

# Квантовая телепортация

М. В. Волков

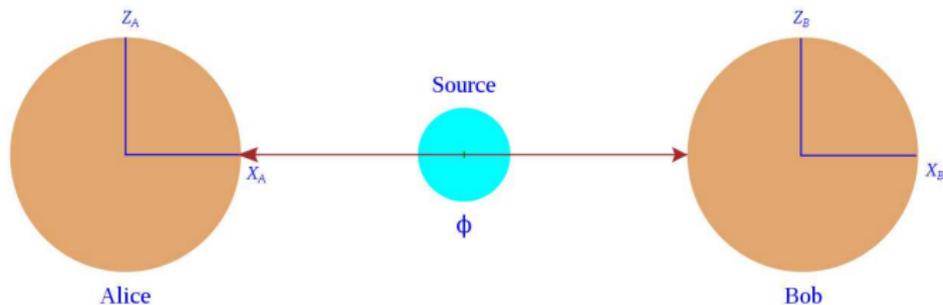
Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

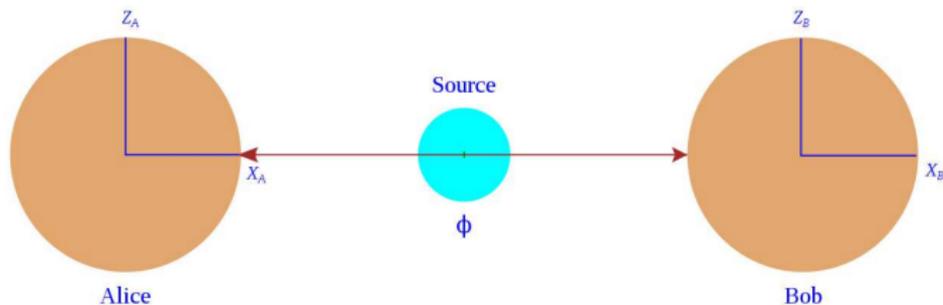
В статье 1935 г. (A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? Physical Review 47(10):777–780 (1935)) Эйнштейн, Подольский и Розен описали некоторый мысленный эксперимент, который по их мнению показывал, что квантово-механические представления противоречат некоторым фундаментальным законам природы, а именно, невозможности мгновенной передачи информации на сколь угодно большие расстояния.

В статье 1935 г. (A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? Physical Review 47(10):777–780 (1935)) Эйнштейн, Подольский и Розен описали некоторый мысленный эксперимент, который по их мнению показывал, что квантово-механические представления противоречат некоторым фундаментальным законам природы, а именно, невозможности мгновенной передачи информации на сколь угодно большие расстояния. Упрощенно их аргумент был таков.

В статье 1935 г. (A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? Physical Review 47(10):777–780 (1935)) Эйнштейн, Подольский и Розен описали некоторый мысленный эксперимент, который по их мнению показывал, что квантово-механические представления противоречат некоторым фундаментальным законам природы, а именно, невозможности мгновенной передачи информации на сколь угодно большие расстояния. Упрощенно их аргумент был таков. Квантовая система может состоять из двух разлетающихся в разные стороны частиц:



В статье 1935 г. (A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? Physical Review 47(10):777–780 (1935)) Эйнштейн, Подольский и Розен описали некоторый мысленный эксперимент, который по их мнению показывал, что квантово-механические представления противоречат некоторым фундаментальным законам природы, а именно, невозможности мгновенной передачи информации на сколь угодно большие расстояния. Упрощенно их аргумент был таков. Квантовая система может состоять из двух разлетающихся в разные стороны частиц:



Если один наблюдатель (Алиса) измерит «свою» частицу, то вторая половина системы должна в тот же самый момент измениться соответствующим образом, и второй наблюдатель (Боб) может это зарегистрировать.

В 1964 г. Белл (J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique Физика*. 1(3): 195–200 (1964)) превратил аргументы Эйнштейна, Подольского и Розена в некоторое неравенство, которое допускало экспериментальную проверку.

В 1964 г. Белл (J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics Physique Физика. 1(3): 195–200 (1964)) превратил аргументы Эйнштейна, Подольского и Розена в некоторое неравенство, которое допускало экспериментальную проверку.

Начиная с 1972 г. разные группы физиков провели эксперименты, которые показали, что неравенство Белла *нарушается*. Это означает, что явление, которое Эйнштейн, Подольский и Розен считали очевидно невозможным, может происходить в реальности.

В 1964 г. Белл (J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique Физика*. 1(3): 195–200 (1964)) превратил аргументы Эйнштейна, Подольского и Розена в некоторое неравенство, которое допускало экспериментальную проверку.

Начиная с 1972 г. разные группы физиков провели эксперименты, которые показали, что неравенство Белла *нарушается*. Это означает, что явление, которое Эйнштейн, Подольский и Розен считали очевидно невозможным, может происходить в реальности. «Парадокс» Эйнштейна–Подольского–Розена стал *эффектом Эйнштейна–Подольского–Розена*.

В 1964 г. Белл (J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique Физика*. 1(3): 195–200 (1964)) превратил аргументы Эйнштейна, Подольского и Розена в некоторое неравенство, которое допускало экспериментальную проверку.

Начиная с 1972 г. разные группы физиков провели эксперименты, которые показали, что неравенство Белла *нарушается*. Это означает, что явление, которое Эйнштейн, Подольский и Розен считали очевидно невозможным, может происходить в реальности. «Парадокс» Эйнштейна–Подольского–Розена стал *эфффе́ктом Эйнштейна–Подольского–Розена*.

В 1993 г. Беннет, Брассар, Крепо, Йожа, Перес и Вуттерс (C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels. *Physical Review Letters*. 70(13):1895–1899 (1993)) предложили протокол передачи квантовых состояний с использованием эффекта Эйнштейна–Подольского–Розена.

В 1964 г. Белл (J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics Physique Физика. 1(3): 195–200 (1964)) превратил аргументы Эйнштейна, Подольского и Розена в некоторое неравенство, которое допускало экспериментальную проверку.

Начиная с 1972 г. разные группы физиков провели эксперименты, которые показали, что неравенство Белла *нарушается*. Это означает, что явление, которое Эйнштейн, Подольский и Розен считали очевидно невозможным, может происходить в реальности. «Парадокс» Эйнштейна–Подольского–Розена стал *эффектом Эйнштейна–Подольского–Розена*.

В 1993 г. Беннет, Brassard, Крепо, Йожа, Перес и Вуттерс (C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels. Physical Review Letters. 70(13):1895–1899 (1993)) предложили протокол передачи квантовых состояний с использованием эффекта Эйнштейна–Подольского–Розена. Такую передачу и принято называть *квантовой телепортацией*.

В 1964 г. Белл (J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics Physique Физика. 1(3): 195–200 (1964)) превратил аргументы Эйнштейна, Подольского и Розена в некоторое неравенство, которое допускало экспериментальную проверку.

Начиная с 1972 г. разные группы физиков провели эксперименты, которые показали, что неравенство Белла *нарушается*. Это означает, что явление, которое Эйнштейн, Подольский и Розен считали очевидно невозможным, может происходить в реальности. «Парадокс» Эйнштейна–Подольского–Розена стал *эффектом Эйнштейна–Подольского–Розена*.

В 1993 г. Беннет, Brassard, Крепо, Йожа, Перес и Вуттерс (C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels. Physical Review Letters. 70(13):1895–1899 (1993)) предложили протокол передачи квантовых состояний с использованием эффекта Эйнштейна–Подольского–Розена. Такую передачу и принято называть *квантовой телепортацией*.

Телепортация по протоколу Беннета и др. осуществлена экспериментально, причем расстояние передачи быстро растет (рекорд 2020 года — 1400 км).

Алиса хочет передать Бобу сообщение, закодированное вектором

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Алиса хочет передать Бобу сообщение, закодированное вектором

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Алиса инициализирует систему  $H := H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$  состоянием  $|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle$ .

Алиса хочет передать Бобу сообщение, закодированное вектором  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Алиса инициализирует систему  $H := H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$  состоянием  $|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle$ .

*Шаг 1:* Алиса применяет преобразование Адамара  $R = R_2$  ко 2-му кубиту:

$$|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{R} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle.$$

Алиса хочет передать Бобу сообщение, закодированное вектором

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Алиса инициализирует систему  $H := H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$  состоянием  $|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle$ .

*Шаг 1:* Алиса применяет преобразование Адамара  $R = R_2$  ко 2-му кубиту:

$$|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{R} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle.$$

*Контролируемый XOR* — это унитарный оператор в  $H_2 \otimes H_2$ , который определен так:  $|a\rangle|b\rangle \mapsto |a\rangle|a \oplus b\rangle$ . Его матрица в стандартном базисе есть

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Алиса хочет передать Бобу сообщение, закодированное вектором

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Алиса инициализирует систему  $H := H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$  состоянием  $|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle$ .

*Шаг 1:* Алиса применяет преобразование Адамара  $R = R_2$  ко 2-му кубиту:

$$|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{R} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle.$$

*Шаг 2:* Алиса применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|00\rangle + |11\rangle).$$

Алиса хочет передать Бобу сообщение, закодированное вектором

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Алиса инициализирует систему  $H := H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$  состоянием  $|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle$ .

**Шаг 1:** Алиса применяет преобразование Адамара  $R = R_2$  ко 2-му кубиту:

$$|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{R} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle.$$

**Шаг 2:** Алиса применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|00\rangle + |11\rangle).$$

**Шаг 3:** Алиса посылает Бобу 3-й кубит *по квантовому каналу* и применяет контролируемый XOR ко 1-му и 2-му кубитам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle (|00\rangle + |11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \\ &\xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(|000\rangle + |011\rangle) + \beta(|110\rangle + |101\rangle)). \end{aligned}$$

*Шаг 4:* Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L} \\ & \xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)). \end{aligned}$$

*Шаг 4:* Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L} \\ \xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

*Шаг 5:* Алиса замеряет первые два кубита и посылает результаты измерений Бобу *по классическому каналу*.

**Шаг 4:** Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L}$$

$$\xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

**Шаг 5:** Алиса измеряет первые два кубита и посылает результаты измерений Бобу *по классическому каналу*.

**Шаг 6:** Боб применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам.

**Шаг 4:** Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L}$$

$$\xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

**Шаг 5:** Алиса измеряет первые два кубита и посылает результаты измерений Бобу *по классическому каналу*.

**Шаг 6:** Боб применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам.

**Шаг 7:** Боб применяет к 1-му кубиту преобразование  $S := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Шаг 4:** Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L} \\ \xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

**Шаг 5:** Алиса измеряет первые два кубита и посылает результаты измерений Бобу *по классическому каналу*.

**Шаг 6:** Боб применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам.

**Шаг 7:** Боб применяет к 1-му кубиту преобразование  $S := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Шаг 8:** Боб применяет контролируемый XOR к 3-му и 1-му кубитам.

**Шаг 4:** Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L}$$

$$\xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

**Шаг 5:** Алиса измеряет первые два кубита и посылает результаты измерений Бобу *по классическому каналу*.

**Шаг 6:** Боб применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам.

**Шаг 7:** Боб применяет к 1-му кубиту преобразование  $S := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Шаг 8:** Боб применяет контролируемый XOR к 3-му и 1-му кубитам.

**Шаг 9:** Боб снова применяет  $S$  к 1-му кубиту, а к 3-му кубиту применяет преобразование  $T := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ .

**Шаг 4:** Алиса применяет преобразование  $L := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ко 1-му кубиту:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha (|000\rangle + |011\rangle) + \beta (|110\rangle + |101\rangle)) \xrightarrow{L} \\ \xrightarrow{L} \frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

**Шаг 5:** Алиса замеряет первые два кубита и посылает результаты измерений Бобу *по классическому каналу*.

**Шаг 6:** Боб применяет контролируемый XOR ко 2-му и 3-му кубитам.

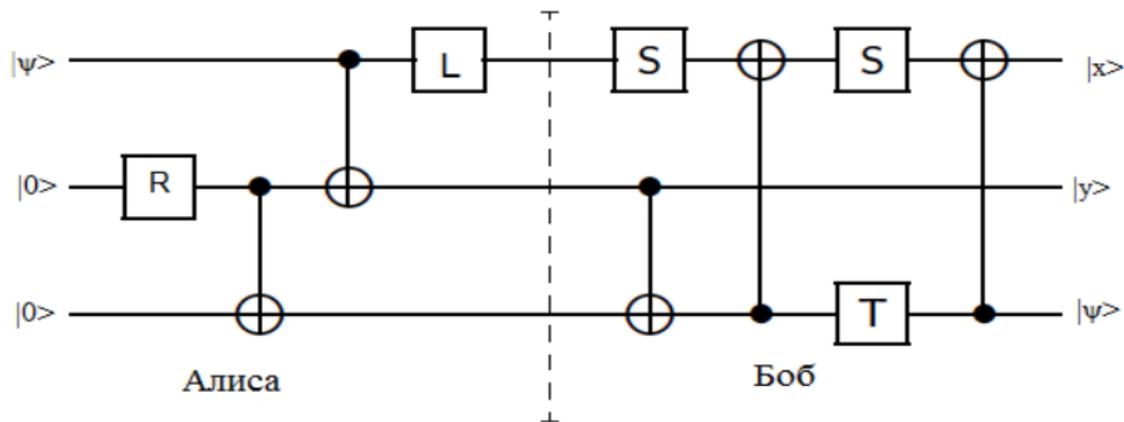
**Шаг 7:** Боб применяет к 1-му кубиту преобразование  $S := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Шаг 8:** Боб применяет контролируемый XOR к 3-му и 1-му кубитам.

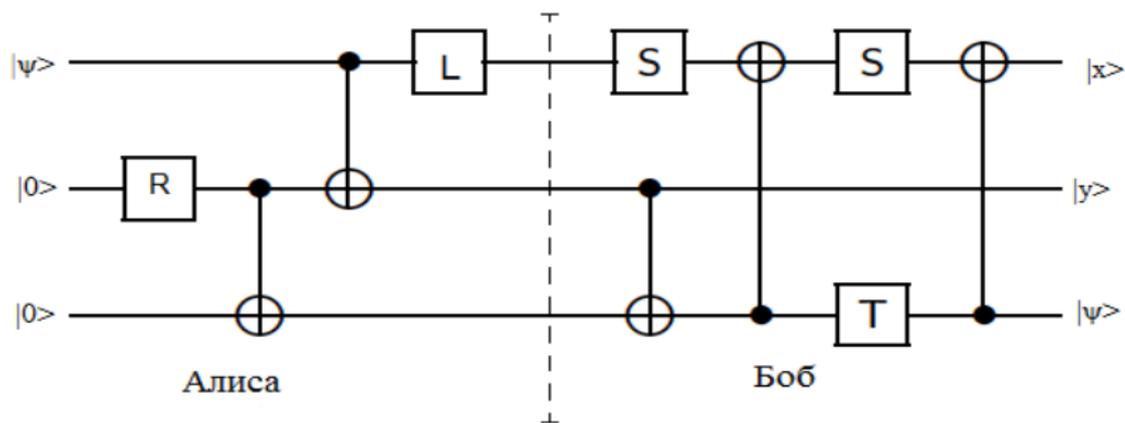
**Шаг 9:** Боб снова применяет  $S$  к 1-му кубиту, а к 3-му кубиту применяет преобразование  $T := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ .

**Шаг 10:** Боб снова применяет контролируемый XOR к 3-му и 1-му кубитам.

Следующая схема изображает весь протокол ( $\oplus$  изображает XOR):

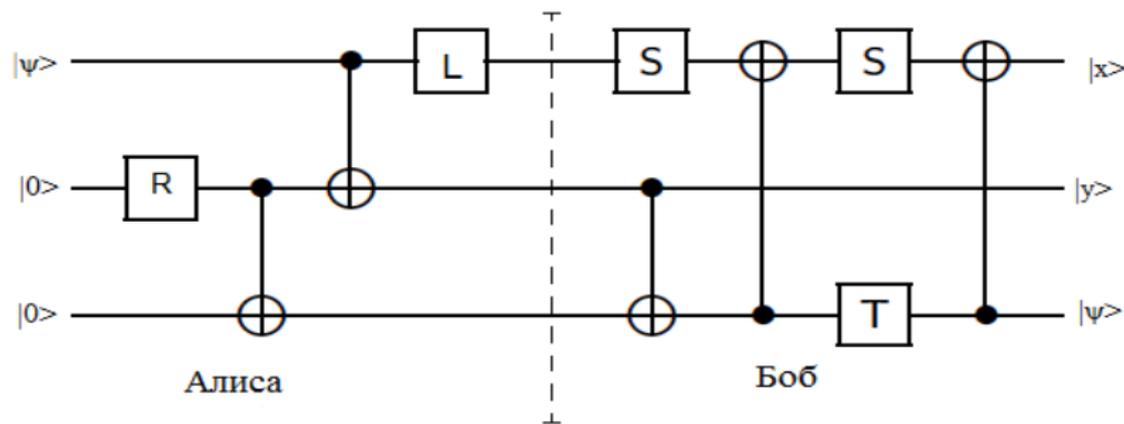


Следующая схема изображает весь протокол ( $\oplus$  изображает XOR):



Утверждается, что после его выполнения в 3-м кубите у Боба возникнет исходный вектор  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ !

Следующая схема изображает весь протокол ( $\oplus$  изображает XOR):

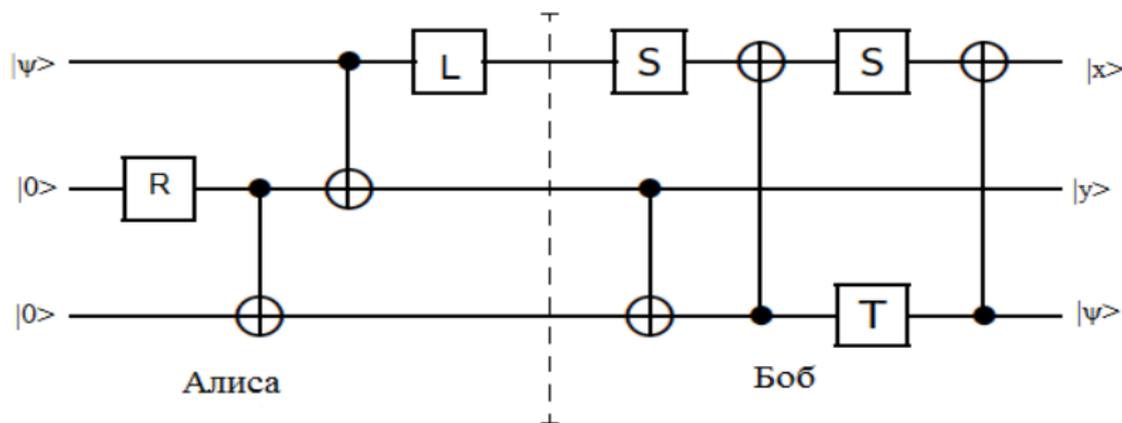


Утверждается, что после его выполнения в 3-м кубите у Боба возникнет исходный вектор  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ !

Заметим, что злоумышленник не сможет перехватить это сообщение, даже если он имеет доступ к классическому каналу, по которому Алиса посылает результаты измерений, а по квантовому каналу ничего секретного не передается.

## Протокол квантовой телепортации (3)

Следующая схема изображает весь протокол ( $\oplus$  изображает XOR):

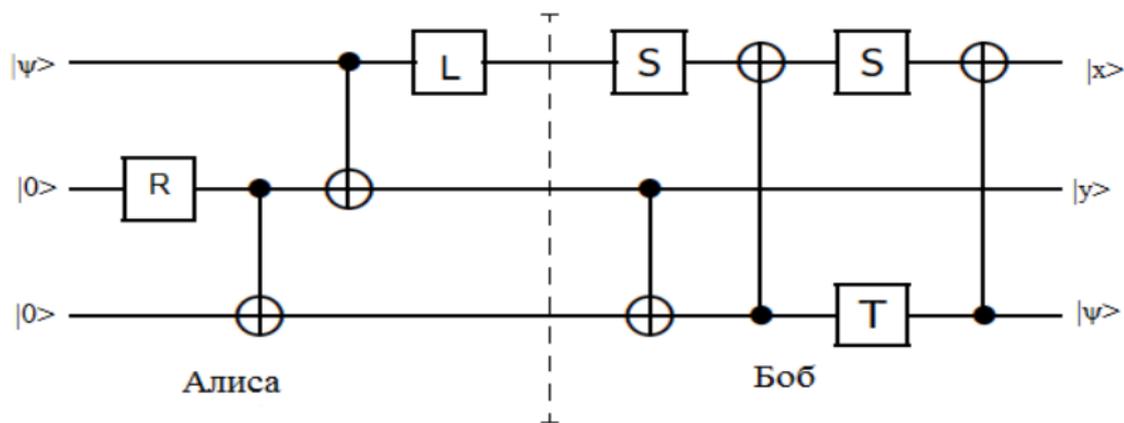


Утверждается, что после его выполнения в 3-м кубите у Боба возникнет исходный вектор  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ !

Заметим, что злоумышленник не сможет перехватить это сообщение, даже если он имеет доступ к классическому каналу, по которому Алиса посылает результаты измерений, а по квантовому каналу ничего секретного не передается. Содержимое 3-го кубита в тот момент, когда Алиса отправляет его Бобу, заранее известно — это  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

## Протокол квантовой телепортации (3)

Следующая схема изображает весь протокол ( $\oplus$  изображает XOR):



Утверждается, что после его выполнения в 3-м кубите у Боба возникнет исходный вектор  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ !

Заметим, что злоумышленник не сможет перехватить это сообщение, даже если он имеет доступ к классическому каналу, по которому Алиса посылает результаты измерений, а по квантовому каналу ничего секретного не передается. Именно с этим связаны большие надежды на практическое применение квантовой телепортации в криптографии.

Осталось понять, почему описанный протокол работает. Разберем все варианты в зависимости от того, какие результаты Алиса сообщила Бобу.

Перед измерением (после шага 4) состояние системы было таким:

$$\frac{1}{2} (\alpha (|000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle) + \beta (|010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle)).$$

Перед измерением (после шага 4) состояние системы было таким:

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( \underbrace{|000\rangle}_{\text{Alice}} - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + \underbrace{|001\rangle}_{\text{Bob}} + |101\rangle \right) \right).$$

*Случай 1:* Алиса передала  $|0\rangle|0\rangle$ .

Перед измерением (после шага 4) состояние системы было таким:

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( \underbrace{|000\rangle}_{\text{Alice}} - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + \underbrace{|001\rangle}_{\text{Bob}} + |101\rangle \right) \right).$$

*Случай 1:* Алиса передала  $|0\rangle|0\rangle$ . Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Перед измерением (после шага 4) состояние системы было таким:

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( \underbrace{|000\rangle}_{\text{---}} - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + \underbrace{|001\rangle}_{\text{---}} + |101\rangle \right) \right).$$

*Случай 1:* Алиса передала  $|0\rangle|0\rangle$ . Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ :

$$\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{i}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Перед измерением (после шага 4) состояние системы было таким:

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( \underbrace{|000\rangle}_{-} - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + \underbrace{|001\rangle}_{+} + |101\rangle \right) \right).$$

*Случай 1:* Алиса передала  $|0\rangle|0\rangle$ . Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ :

$$\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{i}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{i}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{i}{2}\alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{i}{2}\beta|1\rangle|0\rangle|1\rangle.$$

Перед измерением (после шага 4) состояние системы было таким:

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( \underbrace{|000\rangle}_{\text{}} - |100\rangle + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + \underbrace{|001\rangle}_{\text{}} + |101\rangle \right) \right).$$

**Случай 1:** Алиса передала  $|0\rangle|0\rangle$ . Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ :

$$\frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{i}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{i}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{i}{2}\alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{i}{2}\beta|1\rangle|0\rangle|1\rangle.$$

Затем Боб применяет  $S$  к 1-му кубиту,  $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$  к 3-му, после чего снова XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{i}{2}\alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{i}{2}\beta|1\rangle|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{S, T} \frac{1}{2}\alpha|0\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|1\rangle|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

*Случай 2:* Алиса передала  $|0\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + \underbrace{|011\rangle}_{\text{}} - |111\rangle \right) + \beta \left( \underbrace{|010\rangle}_{\text{}} + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

*Случай 2:* Алиса передала  $|0\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + \underbrace{|011\rangle}_{\text{}} - |111\rangle \right) + \beta \left( \underbrace{|010\rangle}_{\text{}} + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

*Случай 2:* Алиса передала  $|0\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + \underbrace{|011\rangle} - |111\rangle \right) + \beta \left( \underbrace{|010\rangle} + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{S} \frac{i}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

*Случай 2:* Алиса передала  $|0\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + \underbrace{|011\rangle}_{-} - |111\rangle \right) + \beta \left( \underbrace{|010\rangle}_{+} + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{S} \frac{i}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{i}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{i}{2}\alpha|0\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{i}{2}\beta|1\rangle|1\rangle|1\rangle.$$

**Случай 2:** Алиса передала  $|0\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + \underbrace{|011\rangle}_{-} - |111\rangle \right) + \beta \left( \underbrace{|010\rangle}_{+} + |110\rangle + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{S} \frac{i}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{i}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{i}{2}\alpha|0\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{i}{2}\beta|1\rangle|1\rangle|1\rangle.$$

Затем Боб применяет  $S$  к 1-му кубиту,  $T$  к 3-му и XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{i}{2}\alpha|0\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{i}{2}\beta|1\rangle|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{S,T} \frac{1}{2}\alpha|0\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|1\rangle|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

*Случай 3:* Алиса передала  $|1\rangle|0\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - \underbrace{|100\rangle}_{\text{}} + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + \underbrace{|101\rangle}_{\text{}} \right) \right).$$

Случай 3: Алиса передала  $|1\rangle|0\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - \underbrace{|100\rangle}_{\text{}} + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + \underbrace{|101\rangle}_{\text{}} \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

*Случай 3:* Алиса передала  $|1\rangle|0\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - \underbrace{|100\rangle}_{\text{}} + |011\rangle - |111\rangle \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + \underbrace{|101\rangle}_{\text{}} \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ . В данном случае оба эти преобразования ничего не меняют.

*Случай 3:* Алиса передала  $|1\rangle|0\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - \underbrace{|100\rangle + |011\rangle - |111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + \underbrace{|101\rangle} \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ . В данном случае оба эти преобразования ничего не меняют.

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} -\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|0\rangle|1\rangle.$$

*Случай 3:* Алиса передала  $|1\rangle|0\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - \underbrace{|100\rangle + |011\rangle - |111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + |110\rangle + |001\rangle + \underbrace{|101\rangle} \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ . В данном случае оба эти преобразования ничего не меняют.

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} -\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|0\rangle|1\rangle.$$

Затем Боб применяет  $S$  к 1-му кубиту,  $T$  к 3-му и XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$-\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{S, T} \frac{1}{2}\alpha|1\rangle|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Случай 4: Алиса передала  $|1\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - \underbrace{|111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + \underbrace{|110\rangle} + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

*Случай 4:* Алиса передала  $|1\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - \underbrace{|111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + \underbrace{|110\rangle} + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

*Случай 4:* Алиса передала  $|1\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - \underbrace{|111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + \underbrace{|110\rangle} + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

*Случай 4:* Алиса передала  $|1\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - \underbrace{|111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + \underbrace{|110\rangle} + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} -\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle.$$

**Случай 4:** Алиса передала  $|1\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - \underbrace{|111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + \underbrace{|110\rangle} + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} -\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle.$$

Затем Боб применяет  $S$  к 1-му кубиту,  $T$  к 3-му и XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$-\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{S, T} \frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

*Случай 4:* Алиса передала  $|1\rangle|1\rangle$ :

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \left( |000\rangle - |100\rangle + |011\rangle - \underbrace{|111\rangle} \right) + \beta \left( |010\rangle + \underbrace{|110\rangle} + |001\rangle + |101\rangle \right) \right).$$

Боб работает с  $\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$ .

Сначала Боб XORит 2-й и 3-й кубиты, а к 1-му применяет  $S$ :

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}, S} \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Затем Боб XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$\frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{\text{XOR}} -\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle.$$

Затем Боб применяет  $S$  к 1-му кубиту,  $T$  к 3-му и XORит 3-й и 1-й кубиты:

$$-\frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{S, T} \frac{1}{2}\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}\beta|0\rangle|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{\text{XOR}} \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).$$

Видим, что во всех случаях в 1-м и 2-м кубитах окажется то, что передала Алиса, а в 3-м действительно возникнет исходный вектор  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ .