

ЗАДАЧИ для подготовки к контрольным, проверочным и самостоятельным работам по курсу «Математика», II семестр. Часть 2 «Неопределенный интеграл»

Непосредственное интегрирование, замена в неопределенном интеграле

№	Условие задачи	Ответы, указания
1	<p>Найти неопределенный интеграл. Результат проверить дифференцированием.</p> $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2} dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^3} - 3x^4 + 2}{x} dx$	<p>Указание: разбить в сумму интегралов, воспользоваться таблицей интегралов.</p>
2	<p>Найти неопределенный интеграл. Результат проверить дифференцированием.</p> $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}, \quad \int (1-4x)^7 dx, \quad \int \sqrt[4]{1+3x} dx, \quad \int \frac{dx}{3-5x}$ $\int \cos(2+3x) dx, \quad \int \sin(8x-3) dx, \quad \int e^{3-4x} dx$	<p>Презентация «Неопределенный интеграл», слайды 9-13</p>
3	<p>Найти неопределенный интеграл. Результат проверить дифференцированием.</p> $\int e^{4-x^2} x dx, \quad \int e^{\sin x + 1} \cos x dx, \quad \int e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx, \quad \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$ $\int \sin^4 4x \cos 4x dx, \quad \int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx, \quad \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x - 2}} dx$ $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx, \quad \int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x} dx$ $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^4 x}, \quad \int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}} dx$ $\int x^2 \sin(2x^3 - 1) dx$	<p>Презентация «Неопределенный интеграл», слайды 14</p>

Интегрирование по частям, интегрирование функций, содержащих квадратичный трехчлен в знаменателе

№	Условие задачи	Ответы, указания
4	Найти неопределенный интеграл. Результат проверить дифференцированием. $\int x \sin 3x dx, \int x \cos 5x dx, \int x e^{-2x} dx$	Презентация «Неопределенный интеграл», слайды 15-18
5	Найти неопределенный интеграл. Результат можно проверить дифференцированием. $\int x \cos(x-2) dx \int (x+4) \sin 3x dx \int x e^{x+2} dx$	То же
6	Найти неопределенный интеграл. Результат можно проверить дифференцированием. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx \int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx \int \arcsin 5x dx \int \ln(x+8) dx$	Презентация «Неопределенный интеграл», слайды 19-20
7	В интегралах а) $\int x e^{2x+3} dx$, б) $\int x \sin(3x-1) dx$ применить формулу интегрирования по частям двумя способами.	Презентация «Неопределенный интеграл», слайды 15-18
8	Найти неопределенный интеграл. Результат можно проверить дифференцированием. $\int \frac{dx}{9x^2+3} \int \frac{dx}{5x^2-3} \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}} \int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$	Указание: свести к табличным интегралам
9	Найти неопределенный интеграл. Результат можно проверить дифференцированием. $\int \frac{x dx}{2x^2+9} \int \frac{5x dx}{\sqrt{3-5x^2}} \int \frac{5-x}{2+x^2} dx \int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}} dx$	Презентация «Интегрир. функц., содерж. квадр. трехчл. в знамен.», слайды 2-9
10	Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx$	Презентация «Интегрир. функц., содерж. квадр. трехчл. в знамен.», слайды 10-14

Интегрирование дробно-рациональных функций

№	Условие задачи	Ответы, указания
	Интегрирование рациональных дробей (теория)	Презентация «Интегриров. дробно-рацион. функций»
	<p>С л у ч а й 1. Знаменатель имеет только действительные различные корни, т. е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени.</p> <p>1419. Найти интеграл $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$.</p> <p>$\Delta$ Так как каждый из двухчленов $x-1$, $x-2$, $x-4$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:</p> $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$	[1]
11	<p>Найти неопределенный интеграл</p> $\int \frac{-8 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + 45 \cdot x + 23}{x^2 + x - 6} dx$	[3] [-4x ² -3x+1ln(x-2)-1ln(x+3)]
	<p>С л у ч а й 2. Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них кратные, т. е. знаменатель разлагается на множители первой степени и некоторые из них повторяются.</p> <p>1420. Найти интеграл $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx$.</p> <p>$\Delta$ Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей $\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$, а множителю $x+3$ — простейшая дробь $\frac{D}{x+3}$. Итак,</p> $\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$	[1]
12	<p>Разложить подынтегральную функцию в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами (коэффициенты можно не вычислять)</p> <p>2022. $\int \frac{(x^2-3x+2) dx}{x(x^2+2x+1)}$ 2025. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$.</p> <p>2034. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx$.</p>	[2]
	<p>С л у ч а й 3. Знаменатель имеет неповторяющиеся квадратичные множители с отрицательным дискриминантом.</p> <p>1421. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$.</p> <p>Δ Разложим знаменатель на множители: $x^5-x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1)$.</p> <p>Тогда</p> $\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2+x+1}.$	[1]
13	<p>Разложить функцию в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами (коэффициенты можно не вычислять)</p> $\frac{-4+2x-2x^2-4x^3+5x^4}{(-5+x)(-1+x)^2(3-x+x^2)} = \frac{-1+2x-x^2+x^3}{(-2+x)(4+x)^3(2+x+x^2)}$	
14	<p>Найти неопределенный интеграл</p> $\int \frac{x^3-2x^2-10x-9}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} dx$	$-\frac{2}{-1+x} + \frac{1}{1+x} + \frac{3+2x}{2+2x+x^2}$

15	Разложить подынтегральную функцию в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами (коэффициенты можно не вычислять) 2042. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$ $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$	[2]
	С л у ч а й 4. Знаменатель имеет повторяющиеся квадратичные множители с отрицательным дискриминантом 1422. Найти интеграл $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^3} dx$. Δ Так как x^2+1 есть двукратный множитель, то $\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$	[2]
16	Разложить подынтегральную функцию в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами (коэффициенты можно не вычислять) 2040. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$	[2]

Интегрирование функций, содержащих иррациональные и тригонометрические выражения

№	Условие задачи	Ответы, указания
	Интегрирование функций, содержащих иррациональные выражения (теория)	Презентация «Интегрирование функций, содержащих иррацион. и тригонометр. выражений», Слайды 9-29
17	Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x+4} dx}{x}$	$2\sqrt{4+x} + 2 \operatorname{Log} [2 - \sqrt{4+x}] - 2 \operatorname{Log} [2 + \sqrt{4+x}]$
18	Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$	$\frac{2}{3} (-6+x) \sqrt{3+x}$
19	Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$	$2\sqrt{x} - 6 \operatorname{Log} [3 + \sqrt{x}]$
	Интегрирование функций, содержащих тригонометрические выражения (теория)	Презентация «Интегрирование функций, содержащих иррацион. и тригонометр. выражений», Слайды 5-9
20	Найти неопределенный интеграл $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$	$-\frac{1}{20} \operatorname{Cos} [5x]^4$
21	Найти неопределенный интеграл. Результат проверить дифференцированием. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$	

22	Найти неопределенный интеграл $\int \sin^2\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$	$\frac{1}{2} (2 + x - \sin[2 + x])$
23	Найти неопределенный интеграл $\int \cos^2 3x dx$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin[6x]$
24	Найти неопределенный интеграл $\int \cos 2x \sin 10x dx$	$-\frac{1}{16} \cos[8x] - \frac{1}{24} \cos[12x]$
25	Найти неопределенный интеграл $\int \sin 5x \sin 7x dx$	$\frac{1}{4} \sin[2x] - \frac{1}{24} \sin[12x]$
26	Найти неопределенный интеграл $\int \cos 2x \cos 3x dx$	$\frac{\sin[x]}{2} + \frac{1}{10} \sin[5x]$
	Интегрирование функций, содержащих тригонометрические выражения (продолжение)	Презентация «Интегрирование, тригонометр. выражений», слайды 2-20
27	Найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{tg}^2 7x dx$	$-x + \frac{1}{7} \operatorname{tg} 7x$
28	Найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{ctg}^3 3x dx$	$-\frac{1}{6 \sin^2 3x} - \frac{1}{3} \ln \sin 3x $
29	Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{5 \cos x + 10 \sin x}$	Указание: использовать универсальную тригонометрическую подстановку

Использовались учебные пособия

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебн. пособие для студентов вузов. В 2-х ч. Ч. I.-4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.-304 с., ил.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. Изд. 20. М.: «Наука», 1985
3. Генератор задач для студентов. ССЫЛКА: <http://generatorzadach.1gb.ru/>