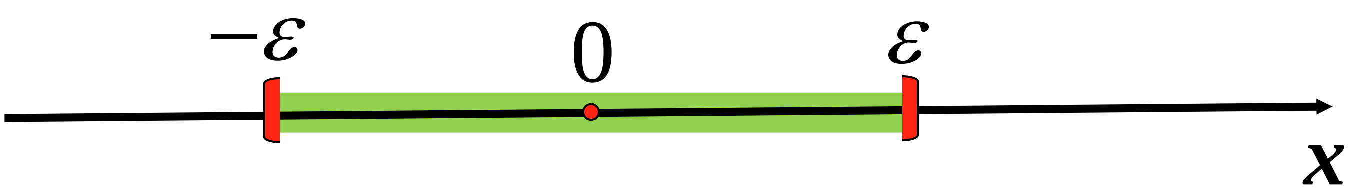
Обозначение: $O_{\varepsilon}(a)$

Определение ε-окрестности

Пример 1.

$$O_{\varepsilon}(0)=\{x\in\mathbb{R}:|x-0|<\varepsilon\}=\{x\in\mathbb{R}:|x|<\varepsilon\}$$

$$=(-\varepsilon,\varepsilon)$$

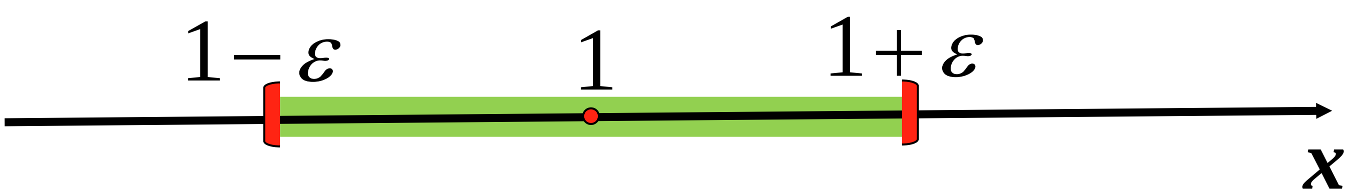


Определение ε-окрестности

<u>Пример 2.</u>

$$O_{\varepsilon}(1)=\left\{x\in\mathbb{R}:|x-1|<\varepsilon\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:|x-1|<\varepsilon\right\}$$

$$=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$$



$$O_{0.01}(1)=(0.99,1.01)$$

Определение предела числовой последовательности

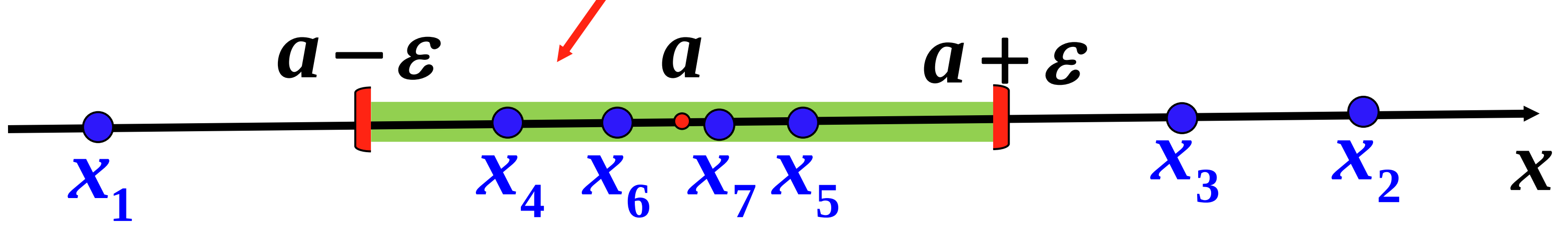
Опр. Пределом числовой последовательности $\{x_n\}$ называется число a, такое, что для любой (сколь угодно малой) ε-окрестности, ε > 0, числа a существует номер N=N(ε), начиная с которого все члены последовательности лежат в ε-окрестности, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \left(|x_n - a| < \varepsilon \right)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Определение предела числовой последовательности

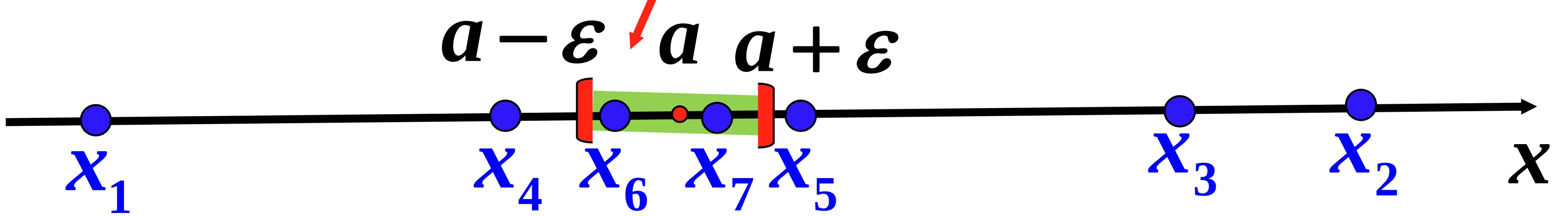
Начиная с номера $N(\varepsilon)$ ВСЕ члены $\{x_n\}$ последовательности



попадут в $\varepsilon-$*окрестность* точки a

Определение предела числовой последовательности

Начиная с номера $\boldsymbol{N(\varepsilon)}$ ВСЕ члены $\{x_n\}$ последовательности



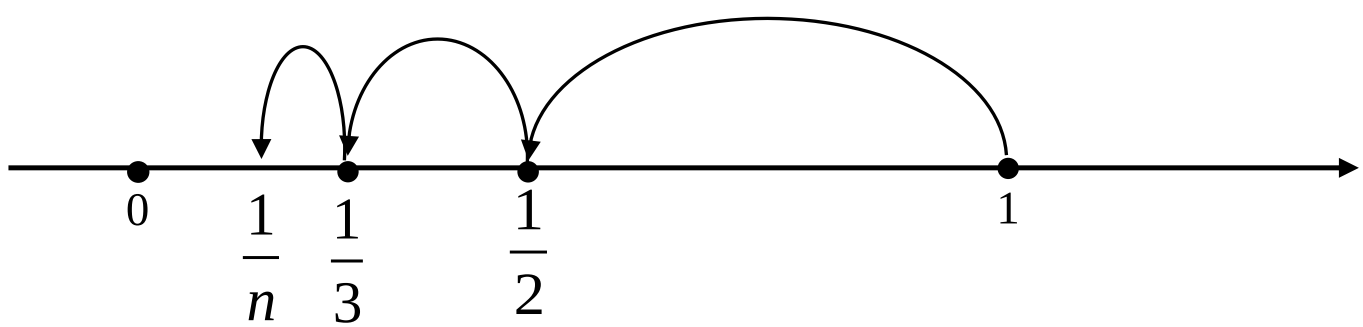
попадут в $\varepsilon - \textit{окрестность}$ точки a

Определение предела числовой последовательности

<u>Пример 3.</u>

Для последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad x_n = \frac{1}{n} \qquad a = 0$$



Определение предела числовой последовательности

Пусть ε > 0. Найдем номера *n*, для которых

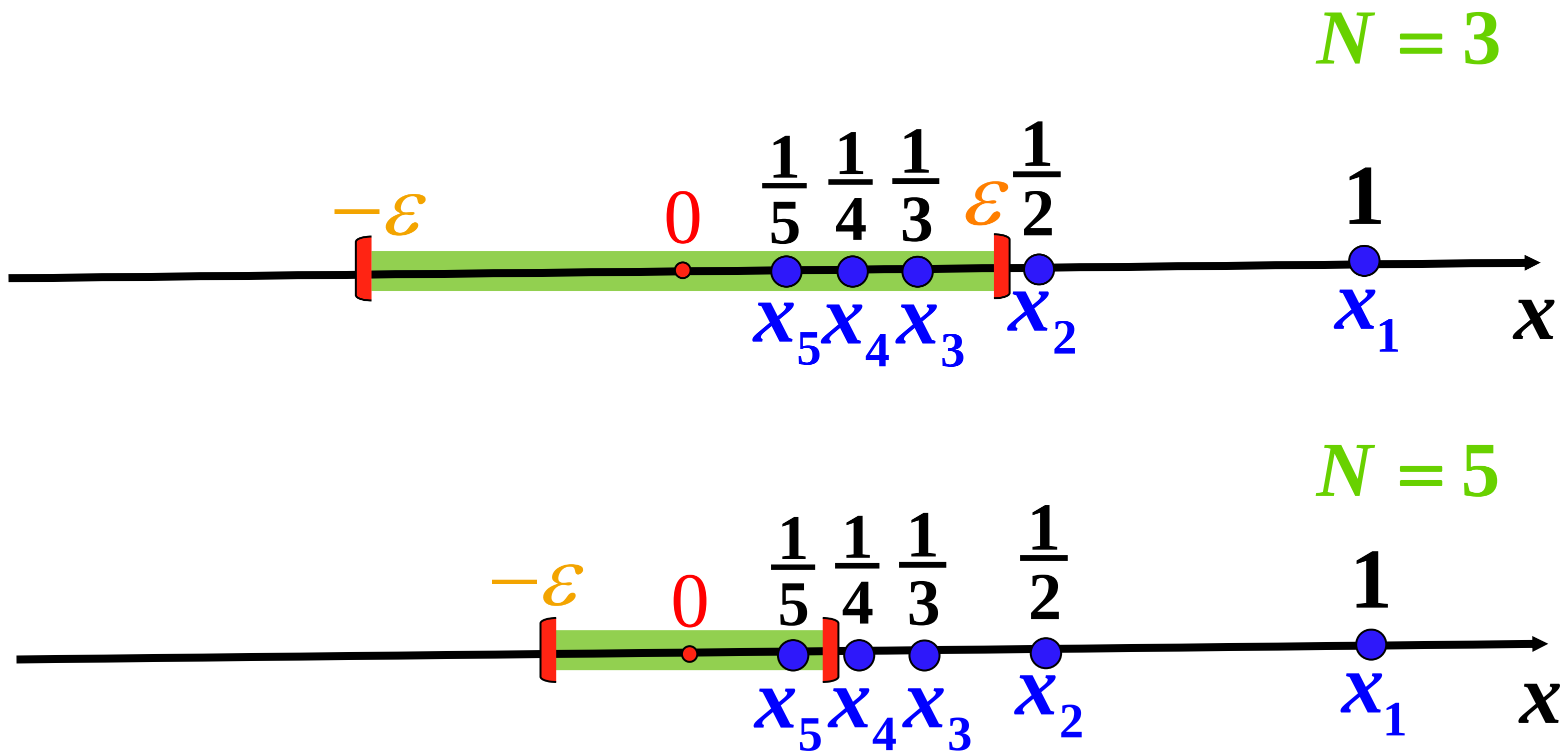
$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

N =*N*(ε) - наименьшее целое число,
большее или равное $\frac{1}{\varepsilon}$

Например, для $\varepsilon = 0.1$ $N \geq \frac{1}{0.1}$ $N = 10$

$$\varepsilon = 0.0012 \quad N \geq \frac{1}{0.0012} \approx 833,3 \quad N = 834$$

Определение предела числовой последовательности



Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. Пусть $x_n = a$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

Предел константной последовательности равен константе.

Свойство 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$.

Предел суммы/разности двух последовательностей равен сумме/разности их пределов.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

<u>Свойство 3.</u> Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$.

Предел произведения двух последовательностей равен произведению их пределов.

<u>Свойство 4.</u> Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c x_n = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$.

Константу можно вынести за знак предела.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Свойство 5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\, m \in \mathbb{N}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^m = a^m$.

Предел степени последовательности равен степени предела этой последовательности.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Свойство 6. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. И $b \neq 0$.

Тогда $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$.

Предел частного двух последовательностей, если предел знаменателя не равен нулю, равен частному их пределов.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3$

Решение. Применим арифметические свойства пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3 = (1+0)^3 = 1$$

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+1}{2n^3-n-2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+1}{2n^3-n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^3-3n^2+1}{n^3}}{\dfrac{2n^3-n-2}{n^3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^3}{n^3}-\dfrac{3n^2}{n^3}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{n}{n^3}-\dfrac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=\frac{1-0+0}{2-0-0}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^3=0$$

Бесконечно малые последовательности

Опр. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Пример 12. Последовательности

$\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ и

$\{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\right\}$ –

бесконечно малые.

Бесконечно малые последовательности

<u>Свойства б.м.последов-тей</u>

(1) Сумма/разность б.м. последовательностей – б. м. последовательность.

(2) Б.м. последовательность, умноженная на ограниченную - б. м. последовательность.

(3) Б.м. последовательность, умноженная на константу – б. м. последовательность.

(4) Произведение б. м. последовательностей – б. м. последовательность.

Определение бесконечно большой последовательности

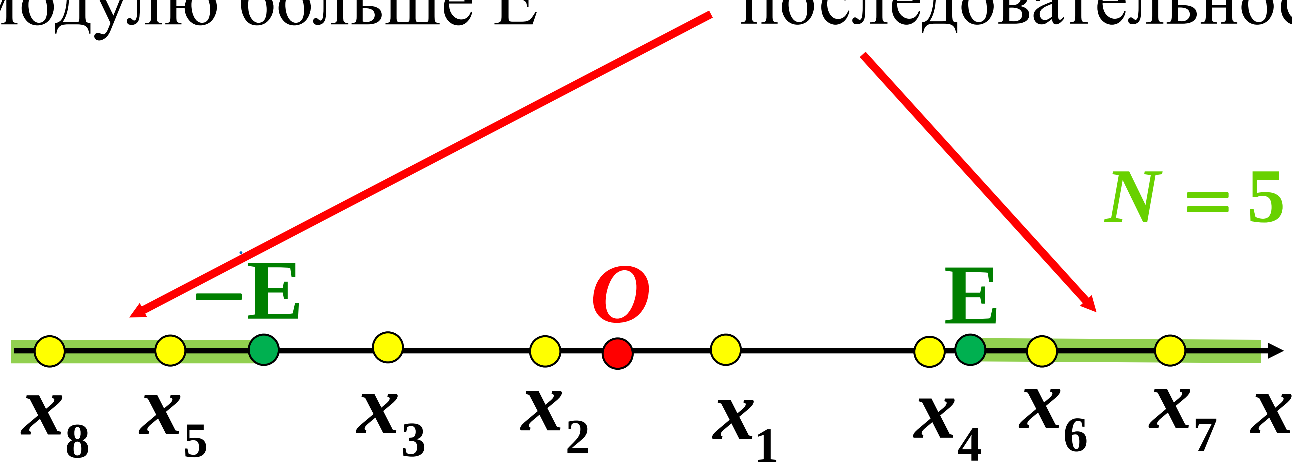
Опр. Бесконечно большой называется такая последовательность $\{x_n\}$, что для любого (сколь угодно большого) числа Е > 0 существует номер N=N(Е), начиная с которого для все члены последовательности $\{x_n\}$ больше по модулю Е, т.е.

$$\forall \mathrm{E} > 0 \; \exists N = N(\mathrm{E}) \; \forall n \geq N \; \left(|x_n| > \mathrm{E} \right)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Определение бесконечно большой последовательности

Начиная с номера $N(\varepsilon)$ ВСЕ члены последовательности по модулю больше Е



$$|x_n| > \text{Е} \Leftrightarrow \left(x_n > \text{Е или } x_n < -\text{Е}\right)$$

Определение предела числовой последовательности

Пример 4.

Для последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = n^2$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$$

Определение предела числовой последовательности

Пусть E > 0. Найдем номера n, для которых

$|x_n| > \mathrm{E}$:

$$\left|n^2\right| > \mathrm{E} \Leftrightarrow n^2 > \mathrm{E} \Leftrightarrow n > \sqrt{\mathrm{E}}$$

$N = N(\mathrm{E})$ - наименьшее целое число, большее или равное $\sqrt{\mathrm{E}}$

Например, для $\mathrm{E} = 50$ $N \geq \sqrt{50} \approx 7.1$ $N = 8$

$\mathrm{E} = 1000$ $N \geq \sqrt{1000} \approx 31.6$ $N = 32$

Связь б.м. и б.б. последовательностей

Теорема.

(1) Последовательность $\{\alpha_n\}$ является б.м. тогда и только тогда, когда последовательность $\{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является б.б.

(2) Последовательность $\{\beta_n\}$ является б.б. тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{\beta_n}\right\}$ является б.м.

Связь б.б. и б.м. последовательностей

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3n^2-4}{n^2}}{\dfrac{2n+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-\overbrace{\dfrac{1}{n^3}}^{0}}{\underbrace{\dfrac{2}{n}}_{0}+\underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{0}} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$$