3. Коршунов А.С., Вагнер В.Д., Курятников К.Н., Мелоян А.Д., Касий М.Н., Сарф Е.А., Бельская Л.В. ИК-спектроскопический анализ твердых тканей нижних зубов «мудрости» человека на этапе прорезывания при дисплазии соединительной ткани // Журнал прикладной спектроскопии. 2022. Т. 89, №4. С. 525-534.
4. Korshunov A.S., Vagner V.D., Kuryatnikov K.N., Serov D.O., Torohov A.L., Shykhalieva D.D., Sarf E.A., Bel'skaya L.V. Infrared Spectroscopy to Analyze Sexual Dimorphism of Hard Dental Tissue Maturation at Eruption in Patients with Connective Tissue Dysplasia // Applied Spectroscopy. 2023. Vol. 77, N 5. P. 457-469.

E-mail: Ludab2005@mail.ru

©2023 г. **Ю.В. Нагребецкая**, канд. физ.-мат. наук; **В.Г. Панов**, канд. физ.-мат. наук,
С.А. Корватовская
Уральский федеральный университет, Екатеринбург,
Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург

СИСТЕМА РАВЕНСТВА РИСКОВ ДЛЯ *n* БИНАРНЫХ ФАКТОРОВ

В работе предложено распространение условия равенства разностей рисков на случай *n* бинарных факторов и бинарного отклика. Показано, что в общем случае это условие представляется в виде системы линейных уравнений относительно рисков. Приведена эквивалентная система относительно разности рисков, состоящая из значительно меньшего числа уравнений и допускающая простую трактовку.
***Ключевые слова*:** бинарные факторы, условие равенства разностей рисков, отклик, взаимодействие бинарных факторов, линейное пространство, фундаментальная система решений системы линейных уравнений, группа симметрий эксперимента, группа автоморфизмов булева куба, вес Хэмминга.

Ju.V. Nagrebetskaya, **V.G. Panov**, **S.A. Korvatovskaya**
A SYSTEM FOR RISK EQUALITIES FOR *n* BINARY FACTORS

The paper proposes to extend the equality of risk differences condition to the case of *n* binary factors and a binary response. It is shown that in the general case this condition is presented in the form of a system of linear equations regarding risks. An equivalent system regarding the risk difference is presented, consisting of a significantly smaller number of equations and allowing a simple interpretation.
Key words: binary factors, equality of risk differences condition, response, interaction of binary factors, linear space, fundamental system of solutions of a system of linear equations, symmetry group of experiment, automorphisms' group of a Boolean cube, Hamming weight.

Введение

В медико-биологических исследованиях часто встречаются ситуации, когда действующие факторы и отклик являются дискретными переменными с малым числом уровней. Описание результата совместного действия (взаимодействия) таких факторов представляет известные трудности, так как обычные коэффициенты зависимости дискретных переменных, такие как тау Кендалла или коэффициент полихорической корреляции для надежности своих выводов предполагают жесткие условия на распределение переменных [1]. С другой стороны, в эпидемиологии одним из классических средств анализа зависимости двух бинарных переменных и бинарного отклика без каких-либо предположений на эти переменные является условие равенства рисков (коэффициент ICDR Koopman [2]) [3, 4]. В случае двух переменных выражение для ICDR допускает ясную трактовку, определяющую его эффективное применение. Однако распространение этого выражения на случай более чем двух бинарных факторов до последнего времени было неизвестно. Для трех бинарных переменных это было сделано в работе [5], где было показано, что: (а) коэффициент Купмана можно получить формальными вычислениями из условия равенства нулю всех взаимодействий в смысле дисперсионного анализа [6], (б) аналог коэффициента Купмана для трех переменных представляет собой *систему* линейных уравнений и (в) эта система была подробно исследована и решена. Возникает задача получения и распространения результатов из работы [5] на случай *n* бинарных факторов и бинарного отклика.

Необходимые понятия и определения

Пусть P – множество переменных, индексированных бинарными словами булева куба $\mathbf{B}^n$: $P = \left\{ p_u \mid u \in \mathbf{B}^n \right\}$. Для бинарных факторов $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, слова $u = u_1 u_2 \ldots, u_n$ из $\mathbf{B}^n$ и бинарного отклика y переменную $p_u \in P$ для каждого $u \in \mathbf{B}^n$ можно интерпретировать как вероятность $\mathbf{P}\left(y = 1 \middle| x = u \right)$. Для слова $u \in \mathbf{B}^n$ обозначим через $\| u \|$ вес Хэмминга этого слова. Обозначим $0_n = \left(0, \cdots, 0 \right)$ – нулевой вектор, а $e_1, e_2, \ldots e_n$ – базис из единичных векторов-строк линейного пространства $\mathbf{B}^n$ [7]. Для бинарного слова u обозначим $\Delta_u = p_u - p_{0_n}$. Эту величину можно трактовать как эффект от воздействия факторов x_i, $i \in I$, при отсутствии воздействия факторов x_j, $j \in J$, где $u_i = 1$ для $i \in I$ и $u_j = 0$ для $j \in J$, $I \subseteq \mathbf{N}_n$, $J = \overline{I}$, $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. При этом предполагается, что значение уровня каждого фактора равно 1 при воздействии этого фактора и равно 0 при отсутствии этого воздействия.

Далее, обозначим через $\mathbf{B}_\bullet = \{0, 1, \bullet\}$ множество из трех данных символов. Для любого упорядоченного подмножества I множества $\mathbf{N}_n$ и слова $w \in \mathbf{B}_\bullet^n$, $w = w_1 w_2, \ldots, w_n$, через w_I обозначим подслово $(w_i)_{i \in I}$ и через $| w |_\delta$ обозначим число символов $\delta \in \mathbf{B}_\bullet$ в слове w. Пусть J – упорядоченное подмножество $\left\{ j \in \mathbf{N}_n \mid w_j \in \mathbf{B} \right\}$, $I = \overline{J}$, т.е. $I = \left\{ i \in \mathbf{N}_n \mid w_i = \bullet \right\}$. Тогда для любого слова $w \in \mathbf{B}_\bullet^n$ пусть $p_w = \frac{1}{2^{|w|_\bullet}} \sum\limits_{\substack{u \in \mathbf{B}^n \\ u_J = w_J}} p_u$. Наконец, для $i \in \mathbf{N}_{n - |w|_\bullet} \cup \left\{ 0 \right\}$ обозначим через $S_{w,i}$ множество слов над алфавитом $\mathbf{B}_\bullet$ полученных из слова w заменой в подслове w_J i символов на точки.

Основные результаты. Следующие утверждения являются обобщением результатов из [5], развитием идей представления взаимодействия в дисперсионном анализе [6] и обобщением классического выражения для равенства рисков [2] в случае n бинарных факторов.

Для произвольного слова $w \in \mathbf{B}_\bullet^n$ такого, что $|w|_\bullet < n-1$ введем обозначение

$$\gamma_w = \sum_{i=0}^{n-|w|_\bullet} \left((-1)^i \sum_{u \in S_{w,i}} p_u \right) \qquad (1)$$

Значение γ_w является обобщением коэффициента Купмана [2] для двух бинарных факторов и бинарного отклика на случай *n* таких факторов и отклика. Кроме того, это значение является обобщением соответствующего коэффициента взаимодействия для двухуровневых факторов и отклика из дисперсионного анализа [6]. Поэтому отсутствие взаимодействия будет выражать система

$$\gamma_w = 0, \quad w \in \mathbf{B}_\bullet^n, \ |w|_\bullet < n-1 \qquad (2)$$

которую мы назовем *системой равенства рисков* для *n* бинарных факторов $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ и бинарного отклика y. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Система равенства рисков (2) эквивалентна системе

$$\Delta_u = \sum_{\substack{i \in \mathbf{N}_n \\ u_i = 1}} \Delta_{e_i}, \ u \in \mathbf{B}^n, \ |u|_1 > 1 \qquad (3)$$

Система (3) может быть проинтерпретирована следующим образом: (а) эффект от воздействия всех *n* факторов равен сумме эффектов от изолированного воздействия каждого из них в отдельности; (б) эффект от воздействия любых $k < n$ факторов равен сумме эффектов от изолированного воздействия каждого из них в отдельности при условии отсутствия воздействия остальных факторов.

Пример 1 [5]. Система $p_{ij} - p_{i\bullet} - p_{\bullet j} + p_{\bullet\bullet} = 0$, $i, j \in \mathbf{B}$, равенства рисков для двух бинарных факторов эквивалентна уравнению $\Delta_{11} = \Delta_{01} + \Delta_{10}$.

Пример 2 [5]. Системы (2) и (3) для трех бинарных факторов

$$\begin{cases} p_{ij\bullet} - p_{i\bullet\bullet} - p_{\bullet j\bullet} + p_{\bullet\bullet\bullet} = 0, \ i, j \in \mathbf{B} \\ p_{i\bullet k} - p_{i\bullet\bullet} - p_{\bullet\bullet k} + p_{\bullet\bullet\bullet} = 0, \ i, k \in \mathbf{B} \\ p_{\bullet jk} - p_{\bullet j\bullet} - p_{\bullet\bullet k} + p_{\bullet\bullet\bullet} = 0, \ j, k \in \mathbf{B} \\ p_{ijk} - p_{ij\bullet} - p_{i\bullet k} - p_{\bullet jk} + p_{i\bullet\bullet} + p_{\bullet j\bullet} + p_{\bullet\bullet k} - p_{\bullet\bullet\bullet} = 0, i, j, k \in \mathbf{B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{110} = \Delta_{010} + \Delta_{100} \\ \Delta_{101} = \Delta_{001} + \Delta_{100} \\ \Delta_{011} = \Delta_{001} + \Delta_{010} \\ \Delta_{111} = \Delta_{001} + \Delta_{010} + \Delta_{100} \end{cases}$$

Численный эксперимент. В этом эксперименте моделировались переменные из *P,* удовлетворяющие системе (3) и принимающие значения от 0 до 1, и регистрировалось время t_n их вычислений. Также из системы (2) находилась погрешность $\varepsilon_n = \max\left\{ |\gamma_w| \,\middle|\, w \in \mathbf{B}^n, |w|_1 > 1 \right\}$ и регистрировалось время τ_n вычисления этой величины. Получены следующие результаты:

n	3	4	5	6	7	8
ε_n	0	$0{,}5 \cdot 10^{-17}$	$0{,}5 \cdot 10^{-16}$	$0{,}5 \cdot 10^{-15}$	$0{,}5 \cdot 10^{-14}$	$0{,}5 \cdot 10^{-14}$
t_n, сек	$0{,}5 \cdot 10^{-5}$	$0{,}5 \cdot 10^{-5}$	$0{,}5 \cdot 10^{-5}$	$0{,}5 \cdot 10^{-4}$	$0{,}5 \cdot 10^{-4}$	$0{,}5 \cdot 10^{-4}$
τ_n, сек	$0{,}5 \cdot 10^{-4}$	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5 \cdot 10^{-2}$	0,5	0,65	4

Продолжение таблицы

n	9	10	11	12	13	14
ε_n	$0,5\cdot10^{-13}$	$0,5\cdot10^{-13}$	$0,5\cdot10^{-11}$	$0,5\cdot10^{-9}$	$0,5\cdot10^{-7}$	$0,5\cdot10^{-5}$
t_n, сек	10^{-4}	$2\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-3}$	$9\cdot10^{-3}$	0,011	0,021
τ_n, сек	28	249	1914	5679	15474	43235

Видно, что численный эксперимент подтверждает теорему 1, но уже при $n=14$ накапливается погрешность вычисления, хоть и небольшая, а время вычисления на обычном ПК (HP ProBook 440 G6) при имплементации на C++ становится недопустимо высоким.

В работах [8]-[12] была продемонстрирована важная роль группы G_n симметрий эксперимента, которая является группой автоморфизма булева куба как графа, в задаче анализа совместного действия бинарных факторов. Её важность подтверждается следующим утверждением.

Теорема 2. Система (2) равенства рисков инвариантна относительно действия группы G_n.

Это утверждение вполне подтверждает тот факт, что взаимодействие (отсутствие взаимодействия) факторов не зависит от значения уровней факторов.

Обсуждение. Система (3) имеет очевидные преимущества перед системой (2). Во-первых, число уравнений в системе (2) равно $O\left(3^n\right)$, в то время, как в системе (3) – $O\left(2^n\right)$. Во-вторых, к системе (3) значительно проще применять проверку статистических гипотез, чем к системе (2). В-третьих, система (3) позволяет легко найти фундаментальную систему решений системы (2). В-четвертых, при помощи системы (3) намного проще исследовать свойства решений системы (2). В-пятых, как показывает численный эксперимент, для практической проверки равенства рисков целесообразно применять систему (3) ввиду значительного увеличения времени вычисления даже при не очень больших значениях *n* при использовании системы (2). Наконец, в-шестых, упрощенная система (3) допускает более простую интерпретацию, чем система (2).

Заключение. Получена система равенства рисков (2) для *n* бинарных факторов в случае бинарного отклика, которая является обобщением условия равенства рисков для двух [2] и трех [5] бинарных факторов и бинарного отклика. Эта система значительно упрощена до эквивалентной системы (3), что позволяет получить фундаментальную систему решений равенства рисков, а также использовать ее для выяснения отсутствия (присутствия) взаимодействия факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические вывод и связи. М.: Наука. 1973. 899 с.
2. Koopman J.S. Interaction between discrete causes // Am J Epidem. 1981. V. 113, №6. P. 716-724. DOI: 10.1093 / oxfordjournals.aje.a113153.
3. Rothman K.J. Modern Epidemiology. Boston, MA: Little, Brown and Company. 1986. 358 c.
4. Szklo M., Nieto F. J. Epidemiology: Beyond the Basics. Boston, MA: Jones and Bartlee Publishers. 2007. 578 c.
5. Нагребецкая Ю.В., Фаткуллина А.И. Совместное действие бинарных факторов и равенство рисков // Траектория исследований. 2022. Т. 3, №3. С. 89-104.
6. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М.: Наука, 1980. 511с.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Физ-мат. лит-ра, 2000. 272 с.
8. Panov V.G., Nagrebetskaya J.V. Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. Vol. 98, №2. P. 239-259.

9. Panov V.G., Nagrebetskaya J.V. Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups// J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. Vol. 21, №3. P. 661-677.
10. Нагребецкая Ю. В., Панов, В.Г. Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Материалы XIII междунар. конф. "Системный анализ в медицине", 19-20 сентября 2019, г. Благовещенск. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2019. С. 31–34.
11. Nagrebetskaya J.V., Panov V.G. Joint action of binary factors in the sufficient causes theory and its classification // Int. J. Innovative Technology and Exploring Engineering. 019. V. 9, №1. P. 2146-2152.
12. Нагребецкая Ю.В, Панов В.Г. Булева модель частичного взаимодействия бинарных факторов // Вестник Омского университета. 2021. Т. 26, №3. С. 10-19. DOI 10.24147/1812-3996.2021.26(3).10-19

I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru, vpanov@ecko.uran.ru, korall.sofiya@mail.ru

УДК 612.821+612.825

Г.А. Шабанов, канд. биол. наук; **А.А. Рыбченко**, д-р техн. наук; **Е.А. Луговая**, канд. биол. наук
Научно-исследовательский центр «Арктика» ДВО РАН, Магадан

МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ МНОГОЧАСТОТНОЙ СТРУКТУРЫ АКТИВИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ГОЛОВНОГО МОЗГА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ ДИАГНОСТИКИ И КОРРЕКЦИИ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА

Предложена волновая модель структуры многочастотной организации активирующей системы мозга. Введены принципы излучения или поглощения нервной клеткой механических микровибраций при активации синтетических процессов, формирования одночастотных кластеров из нервных и соматических клеток, частотной матрицы множества функциональных состояний из одночастотных кластеров, слоистой структуры из частотно изолированных матриц. Модель может быть полезна при разработке систем диагностики и коррекции функций организма, когнитивных исследованиях.

Ключевые слова: активирующая система мозга, частотная матрица множества функциональных состояний, функциональная изоляция, частотный кластер.

G.A. Shabanov, A.A.Rybchenko, E.A. Lugovaya

A MODEL OF THE ORGANIZATION OF THE MULTI-FREQUENCY STRUCTURE OF THE ACTIVATING SYSTEM OF THE BRAIN FOR THE CONSTRUCTION OF DIAGNOSTIC SYSTEMS AND CORRECTION OF PHYSIOLOGICAL FUNCTIONS OF THE HUMAN BODY

A model of the structure of the multifrequency organization of the activating system of the brain is proposed. The principles of radiation or absorption by a nerve cell of mechanical micro-vibrations during the activation of synthetic processes, the formation of single-frequency clusters of nerve and somatic cells, a frequency matrix of multiple functional states of single-frequency clusters, a layered structure of frequency isolated matrices are introduced. The model can be useful in the development of diagnostic systems and correction of body functions, cognitive research.