

Минимальный объем практических знаний по линейной алгебре

1. Будет ли система векторов $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(-7, -6, -5)$ линейно зависимой?
2. Будет ли вектор $(-7, -6, -5)$ линейно выражаться через векторы $(1, 2, 3)$ и $(3, 4, 5)$?
3. Верно ли, что $(1, 3, 5) \in \langle (2, 3, 4), (3, 4, 5), (-7, -6, -5) \rangle$?
4. Найти базис и размерность $\langle (2, 3, 4), (3, 4, 5), (-7, -6, -5) \rangle$.
5. Найти матрицу перехода от базиса $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ к базису $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (3, 2)$.
6. Записать формулы преобразования координат, если матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
7. Найти базис суммы подпространств $\langle (2, 3, 4), (3, 4, 5) \rangle + \langle (1, 2, 3), (2, 5, 8) \rangle$.
8. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
9. Найти ФСР однородной с.л.у. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0; \\ 3x + 4y + 5z = 0. \end{cases}$
10. Найти векторную форму записи с.л.у. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9; \\ 3x + 4y + 5z = 12. \end{cases}$
11. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2)$.
12. Найти базис образа и базис ядра линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
13. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
14. Является ли линейный оператор $\mathcal{A}$, заданный матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, л.о.п.с.?
15. Записать клетку Жордана 3-го порядка, относящуюся к собственному значению 0.
16. Записать клетку Жордана 4-го порядка, относящуюся к собственному значению -1.
17. Найти координаты образа вектора $x = (1, 2)$ при линейном операторе $\mathcal{A}$, заданном матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
18. Найти длину вектора $(1, i)$ в унитарном пространстве $\mathbb{C}^2$.
19. Найти угол между векторами $a_1 = (6, 2, 0, 3)$ и $a_2 = (2, 2, -2, -2)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$.

20. Ортогонализировать систему векторов $a_1 = (6, 2, 3)$ и $a_2 = (1, -1, -1)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

21. Найти базис ортогонального дополнения к $\langle (1, 2, 3), (1, -1, -1) \rangle$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

22. Найти ортогональную компоненту и ортогональную составляющую вектора $(1, 2, 3)$ относительно $\langle (3, 0, 4) \rangle$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

23. Вычислить скалярное произведение векторов $(1, 2)$ и $(2, -1)$, если скалярное произведение задано при помощи матрицы Грама $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

24. Найти матрицу сопряженного линейного отображения к линейному отображению, заданного в ортонормированных базисах матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ матрицей самосопряженного оператора в ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^3$?

26. Является ли матрица $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицей ортогонального оператора в ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^2$?

27. Является ли линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}$, положительным?

28. Записать матрицу билинейной формы $2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$.

29. Привести квадратичную форму $x^2 + 2xy + 3y^2$ к каноническому виду.

30. Является ли квадратичная форма $x^2 + 4xy + y^2$ положительно определенной?

31. Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$ матрицей обмена?

32. Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$ продуктивной?

33. Найти спектральный радиус матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$.

34. Найти положительный собственный вектор для спектрального радиуса матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$.