Скалярное произведение

Опр. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right)$.

(произведение модулей векторов на косинус угла между ними)

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$.

Скалярное произведение

Опр. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

Замечание: Из определений следует, что

(1) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, т. е. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

(2) $\cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

(3) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

(4) $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$ – острый, если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ и

$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$ – тупой, если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Скалярное произведение

Свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$

2) Коммутативность: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$

3) Дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4) Однородность:

$$(m\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\cdot\vec{b})=m\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Скалярное произведение

Следствие. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{{x_1}^2 + y^2 + {z_1}^2}$$

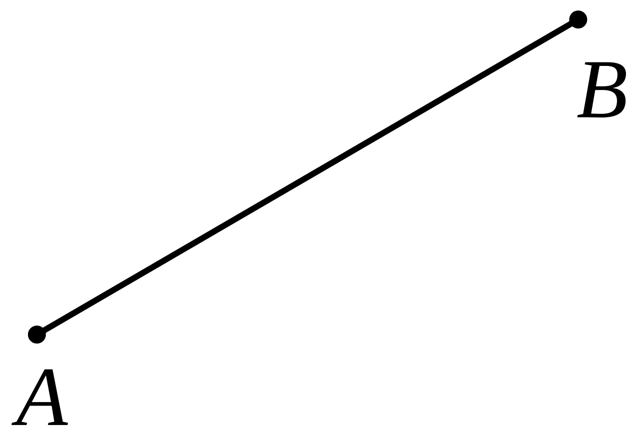
$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

§1. Скалярное произведение

Следствие. Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, то

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$



Скалярное произведение

<u>Пример 1</u>. Пусть $\vec{a} = (-1,1,0)$, $\vec{b} = (2,1,1)$ в $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Найти $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{(-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{12}}$$

Скалярное произведение

Пример 2. Пусть $\vec{a} = (-1,1)$, $\vec{b} = (2,1)$ в базисе $\left(\vec{c}, \vec{d}\right)$, где $|\vec{c}| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\widehat{\vec{c}\vec{d}} = \frac{\pi}{3}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Решение. Поскольку координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы не ОНБ, то нельзя пользоваться формулами для декартовых координат.

Воспользуемся формулой $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$

и свойствами скалярного произведения:

Скалярное произведение

$$\vec{a} = (-1,1) = -\vec{c} + \vec{d},\ \vec{b} = (2,1) = 2\vec{c} + \vec{d} \ \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{c} + \vec{d}\right) \cdot \left(2\vec{c} + \vec{d}\right) =$$

$$= (-\vec{c}) \cdot (2\vec{c}) + \vec{d} \cdot (2\vec{c}) + (-\vec{c}) \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{d} =$$

$$= -2\vec{c}^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2 = -2\vec{c}^2 + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2$$

$$\vec{b}^2 = (2\vec{c} + \vec{d})^2 = (2\vec{c})^2 + 2(2\vec{c})\vec{d} + \vec{d}^2 =$$

$$= 4\vec{c}^2 + 4\vec{c}\vec{d} + \vec{d}^2$$

Скалярное произведение

Найдем $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $\vec{c}^2$, $\vec{d}^2$.

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = |\vec{c}|\cdot\left|\vec{d}\right|\cdot\cos(\widehat{\vec{c}\vec{d}}) = 1\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = 1^2 = 1 \qquad \vec{d}^2 = |\vec{d}|^2 = 2^2 = 4$$

Подставим $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $\vec{c}^2$, $\vec{d}^2$ в $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}^2$: Тогда

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{12}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$