Матричный формализм

М. В. Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Напомним *физико-математический словарь* из предыдущей лекции:

Квантовая система	(Конечномерное) гильбертово пространство H
Состояние системы	Неотрицательный оператор $R\colon H \to H$ со следом 1
Наблюдаемая	Самосопряженный оператор $A\colon H \to H$
Результаты наблюдения	Собственные значения оператора A
Ожидаемое значение A в состоянии R	$\mathrm{tr}\,(RA)$
Преобразование системы	Унитарный оператор на H

Напомним *физико-математический словарь* из предыдущей лекции:

Квантовая система	(Конечномерное) гильбертово пространство H
Состояние системы	Неотрицательный оператор $R\colon H \to H$ со следом 1
Наблюдаемая	Самосопряженный оператор $A\colon H \to H$
Результаты наблюдения	Собственные значения оператора A
Ожидаемое значение A в состоянии R	$\mathrm{tr}\,(RA)$
Преобразование системы	Унитарный оператор на H

Цель данной лекции — обсудить понятия из правого столбца, напомнить их свойства и зафиксировать некоторые обозначения.

В данном курсе *гильбертово пространство* H — это конечномерное линейное (векторное) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором определено *скалярное произведение*, т.е. отображение $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall x, y_1, y_2 \in H \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\; \langle x \,|\, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x \,|\, y_1 \rangle + \beta \langle x \,|\, y_2 \rangle$;
2. $\forall x, y \in H \;\; \langle y \,|\, x \rangle = \overline{\langle x \,|\, y \rangle}$;
3. $\forall x \in H \;\; \langle x \,|\, x \rangle \in \mathbb{R}$ и $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x \,|\, x \rangle = 0$ только при $x = 0$.

В данном курсе *гильбертово пространство* H — это конечномерное линейное (векторное) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором определено *скалярное произведение*, т.е. отображение $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall x, y_1, y_2 \in H \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\; \langle x \,|\, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x \,|\, y_1 \rangle + \beta \langle x \,|\, y_2 \rangle$;
2. $\forall x, y \in H \;\; \langle y \,|\, x \rangle = \overline{\langle x \,|\, y \rangle}$;
3. $\forall x \in H \;\; \langle x \,|\, x \rangle \in \mathbb{R}$ и $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x \,|\, x \rangle = 0$ только при $x = 0$.

Другими словами, это в точности то, что курсе линейной алгебры второго семестра называлось *унитарным пространством*.

В данном курсе *гильбертово пространство* H — это конечномерное линейное (векторное) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором определено *скалярное произведение*, т.е. отображение $\langle \bullet \mid \bullet \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall x, y_1, y_2 \in H \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\; \langle x \mid \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x \mid y_1 \rangle + \beta \langle x \mid y_2 \rangle$;
2. $\forall x, y \in H \;\; \langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle}$;
3. $\forall x \in H \;\; \langle x \mid x \rangle \in \mathbb{R}$ и $\langle x \mid x \rangle \geq 0$, причем $\langle x \mid x \rangle = 0$ только при $x = 0$.

Другими словами, это в точности то, что курсе линейной алгебры второго семестра называлось *унитарным пространством*.

В силу 1 и 2 скалярное произведение *полулинейно* по первому аргументу:

$$\forall x_1, x_2, y \in H \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; \langle \alpha x_1 + \beta x_2 \mid y \rangle = \overline{\alpha} \langle x_1 \mid y \rangle + \overline{\beta} \langle x_2 \mid y \rangle.$$

В данном курсе *гильбертово пространство* H — это конечномерное линейное (векторное) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором определено *скалярное произведение*, т.е. отображение $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall x, y_1, y_2 \in H \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;\; \langle x \,|\, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x \,|\, y_1 \rangle + \beta \langle x \,|\, y_2 \rangle$;
2. $\forall x, y \in H \;\; \langle y \,|\, x \rangle = \overline{\langle x \,|\, y \rangle}$;
3. $\forall x \in H \;\; \langle x \,|\, x \rangle \in \mathbb{R}$ и $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x \,|\, x \rangle = 0$ только при $x = 0$.

Другими словами, это в точности то, что курсе линейной алгебры второго семестра называлось *унитарным пространством*.

В силу 1 и 2 скалярное произведение *полулинейно* по первому аргументу:

$$\forall x_1, x_2, y \in H \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; \langle \alpha x_1 + \beta x_2 \,|\, y \rangle = \overline{\alpha} \langle x_1 \,|\, y \rangle + \overline{\beta} \langle x_2 \,|\, y \rangle.$$

Напомним еще формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты в ортонормированном базисе:

если $x = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}$, а $y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$, то $\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\zeta_i} \eta_i$.

Отметим отличие в обозначениях: угловые скобки и $|$ вместо запятой между аргументами произведения. Это — часть *обозначений Дирака*.

Отметим отличие в обозначениях: угловые скобки и $|$ вместо запятой между аргументами произведения. Это — часть *обозначений Дирака*.

Будем пользоваться обозначениями $\langle x|$ для векторов-строк (*бра-вектора*) и $|y\rangle$ для векторов-столбцов (*кет-вектора*).

Отметим отличие в обозначениях: угловые скобки и $|$ вместо запятой между аргументами произведения. Это — часть *обозначений Дирака*.

Будем пользоваться обозначениями $\langle x|$ для векторов-строк (*бра-вектора*) и $|y\rangle$ для векторов-столбцов (*кет-вектора*). Мы делим обозначение $\langle x \mid y\rangle$ (bra-c-ket) на две «половинки».

Обозначения Дирака

Отметим отличие в обозначениях: угловые скобки и $|$ вместо запятой между аргументами произведения. Это — часть *обозначений Дирака*.

Будем пользоваться обозначениями $\langle x|$ для векторов-строк (*бра-вектора*) и $|y\rangle$ для векторов-столбцов (*кет-вектора*). Мы делим обозначение $\langle x \mid y\rangle$ (bra-c-ket) на две «половинки». При этом $\langle x| = |x\rangle^*$, где звездочка обозначает *эрмитово сопряжение матриц*, т.е. транспонирование плюс комплексное сопряжение.

Отметим отличие в обозначениях: угловые скобки и $|$ вместо запятой между аргументами произведения. Это — часть *обозначений Дирака*.

Будем пользоваться обозначениями $\langle x|$ для векторов-строк (*бра-вектора*) и $|y\rangle$ для векторов-столбцов (*кет-вектора*). Мы делим обозначение $\langle x \mid y \rangle$ (bra-c-ket) на две «половинки». При этом $\langle x| = |x\rangle^*$, где звездочка обозначает *эрмитово сопряжение матриц*, т.е. транспонирование плюс комплексное сопряжение. Следовательно, скалярное произведение $\langle x \mid y \rangle$ равно произведению $\langle x| \cdot |y\rangle$ как матриц (по правилу «строка на столбец»).

Отметим отличие в обозначениях: угловые скобки и $|$ вместо запятой между аргументами произведения. Это — часть *обозначений Дирака*.

Будем пользоваться обозначениями $\langle x|$ для векторов-строк (*бра-вектора*) и $|y\rangle$ для векторов-столбцов (*кет-вектора*). Мы делим обозначение $\langle x\,|\,y\rangle$ (bra-c-ket) на две «половинки». При этом $\langle x| = |x\rangle^*$, где звездочка обозначает *эрмитово сопряжение матриц*, т.е. транспонирование плюс комплексное сопряжение. Следовательно, скалярное произведение $\langle x\,|\,y\rangle$ равно произведению $\langle x|\cdot|y\rangle$ как матриц (по правилу «строка на столбец»).

Действительно, если $|x\rangle = \begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{bmatrix}$, а $|y\rangle = \begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}$, то $\langle x| = \begin{bmatrix}\overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \cdots & \overline{\zeta_n}\end{bmatrix}$ и

$$\langle x|\cdot|y\rangle = \begin{bmatrix}\overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \cdots & \overline{\zeta_n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\zeta_i}\eta_i = \langle x\,|\,y\rangle.$$

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

«Числовые» обозначения для базисных векторов

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

Таким образом, $|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а $|1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

«Числовые» обозначения для базисных векторов

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Таким образом, $|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а $|1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В общем случае мы будем работать с 2^n-мерным пространством H_{2^n} — n-й *тензорной степенью* пространства H_2.

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Таким образом, $|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а $|1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В общем случае мы будем работать с 2^n-мерным пространством H_{2^n} — n-й *тензорной степенью* пространства H_2.

Напомним, что если K и L — конечномерные векторные пространства, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ — базис в K, а $\{f_j\}_{j=1,\dots,m}$ — базис в L, то их *тензорным произведением* $K \otimes L$ называется векторное пространство с базисом $e_i \otimes f_j$.

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Таким образом, $|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а $|1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В общем случае мы будем работать с 2^n-мерным пространством H_{2^n} — n-й *тензорной степенью* пространства H_2.

Напомним, что если K и L — конечномерные векторные пространства, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ — базис в K, а $\{f_j\}_{j=1,\dots,m}$ — базис в L, то их *тензорным произведением* $K \otimes L$ называется векторное пространство с базисом $e_i \otimes f_j$.

Базис $H_{2^n} := \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n \text{ раз}}$ состоит из всевозможных векторов вида $|k_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |k_1\rangle \otimes |k_0\rangle$, где $k_{n-1}, \dots, k_1, k_0 \in \{0, 1\}$.

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Таким образом, $|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а $|1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В общем случае мы будем работать с 2^n-мерным пространством H_{2^n} — n-й *тензорной степенью* пространства H_2.

Напомним, что если K и L — конечномерные векторные пространства, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ — базис в K, а $\{f_j\}_{j=1,\dots,m}$ — базис в L, то их *тензорным произведением* $K \otimes L$ называется векторное пространство с базисом $e_i \otimes f_j$.

Базис $H_{2^n} := \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n \text{ раз}}$ состоит из всевозможных векторов вида $|k_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |k_1\rangle \otimes |k_0\rangle$, где $k_{n-1}, \dots, k_1, k_0 \in \{0, 1\}$.

Будем записывать такой вектор как $|k_{n-1} \dots k_1 k_0\rangle$ или просто как $|k\rangle$, где k — натуральное число с двоичным представлением $k_{n-1} \dots k_1 k_0$.

Мы фиксируем некоторый ортонормированный базис в H и отождествляем вектора из H с их координатными *столбцами* в этом базисе.

Когда $H := H_2$ двумерно, мы обозначаем базисные вектора через $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Таким образом, $|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а $|1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В общем случае мы будем работать с 2^n-мерным пространством H_{2^n} — n-й *тензорной степенью* пространства H_2.

Напомним, что если K и L — конечномерные векторные пространства, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ — базис в K, а $\{f_j\}_{j=1,\dots,m}$ — базис в L, то их *тензорным произведением* $K \otimes L$ называется векторное пространство с базисом $e_i \otimes f_j$.

Базис $H_{2^n} := \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n \text{ раз}}$ состоит из всевозможных векторов вида $|k_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |k_1\rangle \otimes |k_0\rangle$, где $k_{n-1}, \dots, k_1, k_0 \in \{0, 1\}$.

Будем записывать такой вектор как $|k_{n-1} \dots k_1 k_0\rangle$ или просто как $|k\rangle$, где k — натуральное число с двоичным представлением $k_{n-1} \dots k_1 k_0$.

Итак, базис H_{2^n} состоит из векторов $|k\rangle$, где $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Например, базис пространства H_4 состоит из векторов

$$|0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad |1\rangle = |01\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$|2\rangle = |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad |3\rangle = |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Например, базис пространства H_4 состоит из векторов

$$|0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad |1\rangle = |01\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$|2\rangle = |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad |3\rangle = |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Это согласуется с определением *тензорного произведения* матриц: если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ а } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}, \text{ то } A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Квантовая система	(Конечномерное) гильбертово пространство H
— сейчас мы находимся здесь —	
Состояние системы	Неотрицательный оператор $R\colon H \to H$ со следом 1
Наблюдаемая	Самосопряженный оператор $A\colon H \to H$
Результаты наблюдения	Собственные значения оператора A
Ожидаемое значение A в состоянии R	$\mathrm{tr}\,(RA)$
Преобразование системы	Унитарный оператор на H

Оператор $R\colon H \to H$ называется *неотрицательным*, если $\langle u \mid Ru \rangle$ — неотрицательное действительное число для любого $u \in H$.
Докажем, что неотрицательный оператор будет самосопряженным.

Оператор $R\colon H \to H$ называется *неотрицательным*, если $\langle u \,|\, Ru \rangle$ — неотрицательное действительное число для любого $u \in H$.
Докажем, что неотрицательный оператор будет самосопряженным.

Лемма

Если $\langle u \,|\, Ru \rangle = 0$ для всех $u \in H$, то $R = 0$.

Оператор $R\colon H \to H$ называется *неотрицательным*, если $\langle u \,|\, Ru \rangle$ — неотрицательное действительное число для любого $u \in H$.
Докажем, что неотрицательный оператор будет самосопряженным.

Лемма

Если $\langle u \,|\, Ru \rangle = 0$ для всех $u \in H$, то $R = 0$.

Доказательство. Возьмем $u = x + y$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x + y \,|\, R(x + y) \rangle = \langle x \,|\, Rx \rangle + \langle x \,|\, Ry \rangle + \langle y \,|\, Rx \rangle + \langle y \,|\, Ry \rangle \\ &= \langle x \,|\, Ry \rangle + \langle y \,|\, Rx \rangle, \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx \rangle = \langle y \,|\, Ry \rangle = 0. \end{aligned}$$

Оператор $R\colon H \to H$ называется *неотрицательным*, если $\langle u \,|\, Ru\rangle$ — неотрицательное действительное число для любого $u \in H$.
Докажем, что неотрицательный оператор будет самосопряженным.

Лемма

Если $\langle u \,|\, Ru\rangle = 0$ для всех $u \in H$, то $R = 0$.

Доказательство. Возьмем $u = x + y$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x+y \,|\, R(x+y)\rangle = \langle x \,|\, Rx\rangle + \langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle + \langle y \,|\, Ry\rangle \\ &= \langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle, \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx\rangle = \langle y \,|\, Ry\rangle = 0. \end{aligned}$$

Теперь возьмем $u = x - iy$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x - iy \,|\, R(x-iy)\rangle = \langle x \,|\, Rx\rangle - i\langle x \,|\, Ry\rangle + i\langle y \,|\, Rx\rangle + \langle y \,|\, Ry\rangle \\ &= -i(\langle x \,|\, Ry\rangle - \langle y \,|\, Rx\rangle), \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx\rangle = \langle y \,|\, Ry\rangle = 0. \end{aligned}$$

Оператор $R\colon H \to H$ называется *неотрицательным*, если $\langle u \,|\, Ru\rangle$ — неотрицательное действительное число для любого $u \in H$.
Докажем, что неотрицательный оператор будет самосопряженным.

Лемма

Если $\langle u \,|\, Ru\rangle = 0$ для всех $u \in H$, то $R = 0$.

Доказательство. Возьмем $u = x + y$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x+y \,|\, R(x+y)\rangle = \langle x \,|\, Rx\rangle + \langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle + \langle y \,|\, Ry\rangle \\ &= \langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle, \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx\rangle = \langle y \,|\, Ry\rangle = 0. \end{aligned}$$

Теперь возьмем $u = x - iy$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x-iy \,|\, R(x-iy)\rangle = \langle x \,|\, Rx\rangle - i\langle x \,|\, Ry\rangle + i\langle y \,|\, Rx\rangle + \langle y \,|\, Ry\rangle \\ &= -i(\langle x \,|\, Ry\rangle - \langle y \,|\, Rx\rangle), \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx\rangle = \langle y \,|\, Ry\rangle = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle = 0$ и $\langle x \,|\, Ry\rangle - \langle y \,|\, Rx\rangle = 0$.

Неотрицательные операторы

Оператор $R\colon H \to H$ называется *неотрицательным*, если $\langle u \,|\, Ru\rangle$ — неотрицательное действительное число для любого $u \in H$.
Докажем, что неотрицательный оператор будет самосопряженным.

Лемма

Если $\langle u \,|\, Ru\rangle = 0$ для всех $u \in H$, то $R = 0$.

Доказательство. Возьмем $u = x + y$. Тогда

$$\begin{aligned}0 &= \langle x + y \,|\, R(x + y)\rangle = \langle x \,|\, Rx\rangle + \langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle + \langle y \,|\, Ry\rangle \\ &= \langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle, \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx\rangle = \langle y \,|\, Ry\rangle = 0.\end{aligned}$$

Теперь возьмем $u = x - iy$. Тогда

$$\begin{aligned}0 &= \langle x - iy \,|\, R(x - iy)\rangle = \langle x \,|\, Rx\rangle - i\langle x \,|\, Ry\rangle + i\langle y \,|\, Rx\rangle + \langle y \,|\, Ry\rangle \\ &= -i(\langle x \,|\, Ry\rangle - \langle y \,|\, Rx\rangle), \quad \text{так как } \langle x \,|\, Rx\rangle = \langle y \,|\, Ry\rangle = 0.\end{aligned}$$

Итак, $\langle x \,|\, Ry\rangle + \langle y \,|\, Rx\rangle = 0$ и $\langle x \,|\, Ry\rangle - \langle y \,|\, Rx\rangle = 0$. Складывая эти два равенства, получаем $\langle x \,|\, Ry\rangle = 0$. Взяв в роли x вектор Ry, заключаем, что $Ry = 0$. Поскольку в роли y можно выбрать любой вектор из H, заключаем, что $R = 0$.

Неотрицательные операторы (2)

Напомним определяющее свойство *сопряженного оператора*:

$$\langle x \mid Ay \rangle = \langle A^* x \mid y \rangle.$$

Напомним определяющее свойство *сопряженного оператора*:

$$\langle x \mid Ay \rangle = \langle A^* x \mid y \rangle.$$

Оператор $A\colon H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Напомним определяющее свойство *сопряженного оператора*:

$$\langle x \,|\, Ay \rangle = \langle A^* x \,|\, y \rangle.$$

Оператор $A\colon H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Предложение

Если $\langle u \,|\, Ru \rangle \in \mathbb{R}$ для всех $u \in H$, то R — самосопряженный оператор.

Напомним определяющее свойство *сопряженного оператора*:

$$\langle x \mid Ay \rangle = \langle A^* x \mid y \rangle.$$

Оператор $A\colon H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Предложение

Если $\langle u \mid Ru \rangle \in \mathbb{R}$ для всех $u \in H$, то R — самосопряженный оператор.

Доказательство. Поскольку $\langle u \mid Ru \rangle$ — действительное число, имеем

$$\langle u \mid Ru \rangle = \overline{\langle u \mid Ru \rangle} = \langle Ru \mid u \rangle = \langle u \mid R^* u \rangle.$$

Поэтому $\langle u \mid (R - R^*)u \rangle = 0$ для любого $u \in H$. Применяя лемму, заключаем, что $R - R^* = 0$, т.е. $R = R^*$.

Состояния системы

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H. В этом базисе

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H. В этом базисе

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

След матрицы для $|x\rangle\langle x|$ равен 1, но след оператора не зависит от выбора базиса, в котором вычисляется его матрица. Значит, $\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|) = 1$.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H. В этом базисе

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

След матрицы для $|x\rangle\langle x|$ равен 1, но след оператора не зависит от выбора базиса, в котором вычисляется его матрица. Значит, $\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|) = 1$. Теперь возьмем произвольный вектор $u \in H$ и подсчитаем $\langle u \,|\, (|x\rangle\langle x|)u\rangle$.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H. В этом базисе

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

След матрицы для $|x\rangle\langle x|$ равен 1, но след оператора не зависит от выбора базиса, в котором вычисляется его матрица. Значит, $\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|) = 1$.
Теперь возьмем произвольный вектор $u \in H$ и подсчитаем $\langle u \,|\, (|x\rangle\langle x|)u\rangle$.

Продолжая вычислять в том же базисе, имеем $(|x\rangle\langle x|)u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, где α — первая координата вектора u.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H. В этом базисе

$$|x\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \langle x| = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\0 & 0 & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

След матрицы для $|x\rangle\langle x|$ равен 1, но след оператора не зависит от выбора базиса, в котором вычисляется его матрица. Значит, $\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|) = 1$.
Теперь возьмем произвольный вектор $u \in H$ и подсчитаем $\langle u \,|\, (|x\rangle\langle x|)u\rangle$.

Продолжая вычислять в том же базисе, имеем $(|x\rangle\langle x|)u = \begin{bmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, где α — первая координата вектора u. Отсюда $\langle u \,|\, (|x\rangle\langle x|)u\rangle = \overline{\alpha}\alpha \geq 0$.

Наш словарик говорит, что состояния системы — это неотрицательные операторы со следом 1. Типичный такой оператор — это произведение $|x\rangle\langle x|$, где x — вектор длины 1. Действительно, раз x — вектор длины 1, x можно дополнить до ортонормированного базиса в H. В этом базисе

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

След матрицы для $|x\rangle\langle x|$ равен 1, но след оператора не зависит от выбора базиса, в котором вычисляется его матрица. Значит, $\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|) = 1$.

Теперь возьмем произвольный вектор $u \in H$ и подсчитаем $\langle u \,|\, (|x\rangle\langle x|)u\rangle$.

Продолжая вычислять в том же базисе, имеем $(|x\rangle\langle x|)u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, где α — первая координата вектора u. Отсюда $\langle u \,|\, (|x\rangle\langle x|)u\rangle = \overline{\alpha}\alpha \geq 0$.

Итак, *каждый вектор длины 1 определяет состояние системы.*

Что сделано и что осталось сделать

Квантовая система	(Конечномерное) гильбертово пространство H
Состояние системы	Неотрицательный оператор $R\colon H \to H$ со следом 1
— сейчас мы находимся здесь —	
Наблюдаемая	Самосопряженный оператор $A\colon H \to H$
Результаты наблюдения	Собственные значения оператора A
Ожидаемое значение A в состоянии R	$\mathrm{tr}\,(RA)$
Преобразование системы	Унитарный оператор на H

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.
Собственные значения самосопряженного оператора действительны.

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.
Собственные значения самосопряженного оператора действительны.
Далее сказано, что ожидаемое значение A в состоянии R — это $\operatorname{tr}(RA)$.

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.
Собственные значения самосопряженного оператора действительны.
Далее сказано, что ожидаемое значение A в состоянии R — это $\mathrm{tr}(RA)$.
Понятно, что это ожидаемое значение тоже должно быть действительным.

О следах

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.
Собственные значения самосопряженного оператора действительны.
Далее сказано, что ожидаемое значение A в состоянии R — это $\mathrm{tr}(RA)$.
Понятно, что это ожидаемое значение тоже должно быть действительным.
Однако то, что $\mathrm{tr}(RA)$ — действительное число, отнюдь не очевидно (ведь оператор RA не обязан быть самосопряженным).

О следах

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.

Собственные значения самосопряженного оператора действительны.

Далее сказано, что ожидаемое значение A в состоянии R — это $\mathrm{tr}(RA)$.

Понятно, что это ожидаемое значение тоже должно быть действительным.

Однако то, что $\mathrm{tr}(RA)$ — действительное число, отнюдь не очевидно (ведь оператор RA не обязан быть самосопряженным). Докажем это.

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.
Собственные значения самосопряженного оператора действительны.
Далее сказано, что ожидаемое значение A в состоянии R — это $\mathrm{tr}(RA)$.
Понятно, что это ожидаемое значение тоже должно быть действительным.
Однако то, что $\mathrm{tr}(RA)$ — действительное число, отнюдь не очевидно (ведь оператор RA не обязан быть самосопряженным). Докажем это.

Предложение

Если A и B — самосопряженные матрицы, то $\mathrm{tr}(AB) \in \mathbb{R}$.

Наш словарик говорит, что наблюдаемые — это самосопряженные операторы на H, а возможные результаты наблюдения за наблюдаемой A — это собственные значения оператора A.
Собственные значения самосопряженного оператора действительны.
Далее сказано, что ожидаемое значение A в состоянии R — это $\mathrm{tr}(RA)$.
Понятно, что это ожидаемое значение тоже должно быть действительным.
Однако то, что $\mathrm{tr}(RA)$ — действительное число, отнюдь не очевидно (ведь оператор RA не обязан быть самосопряженным). Докажем это.

Предложение

Если A и B — самосопряженные матрицы, то $\mathrm{tr}(AB) \in \mathbb{R}$.

Первое доказательство основано на прямом вычислении. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$. Тогда $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{ji}$.
С другой стороны,

$$\overline{\mathrm{tr}(AB)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\,\overline{\beta_{ji}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\beta_{ij} \qquad (\text{так как } A = A^* \text{ и } B = B^*)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ji}\beta_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{ji} = \mathrm{tr}(AB).$$

Второе доказательство не оперирует прямо с элементами матриц A и B.

О следах (2)

Второе доказательство не оперирует прямо с элементами матриц A и B.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}(AB)} &= \mathrm{tr}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathrm{tr}(A^T B^T) && \text{так как } A = A^* = \overline{A}^T \text{ и } B = B^* = \overline{B}^T \\
&= \mathrm{tr}((BA)^T) && \text{так как } A^T B^T = (BA)^T \\
&= \mathrm{tr}(BA) && \text{так как } \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\, C^T \text{ для любой матрицы } C \\
&= \mathrm{tr}(AB) && \text{так как } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

О следах (2)

Второе доказательство не оперирует прямо с элементами матриц A и B.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}(AB)} &= \mathrm{tr}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathrm{tr}(A^T B^T) && \text{так как } A = A^* = \overline{A}^T \text{ и } B = B^* = \overline{B}^T\\
&= \mathrm{tr}((BA)^T) && \text{так как } A^T B^T = (BA)^T\\
&= \mathrm{tr}(BA) && \text{так как } \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\, C^T \text{ для любой матрицы } C\\
&= \mathrm{tr}(AB) && \text{так как } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

Здесь применено хорошо известное свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Оно верно и в ситуации, когда A и B — матрицы размеров $n \times k$ и $k \times n$ соответственно.

Используем свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, чтобы вычислить ожидаемое значение наблюдаемой A в состоянии, определяемом вектором x длины 1.

Второе доказательство не оперирует прямо с элементами матриц A и B.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}(AB)} &= \mathrm{tr}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathrm{tr}(A^T B^T) && \text{так как } A = A^* = \overline{A}^T \text{ и } B = B^* = \overline{B}^T \\
&= \mathrm{tr}((BA)^T) && \text{так как } A^T B^T = (BA)^T \\
&= \mathrm{tr}(BA) && \text{так как } \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\, C^T \text{ для любой матрицы } C \\
&= \mathrm{tr}(AB) && \text{так как } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

Здесь применено хорошо известное свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Оно верно и в ситуации, когда A и B — матрицы размеров $n \times k$ и $k \times n$ соответственно.

Используем свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, чтобы вычислить ожидаемое значение наблюдаемой A в состоянии, определяемом вектором x длины 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|A) &= \mathrm{tr}(\langle x|A|x\rangle) && \text{переставили множители } |x\rangle \text{ и } \langle x|A \\
&= \langle x|A|x\rangle && \text{так как } \langle x|A|x\rangle \text{ — число.}
\end{aligned}$$

Второе доказательство не оперирует прямо с элементами матриц A и B.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}(AB)} &= \mathrm{tr}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathrm{tr}(A^T B^T) && \text{так как } A = A^* = \overline{A}^T \text{ и } B = B^* = \overline{B}^T \\
&= \mathrm{tr}((BA)^T) && \text{так как } A^T B^T = (BA)^T \\
&= \mathrm{tr}(BA) && \text{так как } \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\, C^T \text{ для любой матрицы } C \\
&= \mathrm{tr}(AB) && \text{так как } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

Здесь применено хорошо известное свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Оно верно и в ситуации, когда A и B — матрицы размеров $n \times k$ и $k \times n$ соответственно.

Используем свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, чтобы вычислить ожидаемое значение наблюдаемой A в состоянии, определяемом вектором x длины 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|A) &= \mathrm{tr}(\langle x|A|x\rangle) && \text{переставили множители } |x\rangle \text{ и } \langle x|A \\
&= \langle x|A|x\rangle && \text{так как } \langle x|A|x\rangle \text{ — число.}
\end{aligned}$$

Итак, ожидаемое значение наблюдаемой A в состоянии, определяемом вектором x длины 1, равно $\langle x|A|x\rangle$.

Второе доказательство не оперирует прямо с элементами матриц A и B.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}(AB)} &= \mathrm{tr}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathrm{tr}(A^T B^T) && \text{так как } A = A^* = \overline{A}^T \text{ и } B = B^* = \overline{B}^T\\
&= \mathrm{tr}((BA)^T) && \text{так как } A^T B^T = (BA)^T\\
&= \mathrm{tr}(BA) && \text{так как } \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\, C^T \text{ для любой матрицы } C\\
&= \mathrm{tr}(AB) && \text{так как } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

Здесь применено хорошо известное свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Оно верно и в ситуации, когда A и B — матрицы размеров $n \times k$ и $k \times n$ соответственно.

Используем свойство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, чтобы вычислить ожидаемое значение наблюдаемой A в состоянии, определяемом вектором x длины 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(|x\rangle\langle x|A) &= \mathrm{tr}(\langle x|A|x\rangle) && \text{переставили множители } |x\rangle \text{ и } \langle x|A\\
&= \langle x|A|x\rangle && \text{так как } \langle x|A|x\rangle \text{ — число.}
\end{aligned}$$

Итак, ожидаемое значение наблюдаемой A в состоянии, определяемом вектором x длины 1, равно $\langle x|A|x\rangle$. Это действительное число, которое можно понимать и как скалярное произведение кет-векторов $|x\rangle$ и $A|x\rangle$.

Что сделано и что осталось сделать

Квантовая система	(Конечномерное) гильбертово пространство H
Состояние системы	Неотрицательный оператор $R\colon H \to H$ со следом 1
Наблюдаемая	Самосопряженный оператор $A\colon H \to H$
Результаты наблюдения	Собственные значения оператора A
Ожидаемое значение A в состоянии R	$\mathrm{tr}\,(RA)$
— сейчас мы находимся здесь —	
Преобразование системы	Унитарный оператор на H

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y\rangle = \langle Ux \mid Uy\rangle$ для всех $x, y \in H$.

Унитарные операторы

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y \rangle = \langle Ux \mid Uy \rangle$ для всех $x, y \in H$.
В терминах матрицы — столбцы составляют ортонормированный базис.

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y \rangle = \langle Ux \mid Uy \rangle$ для всех $x, y \in H$.
В терминах матрицы — столбцы составляют ортонормированный базис.

Мы постоянно используем *преобразование Адамара* (Hadamard).

Унитарные операторы

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y\rangle = \langle Ux \mid Uy\rangle$ для всех $x, y \in H$.
В терминах матрицы — столбцы составляют ортонормированный базис.

Мы постоянно используем *преобразование Адамара* (Hadamard).
На H_2 оно задается матрицей $R_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y \rangle = \langle Ux \mid Uy \rangle$ для всех $x, y \in H$.
В терминах матрицы — столбцы составляют ортонормированный базис.

Мы постоянно используем *преобразование Адамара* (Hadamard).
На H_2 оно задается матрицей $R_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
Для $H_{2^n} = \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n \text{ раз}}$ матрицей преобразования Адамара будет соответствующая тензорная степень матрицы R_2, т.е.

$$R_{2^n} := \underbrace{R_2 \otimes \cdots \otimes R_2 \otimes R_2}_{n \text{ раз}}.$$

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y\rangle = \langle Ux \mid Uy\rangle$ для всех $x, y \in H$.
В терминах матрицы — столбцы составляют ортонормированный базис.

Мы постоянно используем *преобразование Адамара* (Hadamard).

На H_2 оно задается матрицей $R_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Для $H_{2^n} = \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n \text{ раз}}$ матрицей преобразования Адамара будет соответствующая тензорная степень матрицы R_2, т.е.

$$R_{2^n} := \underbrace{R_2 \otimes \cdots \otimes R_2 \otimes R_2}_{n \text{ раз}}.$$

Например, $R_4 = R_2 \otimes R_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Оператор $U\colon H \to H$ называется *унитарным*, если $U^* = U^{-1}$.
Эквивалентное определение: $\langle x \mid y \rangle = \langle Ux \mid Uy \rangle$ для всех $x, y \in H$.
В терминах матрицы — столбцы составляют ортонормированный базис.

Мы постоянно используем *преобразование Адамара* (Hadamard).

На H_2 оно задается матрицей $R_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Для $H_{2^n} = \underbrace{H_2 \otimes \cdots \otimes H_2 \otimes H_2}_{n\ \text{раз}}$ матрицей преобразования Адамара будет соответствующая тензорная степень матрицы R_2, т.е.

$$R_{2^n} := \underbrace{R_2 \otimes \cdots \otimes R_2 \otimes R_2}_{n\ \text{раз}}.$$

Например, $R_4 = R_2 \otimes R_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Применение преобразования Адамара к вектору $|0\rangle$ дает вектор, в котором «равномерно» представлены все базисные вектора. Например,

$$R_4|0\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle\right).$$