Повторное дифференцирование

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, имеющую частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y$ такие, что них можно поставить вопрос о последующем дифференцировании.

Следующие производные **называются вторыми частными производными** функции $z = f(x, y)$

Повторное дифференцирование

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x \end{aligned}\right\} \text{смешанные производные}$$

Повторное дифференцирование Пример

<u>Пример</u>. $z = x^2 y + xy^3$.

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

<u>Решение.</u>

Ранее были найдены первые производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3xy^2$$

Повторное дифференцирование. Пример

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = \left(2xy + y^3\right)'_x = 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = \left(x^2 + 3xy^2\right)'_y = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y = \left(2xy + y^3\right)'_y = 2x + 3y^2$$

равны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(z'_y\right)'_x = \left(x^2 + 3xy^2\right)'_x = 2x + 3y^2$$

Теорема о равенстве смешанных производных

Смешанные производные в примере 2 равны не случайно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1) Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в $O(P_0)$, $(P_0(x_0, y_0))$.

2) Пусть смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ непрерывны в $O(P_0)$.

Тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.