ЗАДАЧИ для подготовки к контрольным, проверочным и самостоятельным работам по курсу «Математика», II семестр. Часть 1 «Производные»

Техника дифференцирования

№	Условие задачи	Ответ
	[1]: **751.** $y=(2x^3+5)^4$. △ Обозначим $2x^3+5=u$, тогда $y=u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'=(u^4)'_u\cdot(2x^3+5)'_x=4u^3(6x^2)=24x^2(2x^3+5)^3$. ▲	пример
1	[2]: Найти производную y' и и значение $y'(1)$: 1) $y=(x^2+1)^4$; 2) $y=(1-x)^{20}$; 3) $y=(1+2x)^3$; 4) $y=(2x^3+x^2-1)^5$; 5) $y=\left(7x^2+\frac{4}{x}+6\right)^6$; 6) $y=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$	1) $y'(1)$=64; 2) $y'(1)$=0; 3) $y'(1)$=54; 4) $y'(1)$=640; 5) $y'=60\cdot 17^5$; 6) $y'(1)$=0
2	[3]: $f(x)=\dfrac{5\cdot x^2+5\cdot x+6}{x-1}$ Найдите $f'(2)$.	$f'(2)$=-9
3	[2]: Найти производную y' и значение $y'(a)$: 1) $y=\sqrt{1-x^2}$, $y'(0)-?$; 2) $y=\sin(2x+3)$; $y'(0)-?$; 3) $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$, $y'(0)-?$; 4) $y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)-?$; 5) $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $y'(1)-?$; 6) $y=10^{2x-3}$, $y'(1)-?$; 7) $y=\ln(1-2x^3)$, $y'(1)-?$; 8) $y=\frac{e^{x^2}}{x^2+1}$, $y'(1)-?$	1) $y'(0)$=0; 2) $y'(0)$=2 $\cos 3$; 3) $y'(0)$=0; 4) $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{8}{\pi^2}$; 5) $y'(1)=\frac{\pi+1}{4}$; 6) $y'(1)$=0.2 $\ln 10$; 7) $y'(1)$= 6; 8) $y'(1)=\frac{e}{2}$
4	[2]: Найти производные функций $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$ $y=\cos^3(2^x)$ $y=\sin^3 x\cdot(\sin x^3)$ $y=2\ln^3 arctg\, x$ $y=x\arcsin^2(3x)$	
5	[2]: Найти производные функций $y=x\arcsin^2(3x)$ $y=2^{\cos x}\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$ $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $y=\ln^2\frac{x}{\sin x}$	

6	[2]: Найти производные неявно заданных функций $\cos(xy)+e^{xy}=1 \qquad y=x\,2^{xy}$	
	[1]: **769.** $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. △ Имеем $\ln y=\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x$, откуда $\frac{y'}{y}=\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\sec^2 x\ln\sin x=1+\sec^2 x\ln\sin x$; $y'=y\,(1+\sec^2 x\ln\sin x)=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\,(1+\sec^2 x\ln\sin x)$. ▲	пример
7	[2]: Найти производную y' и значение $y'(0)$: $y=(\cos x)^{x^2}$	$y'(0)$=0
8	[2]: Найти производную y' и значение $y'(1)$: $y=x^{2\sqrt{x}}$	$y'(1)$=2

Геометрический смысл производной

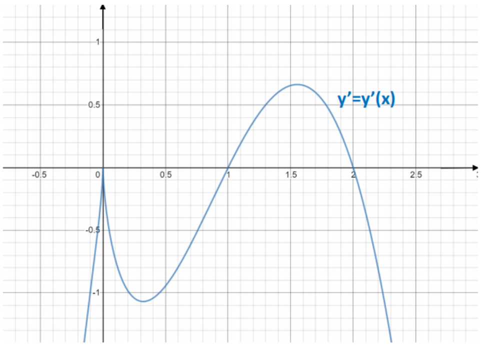
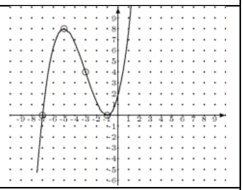
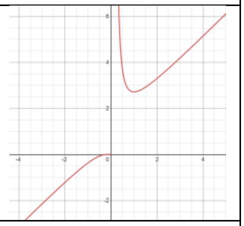
№	Условие задачи	Ответ
9	[1]: **913.** Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y=(2/3)x^5-(1/9)x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x=1$? △ Находим производную $y'=(10/3)x^4-(1/3)x^2$; при $x=1$ имеем $y'=3$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=3$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg} 3\approx 71°34'$. ▲	пример
10	[1]: **914.** Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-3x+5$, проведенная в точке $M(2;\ 3)$? Написать уравнение этой касательной.	$\alpha=\pi/4;\quad y=x+1$
11	[3]: К графику функции $y=x^2+7\cdot x+1$ проведены две касательные. Первая касательная проведена в точке с $x=0$, а вторая в точке с $x=-2$. Найти: уравнения этих касательных и точку пересечения этих касательных между собой.	(-1;-6)
12	[4]: Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^7e^{-x}$ в точке $x=1$.	$y=\frac{6x-5}{e}$
13	[4]: Под каким углом к оси $0x$ наклонена касательная, проведенная к кривой $y=x^3-x^2-7x+4$ в точке $M_0(2;-6)$?	45^0
14	[4]: Найти точки, в которых касательные к кривой $y=(1/3)x^3+x+1$ параллельны прямой $y=2x-7$.	$x_1=-1,\ x_2=1$
15	[4]: На линии $y=1/(1+x^2)$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.	$x=0$
16	[4]: В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3-2x^2+x-1$ равен 3?	$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=1$

Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке

№	Условие задачи	Ответ
17	[1]: **1053.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2, 3]$. △ Находим производную: $f'(x) = 3 - 3x^2$; $3 - 3x^2 = 0$, т. е. $x = \pm 1$ — стационарные точки. Определяем значения функции в этих точках: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Вычисляем значения данной функции на границах промежутка: $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно -18. ▲	пример
18	[3]: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + (12) \cdot x^2 + (45) \cdot x + (48)$ на отрезке $-5 \leqslant x \leqslant -1$.	$[(-3, -6), (-1, 14)]$
19	[2]: m=1 Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной m дм. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?	$h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ дм
20	[2]: m=100 Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом m м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.	$\sqrt[3]{200}$ м; $\sqrt[3]{200}$ м; $\sqrt[3]{25}$ м
21	[2]: Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ на отрезке $[-1;1]$.	0
22	Найти наибольшее значение функции $y = \ln x + 2^x$ на отрезке $[1;2]$.	$\ln 2 + 4$

Приложение производной к исследованию и построению графика функции

№	Условие задачи	Ответ
	http://kadm.kmath.ru/files/sheme_graphics.pdf	пример

23	**На рисунке изображен график производной y'=y'(x) функции y=y(x).** 1. Найти промежутки монотонности функции y=y(x). 2. Найти точки экстремума функции y=y(x). 3. Найти приближенно промежутки выпуклости (вогнутости) функции y=y(x). 4. Найти приближенно точки перегиба функции y=y(x). 5. Перерисовать график функции **y'=y'(x)** и изобразить схематично в той же системе координат график функции y=y(x), учитывая, что y(0)=0. 	
	http://kadm.kmath.ru/files/graphic1_chem_pdf.pdf	пример
24	[3]: Построить график функции $y = (1/4) \cdot (x+1)^2 \cdot (x+7)$, указать точки экстремума и точки перегиба.	
	http://kadm.kmath.ru/files/graphic3_chem_pdf.pdf	пример
25	Исследовать функцию $y = xe^{\frac{1}{x}}$ и построить ее график	
26	[1]: **933.** Зависимость пути от времени задана уравнением $s = t\ln(t+1)$ (t — в секундах, s — в метрах). Найти скорость движения в конце второй секунды.	1,76 м/с

Использовались учебные пособия

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебн. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I.-4-е изд.,испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.-304 с., ил.
2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Вычисление пределов. Производная и ее приложения. Функции многих переменных. Варианты контрольных работ для студентов I курса заочной формы обучения направления подготовки 08.03.01 – Строительство. Казанский государственный архитектурно-строительный университет. Сост: А.Г. Лабуткин.– Казань, 2016 . – 21 с.
   ССЫЛКА: https://www.kgasu.ru/upload/iblock/b3f/kr12baczaoch16labut.pdf
3. Генератор задач для студентов. ССЫЛКА: http://generatorzadach.1gb.ru/
4. Жулёва Л.Д., Козлова В.С., Ухова В.А. Ж87 Математика. Пособие по выполнению практических заданий. - М.: МГТУ ГА, 2018. - 48 с.
   ССЫЛКА: http://vm.mstuca1.ru/posobia/ek-1-matem-2018.pdf