Алгоритмы Дойча и Дойча–Йожи

М. В. Волков

Уральский федеральный университет

Институт естественных наук и математики

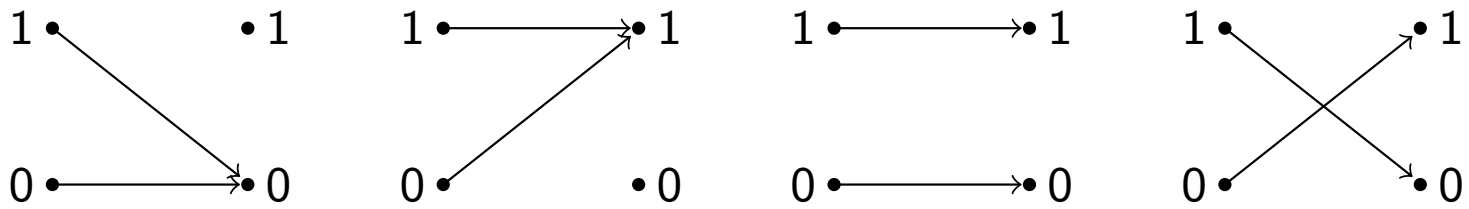
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2022/2023 учебный год

Алгоритм Дойча: постановка задачи

Рассмотрим двухэлементное множество $\mathbb{F} := \{0, 1\}$.

Существуют ровно четыре функции $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$.
Две из них — *константы* (функция, которая всегда возвращает 0, и функция, которая всегда возвращает 1), а две нет (тождественная функция и перестановка).



Допустим, что можно лишь **один раз** обратиться к неизвестной функции f как к черному ящику: задать аргумент $x \in \{0, 1\}$ и получить значение $f(x)$.
Нужно узнать, является функция f константой.

Ясно, что никакой классический алгоритм не может решить эту задачу.

Алгоритм Дойча

Дэвид Дойч в 1985 г. предложил квантовый алгоритм для решения описанной задачи, точнее, ее «квантовой» модификации.
Хотя алгоритм Дойча решает задачу, не представляющую никакого интереса, мы подробно рассмотрим его, чтобы на простом примере зафиксировать *основные допущения* теории квантовых алгоритмов.
Алгоритм Дойча работает с квантовой системой $H_4 := H_2 \otimes H_2$ (напомним, что H_2 — это двумерное гильбертово пространство).
Вместо $|a\rangle \otimes |b\rangle$ пишем $|a\rangle|b\rangle$ и ссылаемся на $|a\rangle$ и соответственно $|b\rangle$ как на *содержимое* первого и соответственно второго регистра.

Алгоритм Дойча

1. Инициализируем H_4 в состояние $|0\rangle|1\rangle$.
2. Применяем преобразование Адамара $R_4 := R_2 \otimes R_2$.
3. Применяем оператор $U_f : |a\rangle|b\rangle \mapsto |a\rangle|f(a) \oplus b\rangle$, где $\oplus$ — сумма mod 2.
4. Применяем преобразование Адамара R_2 к первому регистру.
5. Измеряем первый регистр; если получится $|0\rangle$, то f — константа, если получится $|1\rangle$, то f — не константа.

Допущения теории квантовых алгоритмов

1. Инициализируем H_4 в состояние $|0\rangle|1\rangle$.
   Можно «приготовлять» системы в некоторых заданных состояниях!
2. Применяем преобразование Адамара R_4.
3. Применяем оператор $U_f : |a\rangle|b\rangle \mapsto |a\rangle|f(a) \oplus b\rangle$.
4. Применяем преобразование Адамара R_2 к первому регистру.
   Можно применять к системам любые унитарные операторы!
5. Измеряем первый регистр; если получится $|0\rangle$, то f — константа, если получится $|1\rangle$, то f — не константа.
   Можно измерять системы, т.е. определять вероятность нахождения системы в некотором состоянии!

Мы подробно обсудим эти допущения немного позднее, а пока покажем, что алгоритм Дойча корректен.

Корректность алгоритма Дойча

Вычислим состояние системы на каждом шаге алгоритма Дойча.
После шага 1 состояние $|0\rangle|1\rangle$.
На шаге 2 к каждому регистру применяется преобразование Адамара R_2, т.е. оператор с матрицей $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Получится $\frac{1}{2}\big(|0\rangle+|1\rangle\big)\big(|0\rangle-|1\rangle\big)$.
Обозначив $|0\rangle-|1\rangle$ через $|\chi\rangle$, запишем результат как $\frac{1}{2}\big(|0\rangle+|1\rangle\big)|\chi\rangle$.

На шаге 3 применяется оператор U_f. Это применение и играет роль единственного вызова функции f. Именно тут есть некоторый обман (в условии задачи говорилось, что можно обращаться к f, а не к U_f), так что молчаливо делается еще одно (очень сильное) допущение: нужные нам функции продолжаются до соответствующих унитарных операторов.

По определению $U_f|a\rangle|\chi\rangle=|a\rangle|f(a)\oplus\chi\rangle$. Ясно, что $0\oplus\chi=\chi$, а $1\oplus\chi=|1\rangle-|0\rangle=-\chi$. Поэтому $f(a)\oplus\chi=(-1)^{f(a)}\chi$. Получаем

$$U_f\frac{1}{2}\big(|0\rangle+|1\rangle\big)|\chi\rangle=\frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0)}|0\rangle|\chi\rangle+(-1)^{f(1)}|1\rangle|\chi\rangle\Big).$$

Корректность алгоритма Дойча (2)

На шаге 4 к первому регистру применяется преобразование Адамара.

Учитывая, что $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = |0\rangle + |1\rangle$, а $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = |0\rangle - |1\rangle$, получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((-1)^{f(0)}(|0\rangle + |1\rangle)|\chi\rangle + (-1)^{f(1)}(|0\rangle - |1\rangle)|\chi\rangle\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\Big((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}\Big)|0\rangle|\chi\rangle + \Big((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}\Big)|1\rangle|\chi\rangle\Big) =$$

$$= \begin{cases} \pm|0\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}|\chi\rangle, & \text{если } f \text{ константа,}\\ \pm|1\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}|\chi\rangle, & \text{если } f \text{ не константа.}\end{cases}$$

Теперь понятно, что, замерив на шаге 5 значение первого регистра, получим $|0\rangle$, если f — константа, и $|1\rangle$, если f — не константа.

Анализ допущений

Вернемся к сделанным допущениям.

Допущения теории квантовых алгоритмов

1. Можно «приготовлять» системы в некоторых заданных состояниях.
2. Можно применять к системам любые унитарные операторы.
3. Можно определять вероятность нахождения системы в некотором состоянии.

С точки зрения квантовой механики эти допущения выглядят разумно в том смысле, что они не противоречат никаким ее выводам.
Вопрос о том, насколько эти допущения *реализуемы*, выходит за рамки нашего курса — это вопрос к инженерам-физикам.
Важно понимать, что «квантовое превосходство», т.е. способность квантовых алгоритмов решать какие-то задачи «намного быстрее», чем это делают обычные алгоритмы, основано на двух подменах понятий:
во-первых, квантовые алгоритмы решают не те же самые задачи (замена функции f на оператор U_f в алгоритме Дойча),
во-вторых, число шагов считается иначе (каждое применение унитарного оператора рассматривается как один шаг вне зависимости от размерности пространства H).

Алгоритм Дойча–Йожи: постановка задачи

В 1992 г. Дойч и Ричард Йожа обобщили алгоритм Дойча.

Рассматриваются функции $f\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$, где n произвольно.
В задаче заранее известно, что f — либо константа, либо *сбалансированная* функция, т.е. принимает значения 0 и 1 одинаковое число раз (по 2^{n-1} раз).

Сама функция f неизвестна, но к ней можно обращаться как к черному ящику: задать аргумент $x \in \{0,1\}^n$ и получить значение $f(x)$.

Нужно узнать, является функция f константой.

Ясно, что любой детерминированный алгоритм для этой задачи требует $2^{n-1}+1$ вызовов функции f в наихудшем случае.

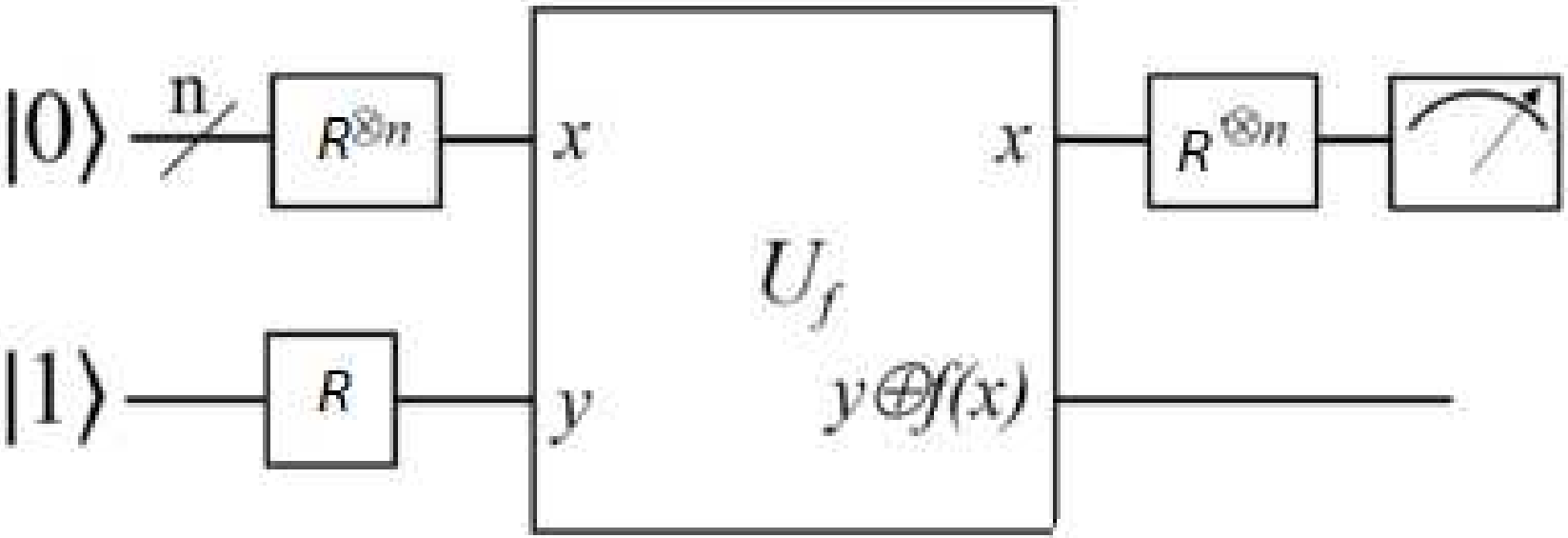
Алгоритм Дойча–Йожи

Алгоритм Дойча–Йожи работает с квантовой системой $H := H_{2^n} \otimes H_2$ (напомним, что $H_{2^n} = \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n \text{ раз}}$ — это n-я тензорная степень двумерного гильбертова пространства H_2).
Вместо $|a\rangle \otimes |b\rangle$ пишем $|a\rangle|b\rangle$ и ссылаемся на $|a\rangle$ и соответственно $|b\rangle$ как на *содержимое* первого и соответственно второго регистра.

Алгоритм Дойча–Йожи

1. Инициализируем H в состояние $|0\rangle|1\rangle$.
2. Применяем преобразование Адамара $R_{2^{n+1}} := R_{2^n} \otimes R_2$.
3. Применяем оператор $U_f : |a\rangle|b\rangle \mapsto |a\rangle|f(a) \oplus b\rangle$, где $\oplus$ — сумма mod 2.
4. Применяем преобразование Адамара R_{2^n} к первому регистру.
5. Измеряем первый регистр; если получится $|0\rangle$, то f — константа, если получится какой-нибудь другой базисный вектор $|u\rangle$, $u \neq 0$, то f — сбалансированная функция.

Алгоритм Дойча–Йожи: схема



Здесь (и во всех других алгоритмах) нужен явный вид оператора Адамара $R_{2^n} := \underbrace{R_2 \otimes \cdots \otimes R_2 \otimes R_2}_{n \text{ раз}}$. Напомним, что $R_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, откуда $R_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, а $R_2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Лемма

$R_{2^n}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{u=0}^{2^n-1} (-1)^{k \cdot u} |u\rangle$, где $k \cdot u := \sum_{i=0}^{n-1} k_i u_i \pmod 2$.

Доказательство. Имеем $|k\rangle = |k_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |k_0\rangle$, откуда

$$R_{2^n}|k\rangle = R_2|k_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes R_2|k_0\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(|0\rangle + (-1)^{k_{n-1}}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + (-1)^{k_0}|1\rangle\right).$$

Раскрывая скобки, получим сумму 2^n слагаемых, каждое из которых определяется выбором $|0\rangle$ или $|1\rangle$ из каждого множителя, т.е. равно $(-1)^{k_{n-1}u_{n-1} \oplus \cdots \oplus k_0 u_0} |u_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |u_0\rangle$, где $u_i = 0$, если из i-го множителя выбран $|0\rangle$, и $u_i = 1$, если из i-го множителя выбран $|1\rangle$. Если положить $|u\rangle := |u_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |u_0\rangle$, то это слагаемое можно записать как $(-1)^{k \cdot u}|u\rangle$.

Если в формулу

$$R_{2^n}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{u=0}^{2^n-1} (-1)^{k\cdot u}|u\rangle, \quad \text{где} \quad k \cdot u := \sum_{i=0}^{n-1} k_i u_i \pmod 2.$$

подставить $k = 0$, получим

$$R_{2^n}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{u=0}^{2^n-1} |u\rangle.$$

Это сумма всех базисных векторов пространства H_{2^n} с одинаковыми коэффициентами, иначе говоря, вектор, в котором равномерно представлены все базисные вектора.
Применяя какой-то оператор к этому вектору, мы неявно применяем этот оператор *ко всем базисным векторам одновременно*!

Корректность алгоритма Дойча–Йожи

Вычислим состояние системы на каждом шаге алгоритма Дойча–Йожи.
После шага 1 состояние $|0\rangle|1\rangle$.
На шаге 2 к каждому регистру применяется преобразование Адамара.
Получится $\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\left(\sum_{u=0}^{2^n-1}|u\rangle\right)|\chi\rangle$, где $|\chi\rangle := |0\rangle - |1\rangle$.

На шаге 3 применяется оператор U_f. Получим
$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\left(\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{f(u)}|u\rangle\right)|\chi\rangle$.
На шаге 4 к первому регистру применяется преобразование Адамара.
Получим

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2}}\left(\sum_{u=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}|j\rangle(-1)^{f(u)}|\chi\rangle\right) =$$

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}(-1)^{f(u)}|\chi\rangle.$$

Корректность алгоритма Дойча–Йожи (2)

Разберем, чему равно выражение

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}(-1)^{f(u)}|\chi\rangle \qquad (\star)$$

в зависимости от того, какова функция f. Напомним, что по условию задачи f — либо константа, либо сбалансированная функция.
Если f — константа, то $(-1)^{f(u)}$ от u не зависит и

$$\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}(-1)^{f(u)} = \begin{cases}\pm 2^n, & \text{если } j=0,\\ 0, & \text{если } j\neq 0.\end{cases}$$

Почему $\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}=0$ при $j\neq 0$? Напомним, $u\cdot j=\sum_{i=0}^{n-1}u_ij_i \pmod 2$. Рассмотрим линейное уравнение $j\cdot x=\sum_{i=0}^{n-1}j_ix_i=0$ в пространстве $\mathbb{F}^n$. При ненулевом j пространство решений этого уравнения имеет размерность $n-1$, откуда в $\mathbb{F}^n$ есть 2^{n-1} таких векторов u, что $u\cdot j=0$, и 2^{n-1} таких, что $u\cdot j=1$. Итак, при $j\neq 0$ в сумме $\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}$ равное число +1 и –1.

Следовательно, если f — константа, то выражение $(\star)$ равно $\pm|0\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}|\chi\rangle$, и потому *измерение первого регистра на шаге 5 даст $|0\rangle$ с вероятностью 1*.

Корректность алгоритма Дойча–Йожи (3)

Если f — сбалансированная функция, то среди чисел $(-1)^{f(u)}$ равное количество +1 и –1. Поэтому $\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}(-1)^{f(u)} = 0$, если $j = 0$. Следовательно, если f — сбалансированная функция, то в выражении $(\star)$ пропадёт слагаемое с $j = 0$ и останется

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{2^n-1}|j\rangle\sum_{u=0}^{2^n-1}(-1)^{u\cdot j}(-1)^{f(u)}|\chi\rangle.$$

Измерение первого регистра на шаге 5 даст какой-то вектор $|j\rangle$ с $j \neq 0$.