

**Вопросы для подготовки к зачёту по курсу
“Дифференциальная геометрия и топология”
для студентов ДММиКН ИЕНиМ**

Кривые в аффинном евклидовом пространстве

1. Векторная функция от одной переменной. Теорема о дифференцировании билинейных отображений (без доказательства). Следствие из нее.
2. Кривая в аффинном евклидовом пространстве. Производная, касательная. Регулярность кривой.
3. Эквивалентность кривых, строгая эквивалентность кривых. Длина кривой.
4. Утверждение об инвариантности длины кривой относительно замены параметра и изометрии (без доказательства).
5. Кривая 1-скорости (определение, свойства). Теорема о строгой эквивалентности регулярной кривой и кривой 1-скорости. (без доказательства). Натуральная параметризация кривой.
6. Гладкие кривые на плоскости. Различные задания гладких линий на плоскости. Градиент.
7. Касательная, нормаль. Условие соприкосновения (касания) двух кривых при различном задании их на плоскости. Порядок касания двух плоских кривых.
8. Огибающая семейства плоских кривых. Определение огибающей, необходимое условие огибающей.
9. Понятие подвижного репера плоской регулярной кривой, кривизны этой кривой. Теорема Френе. Формулы вычисления репера Френе и кривизны.
10. Утверждение о плоской регулярной кривой с постоянной кривизной (без доказательства). Теорема о натуральных уравнениях кривой (без доказательства). Механический смысл кривизны кривой 1-скорости.
11. Центр кривизны, радиус кривизны, соприкасающаяся окружность (определение). Утверждение о соприкасающейся окружности (формулировка).

Кривые общего положения

12. Определение базиса Френе бигоряжной кривой в трёхмерном пространстве. Утверждение о существовании и единственности базиса Френе (без доказательства).
13. Теорема Френе-Жордана (без доказательства). Уравнения Френе.
14. Предложение о репере Френе и кривизнах эквивалентных кривых. Теорема о существовании и единственности кривых с данными кривизнами (формулировка).
15. Теорема о бигоряжных кривых с нулевым кручением (без доказательства).
16. Кривые общего вида в трёхмерном пространстве. Формулы Френе в трёхмерном пространстве. Нахождение векторов репера Френе, кривизны, кручения. Касательная, главная нормаль, бинормаль, соприкасающаяся плоскость, спрямляющая плоскость, нормальная плоскость.

Поверхности

17. Дифференциал гладкого отображения. (определение). Частные производные. Предложение о значении дифференциала от касательного вектора кривой (без доказательства).

18. Понятие поверхности в афинном пространстве. Касательный вектор поверхности, касательное пространство. Утверждение о касательном пространстве (без доказательства).
19. u^i – линии, $i \in \{1, \dots, n\}$ и стандартный базис касательного пространства.
20. Равенство координат касательного вектора поверхности в стандартном базисе касательного пространства и координат его прообраза в стандартном базисе в области определения (без доказательства).
21. Вычисления на поверхности (внутренняя геометрия поверхности). Определение первой фундаментальной формы. Вычисление длины кривой, угла на поверхности. Вычисление «объёма» поверхности.
22. Параметризация поверхностей вращения, в частности, сферы.
23. Определение нормального стандартного Гауссова поля для гиперповерхности. Утверждение о дифференциале нормального Гауссова поля (без доказательства).
24. Определение основного оператора в точке для гиперповерхности. Определение второй фундаментальной формы. Основные свойства этих оператора и формы (без доказательства).
25. Основной оператор как композиция двух дифференциалов (без доказательства).
26. Определение полной Гауссовой и средней кривизны, а также главных кривизн и главных направлений для гиперповерхности.
27. Линий кривизны (определение). Нахождение линий кривизны для трёхмерных поверхностей (формула).
28. Утверждение о матрице основного оператора (без доказательства).
29. Связь полной и средней кривизны с главными кривизнами.
30. Локальное строение гиперповерхности (без доказательства). Классификация точек на поверхности.

Состав билета: теоретический вопрос (20 баллов), одна задача (80 баллов).

В каждом билете присутствует две темы: кривые, поверхности.

Темы задач

Кривые

1. Касательная и нормаль плоской кривой.
2. Касание двух плоских кривых, порядок касания. Угол между двумя кривыми.
3. Длина кривой. Натуральная параметризация плоской кривой.
4. Нахождение базиса Френе и кривизны плоской регулярной кривой.
5. Натуральные уравнения плоской кривой.
6. Огибающая.
7. Нахождение базиса Френе, кривизны, кручения кривой общего положения в трёхмерном пространстве.
8. Нахождение касательной, главной нормали, бинормали, соприкасающейся плоскости, спрямляющей плоскости, нормальной плоскости кривой общего положения в трёхмерном пространстве.

Поверхности в трёхмерном пространстве

9. Параметризация поверхностей, заданных графиком $z = f(x, y)$, параметризация сферы.

10. Нахождение касательного пространства поверхности, его стандартного базиса, u -линий, v -линий.
11. Нахождение нормального гауссова поля гиперповерхности.
12. Нахождение первой фундаментальной формы поверхности.
13. Вычисление длины кривой на поверхности.
14. Вычисление углов между кривыми на поверхности. Нахождение локсодромы на поверхности.
15. Вычисление «объёма» поверхности.
16. Вычисление второй фундаментальной формы гиперповерхности.
17. Вычисление матрицы основного оператора, полной и средней кривизны для гиперповерхности.
18. Вычисление главных кривизн и главных направлений для гиперповерхности.
19. Вычисление линий кривизны на гиперповерхности.
20. Классификация точек гиперповерхности.