Программа к экзамену по линейной алгебре

II семестр механики и прикладные математики дн. отделение 2022/23 уч. г.

лектор Овсянников А.Я.

1. Определение линейного пространства. Примеры, следствия из определения.

2. Линейно зависимые системы векторов. Критерий линейной зависимости. Добавление к линейно независимой системе вектора.

3. Линейно независимые системы векторов. Теорема о числе векторов в линейно независимой системе, которая линейно выражается через другую систему.

4. Системы образующих. Конечномерные пространства. Базис и размерность пространства.

5. Свойства конечномерных пространств.

6. Координаты вектора в базисе. замена базиса.

7. Изоморфизм линейных пространств.

8. Подпространства. Сумма и пересечение нескольких подпространств.

9. Теорема о связи размерностей суммы и пересечения двух подпространств.

10. Прямая сумма подпространств.

11. Ранг матрицы. Определения, теорема о ранге матрицы.

12. Свойства ранга матрицы.

13. Теорема Кронекера-Капелли о системах линейных уравнений. Общее решение совместной системы линейных уравнений.

14. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений, фундаментальная система решений.

15. Линейные отображения. Теорема существования и единственности.

16. Матрица линейного отображения. Координаты образа вектора. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов.

17. Образ и ядро линейного отображения. Теорема о связи размерностей образа и ядра.

18. Линейные операции над линейными отображениями. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

19. Инвариантные подпространства относительно линейного оператора.

20. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

21. Линейные операторы простой структуры.

22. Нильпотентные операторы. Нильслои. Жордановы таблицы.

23. Построение жорданова базиса относительно нильпотентного оператора.

24. Разложение Фиттинга.

25. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении.

26. Теорема Жордана (построение жорданова базиса для линейного оператора, у которого характеристический многочлен разлагается на линейные множители). Нормальная форма Жордана квадратной матрицы.

27. Минимальный многочлен линейного оператора.

28. Линейные пространства со скалярным произведением. Определение и примеры.

29. Длины векторов и углы между векторами. Неравенство Коши-Буняковского.

30. Ортогональность векторов. Ортогональные и ортонормированные базисы.

31. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

32. Ортогональное дополнение. Ортогональная компонента и составляющая вектора относительно подпространства.

33. Матрица Грама и определитель Грама.

34. Объем параллелотопа.

35. Ориентация евклидова пространства. Построение обобщенного векторного произведения.

36. Линейные отображения пространств со скалярным произведением. Сопряженное отображение.

37. Матрица сопряженного отображения в произвольных базисах.

38. Нормальные операторы, их свойства.

39. Нормальные операторы унитарных пространств.

40. Нормальные операторы евклидовых пространств.

41. Изометрические операторы.

42. Самосопряженные операторы.

43. Неотрицательные операторы. Извлечение корня из линейного оператора.

44. Сингулярное разложение линейного отображения.

45. Сингулярное разложение матрицы.

46. Полярное разложение линейного оператора.

47. Билинейные функции. Матрица билинейной функции в базисе и ее изменение при изменении базиса.

48. Симметричные билинейные функции. Эквивалентные условия для симметричности билинейной функции. Теорема о матрице симметричной билинейной функции в ортонормированном базисе евклидова пространства.

49. Квадратичные функции, их связь с симметричными билинейными функциями.

51. Квадратичные формы Матричная запись. Замена переменных. Эквивалентность квадратичных форм.

52. Теорема Лагранжа. Приведение квадратичной формы к главным осям.

53. Закон инерции вещественных квадратичных форм.

54. Знакоопределенные формы. Эквивалентные условия для положительно определенной и отрицательно определенной квадратичных форм.

55. Критерий Сильвестра. Пары форм.